

文章编号:1001-9081(2009)10-2703-03

二值分解压缩和 Consensus 算法

傅迎华,陈 玮,付东翔

(上海理工大学 光电信息与计算机工程学院,上海 200093)

(janeat9902@gmail.com)

摘 要:奇异值分解(SVD)是一种流行的用于高维数据压缩的方法,二值分解是奇异值分解的一种简化形式。实现二值分解的主要算法有两种:迭代启发式算法和贪婪算法。但这两种算法都不是很理想的算法:迭代启发式算法在很多情况下不能保证收敛性,贪婪算法不满足大型数值矩阵分解的需要。采用了一种新的算法来实现二值分解:Consensus 的算法。Consensus 算法可在渐进多项式时间内找到一般图中的极大二分图。对于某些二分图,该算法的复杂度是多项式时间的。实验结果表明,当迭代启发式算法不起作用时,Consensus 算法是一种很好的求解二值分解的方法。该算法远比贪婪算法的效率高,且具有稳定收敛性。

关键词:Consensus 算法;模块化输入一致性算法;二值分解;奇异值分解;迭代启发式算法;秩一估计
中图分类号:TP391.41 **文献标志码:**A

Binary factorization compression and Consensus algorithm

FU Ying-hua, CHEN Wei, FU Dong-xiang

(School of Optical-Electrical and Computer Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 20093, China)

Abstract: In graphics, Singular Value Decomposition (SVD) is a popular method that has been used for compressing high dimensional data. Binary factorization is a simplified variant of SVD. There are two methods for binary factorization compression: the iterative heuristic and greedy algorithm. However, both of them are not very favorable in applications. The iterative heuristic does not guarantee the convergence in most cases and greedy algorithm cannot fit the need of large-scale matrices factorization. In this paper a new method was used for binary factorization compression: Consensus algorithm. Consensus algorithm is a brand-new approach to enumerating all the maximal bicliques for a given graph, which is proved to be an NP-complete problem and can give the solution in incremental polynomial time. For some bipartite graphs, the time complexity is polynomial. Experiments show that when the iterative heuristic does not work, consensus algorithm is a good method for binary factorization and ensures the stability.

Key words: Consensus algorithm; Modular Input Consensus Algorithm (MICA); binary factorization; Singular Value Decomposition (SVD); iterative heuristic algorithm; rank-one approximation

0 引言

数据压缩技术一般是基于这样一种思想:通过发现代表性的模式或信号,为数据找一种紧缩的表述。矩阵分解已广泛地应用在各种大型的数据压缩中,而大多数成功的压缩方法都与矩阵分解有关系。在三维计算机图形研究中,各种映射通常被表示成大型的数值矩阵。矩阵分解是一个有强力的计算机图形压缩工具。最流行的分解方法是奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)^[1]。SVD 可以从 Froebius 范数和矩阵 2 范数两算子方面来计算矩阵的最优低阶近似。SVD 被用来压缩许多计算机图形数据集^[2-4]。其中,同态分解是一种把一个矩阵分解为多个矩阵乘积的方法。通过加入了限制和权数的非负矩阵分解算法(Non-negative Matrix Factorization, NMF)^[5]是这种分解的一种改进算法。

大多数分解方法是通过连续的奇异值和连续型的奇异向量来实现的。目前只有少数的分解是离散分解^[6-8]。各种正交和非正交矩阵转换,如截尾 SVD、半离散矩阵分解(Semidiscrete Matrix Decomposition, SDD)和二值分解,由于其

独特的优势已广泛应用于信息检索和图形学中纹理压缩。

SDD 是一个不同于 SVD 的分解形式。最初用它来处理图像压缩^[9]。SDD 分解和 SVD 类似,用矩阵的秩一外积之和逼近矩阵,但 m 维向量和 n 维向量中的元素只限于在集合 $\{-1, 0, 1\}$ 中取值。这种分解方法一般通过贪婪算法建立起来。由于贪婪算法对于大型数值矩阵分解无能为力,且在 Froebius 范数和 Euclidean 范数两个尺度上, SDD 并不一种生成最优逼近最佳分解方法。

将 SVD 思想应用在二进制矩阵中也存在一些缺陷:一是要最终的分解中含有非整数向量值,二是要满足正交分解的特性。SDD 在某种程度上解决了第一个问题,但对第二个问题却无能为力。鉴于以上原因,引入二值分解来处理二进制矩阵中的分解问题。二值分解的基本思想是把一个任意矩阵分解成三个矩阵 $A = XSY^T$, 类似于奇异值分解,并限制 X 和 Y 中的值为二进制值,同时允许对角矩阵 S 中的值是浮点值。SDD 和二值分解由于在很大程度上比 SVD 算法和 NMF 算法节省了存储空间且运行时间更短,因此受到图形压缩人员的关注。

收稿日期:2009-04-07;修回日期:2009-06-22。

作者简介:傅迎华(1976-),女,湖南汨罗人,讲师,硕士,主要研究方向:图像处理算法、数据压缩、计算机图形建模、模式识别与机器学习、数据挖掘与处理;陈玮(1964-),女,江苏扬州人,副教授,硕士,主要研究方向:信息处理技术、信息安全;付东翔(1971-),男,辽宁人,讲师,博士,主要研究方向:光电精密测试技术。

目前,有两种常用的方法解决二值矩阵的秩一的逼近:迭代启发式算法和贪婪算法。迭代启发式搜索速度快(其复杂度是线性的),但其收敛性遭到质疑。贪婪算法要比迭代启发式算法稳定得多,但处理大型数据集时效率较低,在许多工程很难采用。本文提出用 Consensus 算法来解决上述两个问题。对于二值分解的应用问题,Consensus 算法弥补了贪婪和迭代启发式算法所不能解决的缺陷,是一个稳定的、多项式时间的算法。

1 奇异值分解和半离散矩阵分解

1.1 奇异值分解(SVD)

SVD 将一个矩阵分解为两个正交矩阵和包含奇异值的对角矩阵。待压缩的文本矩阵可视为矩阵 A 。设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵,则 A 可分解为如下形式:

$$A = USV^T \quad (1)$$

U 是一个 $m \times m$ 的正交矩阵, S 是 A 的奇异值组成的对角矩阵,其值是正数或零, V 是 $n \times n$ 的正交矩阵。任意矩阵 A 可以看成是一组由 U 和 V 的列向量外积的加权之和,其中的权值是奇异值 $s_j^{[10]}$:

$$A_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} s_k U_{ik} V_{jk} \quad (2)$$

矩阵 S 的对角线上,奇异值以递减的顺序排列。去掉对角矩阵中值为零的奇异值并不会影响矩阵的分解,因为在上式中外积相当于消除值为零的奇异值。在应用中奇异值快速趋向于 0 是我们所希望的结果。为了重构矩阵 $A(i,j)_p$,可使用式(1)(其中下标 p 表示保留下的奇异值数目):

$$A(i,j)_p = \sum_{k=0}^{p-1} U_{ik} S_{kk} V_{jk} \quad (3)$$

1.2 半离散矩阵分解(SDD)

SDD 是 SVD 的一种变体。与 SVD 不同的是,SDD 中矩阵 U 和 V 的取值被限制在集合 $\{-1,0,1\}$ 。SDD 的主要优点是它降低了存储要求。SDD 应用于图像压缩和模式匹配的实践表明,SDD 虽然在运行效果上略逊于基于离散余弦变换(Discrete Cosine Transform, DCT)的图像压缩算法,但是它能够快速、准确地找到模式匹配。由于奇异向量的取值限制在集合 $\{-1,0,1\}$ 中,SDD 的求解实际上变成了一个整数规划问题,这是一个 NP 难题。文献[11]作者提出了一种迭代交替启发式方法,使得在多项式时间内找到矩阵的秩一估计。该启发式算法的每步迭代都是线性时间复杂度。

2 二值分解和迭代启发式算法

传统的奇异值分解可以把矩阵看作一系列秩一估计矩阵之和。

2.1 秩一估计

求解一个 $m \times n$ 阶的二值矩阵 A 的秩一估计,主要就是去寻找向量 x 和向量 y ,使矩阵 $(A - xy^T)$ 中的零的个数最少,其中向量 x 和 y 分别为 m 维和 n 维。

首先考虑秩为一的二值矩阵的分解。给定某一矩阵 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$,要找最佳的 $x \in \{0,1\}^m$, $y \in \{0,1\}^n$ 和 δ ,使 δxy^T 逼近于矩阵 A ,计算 x, y 和 δ 就是使以下目标函数:

$$f(x, y, \delta) = \|A - \delta xy^T\|_F^2 \quad (4)$$

的值最小。对式(4)进行分解,有:

$$f(x, y, \delta) = \|A\|_F^2 - 2\delta xAy^T + \delta^2 \|x\|^2 \|y\|^2 \quad (5)$$

对式(5)求最小值可以采用一般的求函数极值的方法。

先对 f 关于 δ 求导,并令其导函数为零,则可以得到式(6):

$$\frac{\partial f}{\partial \delta}(x, y, \delta) = -2x^T Ay + 2\delta \|x\|^2 \|y\|^2 = 0 \quad (6)$$

设 x 和 y 为给定值,则:

$$\delta^* = \frac{x^T Ay}{\|x\|^2 \|y\|^2}$$

代入式(5),简化得:

$$f^*(x, y) \equiv f(x, y, \delta^*) = \|A\|_F^2 - \frac{(x^T Ay)^2}{\|x\|^2 \|y\|^2} \quad (7)$$

最优的 x 和 y 可以通过求式(8)的最大值得出:

$$g(x, y) = \frac{(x^T Ay)^2}{\|x\|^2 \|y\|^2} \quad (8)$$

从 x 和 y 两个变量求 $g(x, y)$ 的最优值比较困难。若把两个向量中的一个固定,就能很容易计算出另外一个。假定 x 是固定的,记 $z = (x^T A)^T$,则通过最大化 $\frac{(z^T y)^2}{\|y\|^2}$ 求出 y 。很明显,向量 y 中为 1 的元素是向量 z 中的值全为正或全为负的位置。假定 z 中的值是未知的。不失一般性,假设 z 的值按非递次序排列,即:

$$z_1 \leq \dots \leq z_r < 0 = z_{r+1} = \dots = z_s < z_{s+1} \leq \dots \leq z_n$$

因此,最优的 y 可以按如下方式求解:

引理 1 如果最优 y 最多有 J 个非零值,则 y 可表示为:

$$y(i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq \min(J, r) \\ 0, & i > \min(J, r) \end{cases} \quad (9)$$

或者:

$$y(i) = \begin{cases} 0, & 1 \leq i \leq \max(s, n - J) \\ 1, & \max(s, n - J) < i \leq n \end{cases} \quad (10)$$

因此,最多有 n 项决定最优 y 。给定 y 可用类似的过程计算最佳的 x 。这导致了计算 x 和 y 有如下迭代过程。首先,随机获得 x 的初值,对于这个固定的 x ,用引理 1 更新 y 。再在类似引理 1 步骤的基础上利用更新后的 y 更新 x 。重复这一迭代过程,直到收敛,也就是说,当 $g(x, y)$ 值保持不再改变。

2.2 秩 P 估计

完整的过程如下:1) 计算矩阵的秩一二值分解;2) 从矩阵中减去秩为一的分解;3) 如果该算法是不收敛,则转到步骤 1)。秩为 P 的二值矩阵分解公式,如下所示:

$$A_p = \sum_{i=1}^p \delta_i x_i y_i^T \quad (9)$$

在这里通过计算剩余矩阵:

$$A - \sum_{i=1}^{k-1} \delta_i x_i y_i^T = A - A_{k-1} \quad (10)$$

的秩一二值分解得到 (x_k, y_k, δ_k) 。

目标函数的特性使得算法具有线性收敛性,且保证其收敛于局部最大值。该算法总是保证局部最大值最接近初始值。

3 Consensus 算法

给定 x, y 和 δ ,当前剩余矩阵 R ,我们可以计算出 $B = R - \delta xy^T$ 并且建立二分图 $G = (E, V_x \cup V_y)$,其中 x 的每个分量对应图 V_x 中的一个节点, y 的每个分量对应 V_y 中的一个节点, E 是连接 V_x 和 V_y 边的集合。当且仅当 $B_{ij} \leq 0$ 时,二分图中有一个边对应 x 的第 i 项 y 的第 j 项。那么秩一估计问题就转化为在二分图中找到一个最大完全二分图(最大二分图)。这个问题已被证明是一个 NP 完全问题^[12],这使得二值分解以及 SDD 分解的应用受到了很大的限制。文献[8]采用二值分解来求解建筑物表面的压缩问题,由于迭代启发式算法不稳定的收

敛性,故采用贪婪算法来求解此问题,而贪婪算法的遍历性很,明显地限制了其在图形中的应用。贪婪算法在大型位移映射压缩时,其效率非常低,这可以在后面的实验部分看到。

对于图的最大二分团的研究,除了贪婪算法外,用效率更高的 Consensus 算法来解决此问题已成为可能^[13-14]。Alexe 证明,Consensus 算法是一个渐进多项式时间算法且对一些特殊二分图是多项式时间算法。

假设 G 是一个图, X 和 Y 是两个不相交的非空点集,并且 X 中的顶点和 Y 中的顶点不相邻(没有共同边)。 G 的二分图包括 X 和 Y 集合两部分,记为 (X, Y) 。假设 $B_1 = (X_1, Y_1)$ 和 $B_2 = (X_2, Y_2)$ 是 G 的两个二分图。如果 $X_2 \subseteq X_1$ 且 $Y_2 \subseteq Y_1$,或者 $X_2 \subseteq Y_1$ 且 $Y_2 \subseteq X_1$,则称 B_1 吸收或者包含 B_2 。如果 $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$,称 $(X_1 \cup X_2, Y_1 \cap Y_2)$ 为 B_1 和 B_2 的一个一致集。同理, $(X_1 \cap X_2, Y_1 \cup Y_2)$, $(Y_1 \cup X_2, X_1 \cap Y_2)$, $(X_1 \cup Y_2, Y_1 \cap X_2)$ 都是 B_1 和 B_2 的一致集。因此,对于每对二分图可能 0, 1, 2, 3 或 4 个一致集。

3.1 基本一致性算法

Consensus 算法首先从覆盖 G 中所有边的二分图集 C 开始。简单地,可取 C 为 G 中所有的星形图集。

Consensus 算法对集合 C 进行一系列变换操作,重复应用两个变换:吸收和一致添加。

1) 吸收:如果 C 中二分团 B_1 吸收了 C 中二分团 B_2 ,则从 C 中删除 B_2 。

2) 一致添加:对于 C 的任意两个二分团 B_1 和 B_2 ,如果 B_1 和 B_2 的任一一致集存在且没被吸收在 C 的二分团中,则将其添加到 C 中。

将上述两个变换作用于 C ,直到这两种变换不能改变 C 中的任何集合时停止。此时 C 中的集合便是 G 的极大二分团。

这种基本的 Consensus 算法总运行时间不是多项式的,且可能是图的大小和极大二分团个数的指数级时间的。

3.2 模块化输入一致性算法(MICA)^[13]

模块化输入一致性算法(Modular Input Consensus Algorithm, MICA) 对该算法进行了改进,引入了一个新的操作。

B 的扩展:产生一个吸收 B 的最大二分团。

MICA 的主要算法过程如下:

1) 首先,设 C_0 为最多有 n 个最大二分团的集合,这些二分团覆盖图 G 的所有星形图,令 $C := C_0$ 。

2) 重复以下过程:对于每对不同的二分团 $B_1 \in C_0$ 和 $B_2 \in C$,如果 B_1 和 B_2 的一致集 B_3 不被 C 中任何一个团吸收,则把 B_3 扩展为最大二分团 B_4 ,并且把 B_4 添加到 C 中。

MICA 是一个近多项式时间算法^[13]。对于一些特殊的二分图,MICA 能在多项式时间内找到其最大二分团。

4 实验和比较

以文献[8]所示的建筑物表面位移映射为例。每个建筑物表面由位移映射、材料指数映射、加速数据结构图和一个需要兆字节数据的索引加速数据结构图组成。文献[8]采用了二值分解思想来压缩位移映射,但最终作者不得不采用贪婪算法来完成二值压缩。在该应用中,迭代启发式算法不能保证收敛性。

以建筑物表面的位移映射为例比较 Consensus 算法与贪婪算法。在实验中,对于输入纹理矩阵,首先,找到最大值所在的位置,并在该位置记为 1,其他位置记为 0,从而可以一个

同样大小的二元矩阵。将该矩阵对应的二分图表示出来后,分别用贪婪和 MICA 算法在该二分图中找含有大边的最大二分团。由于 MICA 算法枚举所有的极大二分团,故只需要从这些团中取一个所含边数最多的二分团即可,从而可以得到这个二分团对应的二元向量 X 和 Y ,并输出。然后从二元矩阵中移除这个二分团的边所对应的元素,得到一次逼近的剩余的二元矩阵,再从剩余矩阵中找其最大二分团可进一步迭代。当二元向量逼近所有的二元矩阵值时,我们对输入矩阵第二个最大值重复上述步骤。

图 1 为某些建筑物表面映射图。图 1(a)用贪婪算法和 Consensus 算法运行时耗时分别为 7 s 和 1 s。当待压缩的矩阵不大时,贪婪算法能够起作用。图 1(b)用这两种算法的耗时分别为 326 s 和 37 s。可见当矩阵的规模比较大时,Consensus 算法的效率是相当可观的。

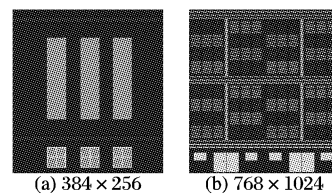


图 1 某建筑物表面

对文献[8]中 30 幅位建筑物表面分别用两种算法,其所费时间比较如图 2 所示。

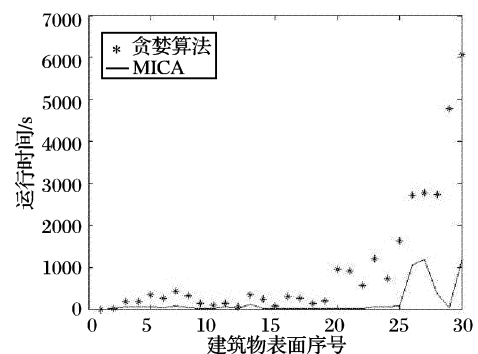


图 2 MICA 和贪婪算法的运行时间分布

本文中的实验所使用的机器配置如下:内存 2 GB,处理器 1.4 GHz 和操作系统 32 bit。由图 2 可知,Consensus 算法的速率至少是贪婪算法的 2 倍,有时甚至超过 100 倍。

从图 2 可以看出,对于输入矩阵的大小 MICA 的运行时间也许不是线性的。然而,它是可以解释的,因为 MICA 的运行时间依赖于二分图的结构,如果二分图是凸二分图那么 MICA 的时间复杂度是多项式时间。

5 结语

二值分解是 SVD 的一种简化形式,其基本思想比 SVD 简单。在应用中,二值分解由于节省了空间和时间,在图形学中应用受到日益关注。其两种常用算法(迭代启发式算法和贪婪算法)的缺陷限制了二值分解这一思想在实际中的广泛应用。Consensus 算法是一种新的求解一般图的二分团的算法,其效率是渐进多项式的,对凸二分图,它的复杂度是多项式时间的^[13]。在时间复杂度上,Consensus 算法比迭代启发式算法要略高一些,但 Consensus 算法在应用时更稳定,更能保证收敛性。不过,Consensus 算法的主要结果是一种每次都枚举图的所有最大二分团的算法,这造成了某种形式的时间和空间的浪费。

(下转第 2709 页)

头出错就丢弃该数据包及后面标志位相同的数据包,解码的时候只解前面正确的数据包,后面的数据添 0。如果出错的位置不在 B-PDU 包头位置,也就是说可以解出数据包中的数据,尽管其中有错误,但错误的个数相对比较少对整个的图像恢复影响不是很大。如果出错的个数比较多的情况下,对图像的影响就比较大,如图 7(e)所示。

图 8 表示了在不同的误码率下图像的 PSNR。从图中可以看出:当误码小于 10^{-6} 时,图像的 PSNR 可以达到 30 dB 以上,基本可以重构原始图像;当误码大于 10^{-4} 时,图像的 PSNR 接近于 18 dB,可以恢复图像的基本概况,但细节信息影响比较大。

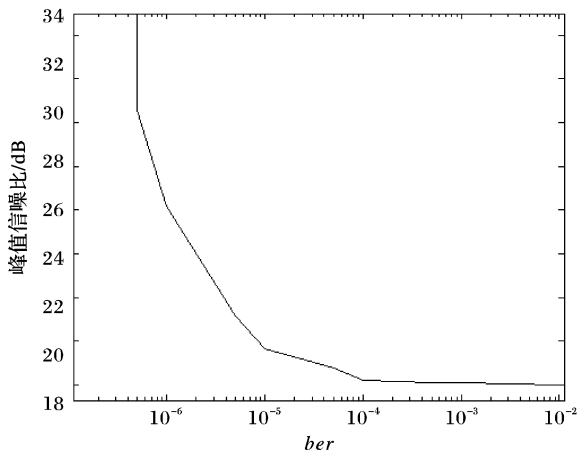


图 8 误码率与 PSNR 关系

4 结语

本文将 CCSDS AOS 建议中的位流业务与 GBN 的重传方式相结合,对图像进行分块传输,提出了最优数据块长度计算

方法,使系统的归一化吞吐量达到最大。并提出了一种适合遥感图像传输的方案,对该方案进行了仿真验证。结果表明,随着误码率的增加,图像恢复质量变差。当误码率小于 10^{-6} 时,可以基本恢复原始图像,峰值信噪比可达到 30 dB 以上,可以完成图像信息的重建。

参考文献:

- [1] RAMSTAD T A. Robust image and video communication for mobile multimedia [C]// Signal Processing for Multimedia Conference, Ciocco. Tuscany: [s. n.], 1999: 71 - 90.
- [2] 刘荣科, 张晓林, 廖小涛. 星载遥感图像压缩编码技术综述 [J]. 遥测遥控, 2004, 25(2): 156 - 171.
- [3] CHANG J-F, YANG T-H. Multichannel ARQ protocols [J]. IEEE Transactions on Communication, 1993, 41(4): 592 - 598.
- [4] YAO YU-DONG. A Go-Back-N ARQ scheme for mobile satellite communications under variable channel shadowing conditions [C]// Proceedings of IEEE 45th Vehicular Technology Conference. Washington, DC: IEEE Press, 1995, 1: 341 - 345.
- [5] 王典洪. 基于提升整数小波变换的遥感图像压缩编码方法研究 [D]. 武汉: 华中科技大学, 2002.
- [6] 李伟生, 李域, 王涛. 一种不用建造 Huffman 树的高效 Huffman 编码算法 [J]. 中国图象图形学报, 2005, 10(3): 382 - 387.
- [7] CCSDS 732.0-B-1, AOS space data link protocol, blue book, issue 1 [S]. 2003.
- [8] YAO YU-DONG. An effective Go-Back-N ARQ scheme for variable error rate channel [J]. IEEE Transactions on Communications, 1995, 43(1): 20 - 23.
- [9] 刘锦杨, 戚飞虎. 一种基于 JPEG2000 的无线图像传输方法 [J]. 计算机工程, 2004, 30(13): 140 - 142.
- [10] 吕超源, 王庭昌, 王红星, 等. 一种用于图像传输的非均匀纠错方案及性能分析 [J]. 系统仿真学报. 2008, 20(6): 1511 - 1514.

(上接第 2705 页)

参考文献:

- [1] GOLUB G H, van LOAN C F. Matrix computations [M]. 3th ed. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [2] WANG LI-FENG, WANG XI, TONG XIN, *et al.* View-dependent displacement mapping [J]. ACM Transactions on Graphics, 2003, 22(3): 334 - 339.
- [3] NISHINO K, SATO Y, IKEUCHI K. Eigentexture method: Appearance compression based on 3D model [C]// Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Los Alamitos: IEEE Computer Society, 1999: 618 - 624.
- [4] LEHTINEN J, KAUTZ J. Matrix radiance transfer [C]// Proceedings of the 2003 Symposium on Interactive 3D Graphics. New York: ACM Press, 2003: 59 - 64.
- [5] LEE D D, SEUNG H S. Algorithms for nonnegative matrix factorization [C]// Advances in Neural Information Processing Systems. Cambridge: MIT Press, 2001: 556 - 562.
- [6] KOLDA T, O'LEARY D. A semidiscrete matrix decomposition for latent semantic indexing information retrieval [J]. ACM Transactions on Information Systems, 1998, 16(4): 322 - 346.
- [7] KOYUTÜRK M, GRAMA A. PROXIMUS: A framework for analyzing very high dimensional discrete attributed datasets [C]// Proceedings of the ninth ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. New York: ACM Press, 2003: 147 - 156.
- [8] ALI S, YE JIE-PING, RAZDAN A, *et al.* Compressed facade displacement mapping [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2008, 15(2): 262 - 273.
- [9] O'LEARY D P, PELEG S. Digital image compression by outer product expansion [J]. IEEE Transactions on Communications, 1983, COM-31(3): 441 - 444.
- [10] PRESS W H, VETTERLING W T, TEUKOLSKY S A, *et al.* Numerical recipes in C++: The art of scientific computing [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [11] KOLDA T, O'LEARY D P. Computation and uses of the semidiscrete matrix decomposition [J]. ACM Transactions on Information Processing, 2000, 26(3): 415 - 435.
- [12] PEETERS R. The maximum edge biclique problem is NP-complete [J]. Discrete Applied Mathematics, 2003, 131(3): 651 - 654.
- [13] ALEXE G, ALEXE S, CRAMA Y, *et al.* Consensus algorithms for the generation of all maximal bicliques [J]. Discrete Applied Mathematics, 2004, 145(1): 11 - 21.
- [14] LI JIN-YAN, LIU GUI-MEI, LI HAI-QUAN, *et al.* Maximal biclique subgraphs and closed pattern pairs of the adjacency matrix: A one-to-one correspondence and mining algorithms [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2007, 19(12): 1625 - 1637.