ISSN 1673-9418 CODEN JKYTA8
Journal of Frontiers of Computer Science and Technology
1673-9418/2007/01(03)-340-07
E-mail:fcst@public2.bta.net.cn
http://www.ceaj.org
Tel:+86-10-51616056

基于蕴涵算子族 $L-\lambda-R_0$ 的反向三 I 约束算法 *

王庆平+,张兴芳
WANG Qingping+, ZHANG Xingfang

聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059
School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng, Shandong 252059, China
+Corresponding author: E-mail: wangqingping@lcu.edu.cn

WANG Qingping, ZHANG Xingfang. Fuzzy reasoning reverse triple I constraint method under family of implication operator $L-\lambda-R_0$. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2007,1(3):340–346.

Abstract: The thoughts of fuzzy reasoning under family of implication operator $L-\lambda-R_0$ are introduced, which can contribute to raise the credibility of reasoning result. Reverse triple I constraint method with respect to FMP and FMT models are discussed.
Key words: fuzzy reasoning; family of implication operator $L-\lambda-R_0$; reverse triple I constraint method

摘　要:提出基于蕴涵算子族 $L-\lambda-R_0$ 的模糊推理的思想,这将有助于提高推理结果的可靠性。针对蕴涵算子族 $L-\lambda-R_0$ 给出了模糊推理的 FMP 模型及 FMT 模型的反向三 I 约束算法。
关键词:模糊推理;蕴涵算子族 $L-\lambda-R_0$;反向三 I 约束算法
文献标识码:A　　**中图分类号**:O231

1　引言

众所周知,模糊推理的核心模型是以下形式 FMP(Fuzzy Modus Ponens)模型和 FMT(Fuzzy Modus Tollens)模型:

规则 $A\rightarrow B$	规则 $A\rightarrow B$
输入 A^*	输入 B^*
输出 B^*	输出 A^*

这里 A、A^* 是论域 X 上的模糊集,B、B^* 是论域 Y 上的模糊集。对于上述两类模型,美国控制论专家及模糊集理论创始人 Zadeh 于 1973 年提出了模糊推理中著名的求解 FMP 模型和 FMT 模型的 CRI 算法[1]。从此,以模糊控制为核心的模糊技术被广泛地应用于许多工业和科研领域,并且取得了显著的经济效益。然而,模糊推理远较经典逻辑学中的二值推理复杂。从应用的角度看,似乎很难找到一种普遍适用于各种不同领域的模糊推理方法,而且基于 CRI 方法的模糊系统本质上是一种插值器[2],应用此系统在研究模糊系统的函数逼近模型时,不可避免地出现“规则爆炸”的现象。从理论角度看,Zadeh 的 CRI 算法及其演变[3]的推理机制也似乎有若干值得推敲之处[4]。

* the Key Technologies Project of the Ministry of Education of China No.206089(教育部科学技术研究重点项目).
Received 2007-08, Accepted 2007-10.

因此，近年来模糊推理基础和推理方法的模型受到极大的关注。我国学者王国俊于 1999 年提出了著名的模糊推理全蕴涵三 I 算法[4-7],有效地改进了经典的 CRI 算法,并将之纳入到模糊逻辑的框架之中。

在模糊推理中无论是 CRI 算法、三 I 算法还是反向三 I 算法,推理的结果都与选用的模糊蕴涵算子密切相关。文献[8,9]针对几个常见的蕴涵算子分别给出了相应的 FMP 模型和 FMT 模型解的计算公式。运用不同的蕴涵算子进行推理,结果一般不相等,甚至误差很大,这在模糊推理的实际应用中,有一定的冒险性,为此作者设想运用带参数的蕴涵算子进行模糊推理似乎可以预防冒险性。王国俊与吴望名分别提出了带参数的蕴涵算子[10,11],张兴芳提出了蕴涵算子族 $L-\lambda-R_0$[12],基于此思想,文章给出了蕴涵算子族 $L-\lambda-R_0$ 的 FMP 模型及 FMT 模型的反向三 I 约束算法。

2 准备知识

(1)反向三 I 约束 FMP 原则[13,14]

设 X,Y 为非空集,$F(X),F(Y)$ 分别表示 X,Y 上的模糊子集的全体构成的集合。已知 $A(x),A^*(x)\in F(X),B(y)\in F(Y)$,满足该原则的 $B^*(y)$ 是使得

$$(A^*(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y)) \tag{1}$$

对一切 $x\in X$ 与 $y\in Y$ 取最小值的 $F(Y)$ 中最小的模糊集。

定理 1 若 $R=\to:[0,1]^2\to[0,1]$ 关于第 1 个变量不增,第 2 个变量不减,那么公式(1)的最小值为

$$M(x,y)=(A^*(x)\to 1)\to(A(x)\to B(y))$$

(2)反向三 I 约束 FMT 原则[13,14]

设 X,Y 为非空集,$F(X),F(Y)$ 分别表示 X,Y 上的模糊子集的全体构成的集合。已知 $A(x)\in F(X)$,$B(y),B^*(y)\in F(Y)$,满足该原则的 $A^*(x)$ 是使得式(1)对一切 $x\in X$ 与 $y\in Y$ 取最小值的 $F(X)$ 中最大的模糊集。

定理 2 若 $R=\to:[0,1]^2\to[0,1]$ 关于第 1 个变量不增,第 2 个变量不减,那么公式(1)的最小值为

$$N(x,y)=(0\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))$$

3 FMP 模型的反向三 I 约束算法

蕴涵算子族 $L-\lambda-R_0$ 的模糊蕴涵算子 $R(x,y)=x\to_\lambda y$ 定义如下：

$$x\to y=\begin{cases}1, & x\leqslant y\\ 1-x+(2\lambda-1)y, & x+y<1 \text{ 且 } x>y \quad x,y\in[0,1]\\ (1-2\lambda)x+y+2\lambda-1, & x+y\geqslant 1 \text{ 且 } x>y\end{cases}$$

特别地,当 $\lambda=1$ 时对应 $R_{Lu}(R_{Lu}(x,y)=(1-x+y)\wedge 1)$算子,当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时对应 $R_0(R_0(x,y)=\begin{cases}1 & ,x\leqslant y\\(1-x)\vee y,x>y\end{cases})$ 算子,因此称它为 $R_{L-\lambda-R_0}$ 算子,又称这些算子的全体为模糊蕴涵算子族 $L-\lambda-R_0,\lambda\in[\frac{1}{2},1]$。

由反向三 I 约束 FMP 原则知 $B^*(y)\equiv 1$ 时式(1)最小为

$$(A^*(x)\to 1)\to(A(x)\to B(y))=1\to(A(x)\to B(y))=\begin{cases}1, & A(x)\leqslant B(y)\\ R(A(x),B(y)), & A(x)>B(y)\end{cases}$$

关于 FMP 模型的反向三 I 约束解有如下定理。

定理 3(反向三 IFMP 下确界算法 I) FMP 模型的反向三 I 约束解的下确界 $B^*(y)$ 由下式给出:

$$B^*(y)=\sup_{x\in E_y}\{A^*(x)\}\chi E_y+0\chi_{E_y^c},y\in Y$$

其中 $E_y=\{x\in X|A(x)>B(y)\}$,E_y^c 为 E_y 的余集,$\chi_{E_y},\chi_{E_y^c}$ 分别为 E_y,E_y^c 的特征函数,$\lambda\neq\frac{1}{2}$。

证明 当 $x\in E_y$ 时，如果对任意的 $y\in Y$ 和满足 $C(y)>B^*(y)$ 的 $C(y)\in F(Y)$,$C(y)$ 使得式(1)最小。

事实上,由 $C(y)>B^*(y)=\sup\limits_{x\in E_y}\{A^*(x)\}$,得

$C(y)>A^*(x)$

$(A^*(x)\to C(y))\to(A(x)\to B(y))=1\to(A(x)\to B(y))=R(A(x),B(y))$(最小值)

另一方面,如果存在 $y_0\in Y$ 满足 $D(y_0)<B^*(y_0)$,则 $D(y_0)$ 必不会使式(1)最小。

事实上,若 $D(y_0)<B^*(y_0)$,则存在 $x_0\in E_{y_0}$ 使 $D(y_0)<A^*(y_0)$,下面分两种情况讨论 $(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))$ 的值。

(1)$A^*(x_0)+D(y_0)<1$ 时

$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=(1-A^*(x_0)+(2\lambda-1)D(y_0))\to R(A(x_0),B(y_0))$

若$(1-A^*(x_0)+(2\lambda-1)D(y_0))\leqslant R(A(x_0),B(y_0))$,则

$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=1$(不是$A(x_0)>B(y_0)$时的最小值)

若$(1-A^*(x_0)+(2\lambda-1)D(y_0))>R(A(x_0),B(y_0))$,则再分两种情况来讨论:

①$(1-A^*(x_0)+(2\lambda-1)D(y_0))+R(A(x_0),B(y_0))<1$时

$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=1-(1-A^*(x_0)+(2\lambda-1)D(y_0))+(2\lambda-1)R(A(x_0),B(y_0))=A^*(x_0)-(2\lambda-1)D(y_0)+(2\lambda-1)R(A(x_0),B(y_0))$

由$(1-A^*(x_0)+(2\lambda-1)D(y_0))+R(A(x_0),B(y_0))<1$知,$A^*(x_0)-(2\lambda-1)D(y_0)>R(A(x_0),B(y_0))$,又$(2\lambda-1)R(A(x_0),B(y_0))\geqslant 0$,所以

$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))>R(A(x_0),B(y_0))$

②$(1-A^*(x_0)+(2\lambda-1)D(y_0))+R(A(x_0),B(y_0))\geqslant 1$时

$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=(1-2\lambda)(1-A^*(x_0)+(2\lambda-1)D(y_0))+R(A(x_0),B(y_0))+2\lambda-1=(2\lambda-1)(A^*(x_0)-(2\lambda-1)D(y_0))+R(A(x_0),B(y_0))$

由$D(y_0)<A^*(x_0)$知,$(2\lambda-1)D(y_0)<A^*(x_0)$,所以$(2\lambda-1)(A^*(x_0)-(2\lambda-1)D(y_0))>0$

因此$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))>R(A(x_0),B(y_0))$

(2)$A^*(x_0)+D(y_0)\geqslant 1$时

$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=$

$((1-2\lambda)A^*(x_0)+D(y_0)+2\lambda-1)\to R(A(x_0),B(y_0))$

若$((1-2\lambda)A^*(x_0)+D(y_0)+2\lambda-1)\leqslant R(A(x_0),B(y_0))$,则

$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=1$(不是$A(x_0)>B(y_0)$时的最小值)

若$((1-2\lambda)A^*(x_0)+D(y_0)+2\lambda-1)>R(A(x_0),B(y_0))$,则再分两种情况来讨论:

①$(1-2\lambda)A^*(x_0)+D(y_0)+2\lambda-1+R(A(x_0),B(y_0))<1$时

$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=1-((1-2\lambda)A^*(x_0)+D(y_0)+2\lambda-1)+(2\lambda-1)R(A(x_0),B(y_0))$

由$(1-2\lambda)A^*(x_0)+D(y_0)+2\lambda-1+R(A(x_0),B(y_0))<1$知

$1-((1-2\lambda)A^*(x_0)+D(y_0)+2\lambda-1)>R(A(x_0),B(y_0))$

又$(2\lambda-1)R(A(x_0),B(y_0))\geqslant 0$,所以$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))>R(A(x_0),B(y_0))$

②$(1-2\lambda)A^*(x_0)+D(y_0)+2\lambda-1+R(A(x_0),B(y_0))\geqslant 1$时

$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=(1-2\lambda)((1-2\lambda)A^*(x_0)+D(y_0)+2\lambda-1)+R(A(x_0),B(y_0))+2\lambda-1=(2\lambda-1)(1-D(y_0)-(2\lambda-1)(1-A^*(x_0))+R(A(x_0),B(y_0))$

由$D(y_0)<A^*(x_0)$知

$(2\lambda-1)(1-A^*(x_0))<(2\lambda-1)(1-D(y_0))<1-D(y_0)$

所以$(2\lambda-1)(1-D(y_0)-(2\lambda-1)(1-A^*(x_0))>0$

因此$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))>R(A(x_0),B(y_0))$

当$x\in E_y^c$时,对任意的$y\in Y$,式(1)恒为1,最小的$B^*(y)\equiv 0$。

综上所述,$B^*(y)=\sup_{x\in E_y}\{A^*(x)\}\chi E_y+0\chi_{E_y^c}$应是$F(Y)$中具有上述性质的最小模糊集。

注 $\lambda=\frac{1}{2}$是蕴涵算子族$L-\lambda-G$的模糊蕴涵算子$R(x,y)=x\to_\lambda y$的特殊情形,此时蕴涵算子族$L-\lambda-G$为R_0算子。即

$$R(x,y)=x\to y=\begin{cases}1, & x\leqslant y\\ (1-x)\vee y, & x>y\end{cases}\quad x,y\in[0,1]$$

由反向三I约束FMP原则知,$\lambda=\frac{1}{2}$时,式(1)最小为

$$\begin{cases}1, & A(x)\leqslant B(y)\\ (1-A(x))\vee B(y), & A(x)>B(y)\end{cases}$$

此时,有如下定理4。

定理 4(反向三IFMP下确界算法II) 当$A^*(x_0)>(1-A(x_0)\vee B(y_0))$,$\lambda=\frac{1}{2}$时,FMP模型的反向三I约束解的下确界$B^*(y)$由下式给出

$B^*(y)=\sup\limits_{x\in E_y}\{A^*(x)\wedge(((1-A(x))\vee B(y))\vee(1-((1-A(x))\vee B(y))))\}\chi E_y+0\chi_{E_y^c}, y\in Y$

其中 $E_y=\{x\in X|A(x)>B(y)\}$,E_y^c 为 E_y 的余集,χ_{E_y},$\chi_{E_y^c}$ 分别为 E_y,E_y^c 的特征函数。

证明 当 $x\in E_y$ 时,即 $A(x)>B(y)$,这时式(1)最小为 $(1-A(x))\vee B(y)$。

一方面,对任意的 $y\in Y$ 和满足 $C(y)>B^*(y)$ 的 $C(y)\in F(Y)$,$C(y)$ 使得式(1)最小。事实上,对于任意的 $x\in E_y$,由 $C(y)>B^*(y)$,得 $C(y)>A^*(x)\wedge(((1-A(x))\vee B(y))\vee(1-((1-A(x))\vee B(y))))$。

下面分两种情况来讨论:

(1)当 $C(y)>(((1-A(x))\vee B(y))\vee(1-((1-A(x))\vee B(y))))$ 时,再分两种情况来讨论:

①当 $A^*(x)\leqslant C(y)$ 时

$(A^*(x)\to C(y))\to(A(x)\to B(y))=1\to((1-A(x))\vee B(y))=(1-A(x))\vee B(y)$(最小值)

②当 $A^*(x)>C(y)$ 时

$(A^*(x)\to C(y))\to(A(x)\to B(y))=((1-A^*(x))\vee C(y))\to((1-A(x))\vee B(y))$

由 $C(y)>(((1-A(x))\vee B(y))\vee(1-((1-A(x))\vee B(y))))$ 知,$((1-A^*(x))\vee C(y))>((1-A(x))\vee B(y))$

所以 $(A^*(x)\to C(y))\to(A(x)\to B(y))=(1-((1-A^*(x))\vee C(y)))\vee((1-A(x))\vee B(y))$

由 $C(y)>(((1-A(x))\vee B(y))\vee(1-((1-A(x))\vee B(y))))$ 知 $((1-A^*(x))\vee C(y))>1-((1-A(x))\vee B(y))$,即 $((1-A(x))\vee B(y))>1-((1-A^*(x))\vee C(y))$

因此 $(A^*(x)\to C(y))\to(A(x)\to B(y))=(1-A(x))\vee B(y)$(最小值)

(2)当 $C(y)\leqslant(((1-A(x))\vee B(y))\vee(1-((1-A(x))\vee B(y))))$ 时,有 $C(y)>A^*(x)$

$(A^*(x)\to C(y))\to(A(x)\to B(y))=1\to((1-A(x))\vee B(y))=(1-A(x))\vee B(y)$(最小值)

另一方面,若存在 $y_0\in Y$,满足 $D(y_0)<B^*(y_0)$,则 $D(y_0)$ 不会使得式(1)取最小值。事实上,由 $D(y_0)<B^*(y_0)$ 知,存在 $x_0\in E_{y_0}$,满足

$D(y_0)<A^*(x_0)\wedge(((1-A(x_0))\vee B(y_0))\vee(1-((1-A(x_0))\vee B(y_0))))$

$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=((1-A^*(x_0))\vee D(y_0))\to((1-A(x_0))\vee B(y_0))$

如果 $((1-A^*(x_0))\vee D(y_0))\leqslant((1-A(x_0))\vee B(y_0))$,则

$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=1>((1-A(x))\vee B(y))$

如果 $((1-A^*(x_0))\vee D(y_0))>((1-A(x_0))\vee B(y_0))$,则分两种情况来讨论:

(1)$1-A^*(x_0)>D(y_0)$ 时,即 $(1-A^*(x_0))>((1-A(x_0))\vee B(y_0))$,这时

$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=(1-A^*(x_0))\to((1-A(x_0))\vee B(y_0))=A^*(x_0)\vee((1-A(x_0))\vee B(y_0))$

由 $A^*(x_0)>((1-A(x_0))\vee B(y_0))$ 知

$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=A^*(x_0)>((1-A(x))\vee B(y))$

(2)$1-A^*(x_0)\leqslant D(y_0)$ 时,即 $D(y_0)>((1-A(x_0))\vee B(y_0))$,这时

$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=D(y_0)\to((1-A(x_0))\vee B(y_0))=(1-D(y_0))\vee((1-A(x_0))\vee B(y_0))$

由于 $D(y_0)<A^*(x_0)\wedge(((1-A(x_0))\vee B(y_0))\vee(1-((1-A(x_0))\vee B(y_0))))$

即 $D(y_0)<((1-A(x_0))\vee B(y_0))\vee(1-((1-A(x_0))\vee B(y_0)))$,又 $D(y_0)>((1-A(x_0))\vee B(y_0))$

所以 $D(y_0)<1-((1-A(x_0))\vee B(y_0))$,即 $1-D(y_0)>((1-A(x_0))\vee B(y_0))$

因此 $(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=1-D(y_0)>((1-A(x))\vee B(y))$

综上知,当 $x\in E_y$ 时,最小的 $B^*(y)$ 为 $\sup\limits_{x\in E_y}\{A^*(x)\wedge(((1-A(x))\vee B(y))\vee(1-((1-A(x))\vee B(y))))\}$。

当 $x\in E_y^c$ 时,对任意的 $y\in Y$,$A(x)\leqslant B(y)$,式(1)恒为 1,所以最小的 $B^*(y)\equiv 0$。

综上所述,$B^*(y)=\sup\limits_{x\in E_y}\{A^*(x)\wedge(((1-A(x))\vee B(y))\vee(1-((1-A(x))\vee B(y))))\}\chi E_y+0\chi_{E_y^c}$ 应是 $F(Y)$ 中具有上述性质的最小模糊集。

4 FMT 模型的反向三 I 约束算法

由反向三 I 约束 FMT 原则知,当 $A^*(x)\equiv 0$ 时,式(1)最小为

$$(0\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))=1-(A(x)\to B(y))=\begin{cases}1, & A(x)\leqslant B(y)\\ R(A(x),B(y)), & A(x)>B(y)\end{cases}$$

关于 FMT 模型的反向三 I 约束解有如下定理。

定理 5(反向三 IFMT 上确界算法 I) FMT 模型的反向三 I 约束解的上确界 $A^*(x)$ 由下式给出

$$A^*(x)=\inf_{y\in E_x}\{B^*(y)\}\chi E_x+1\chi_{E_x^c},x\in X$$

其中 $E_x=\{y\in Y|A(x)>B(y)\}$, E_x^c 为 E_y 的余集, χ_{E_x}, $\chi_{E_x^c}$ 分别为 E_x, E_x^c 的特征函数, $\lambda\neq\frac{1}{2}$。

证明 当 $y\in E_x$ 时,对任意的 $x\in X$ 和满足 $C(x)<A^*(x)$ 的 $C(x)\in F(X)$, $C(x)$ 使得式(1)最小。事实上,由 $C(x)<A^*(x)=\inf_{y\in E_x}\{B^*(y)\}$,得 $C(x)<B^*(y)$。所以

$$(C(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))=$$
$$1\to(A(x)\to B(y))=$$
$$\begin{cases}1, & A(x)\leqslant B(y)\\ R(A(x),B(y)), & A(x)>B(y)\end{cases}\text{(最小值)}$$

另一方面,如果存在 $x_0\in X$ 使得 $D(x_0)>A^*(x_0)$,则 $D(x_0)$ 不会使式(1)最小。事实上,由 $D(x_0)>A^*(x_0)$ 知,存在 $y_0\in E_{x_0}$ 使 $D(x_0)>B^*(y_0)$,则分两种情况讨论 $(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))$ 的值。

(1) $D(x_0)+B^*(y_0)<1$ 时

$(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=(1-D(x_0)+(2\lambda-1)B^*(y_0))\to R(A(x_0),B(y_0))$

如果 $(1-D(x_0)+(2\lambda-1)B^*(y_0))\leqslant R(A(x_0),B(y_0))$,则

$(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=1$(不是最小值)

如果 $(1-D(x_0)+(2\lambda-1)B^*(y_0))>R(A(x_0),B(y_0))$,再分两种情况来讨论:

① $(1-D(x_0)+(2\lambda-1)B^*(y_0))+R(A(x_0),B(y_0))<1$ 时

$(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=1-(1-D(x_0)+(2\lambda-1)B^*(y_0))+(2\lambda-1)R(A(x_0),B(y_0))$

由 $(1-D(x_0)+(2\lambda-1)B^*(y_0))+R(A(x_0),B(y_0))$ 知

$1-(1-D(x_0)+(2\lambda-1)B^*(y_0))>R(A(x_0),B(y_0))$

又 $(2\lambda-1)R(A(x_0),B(y_0))\geqslant 0$,所以 $(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))>R(A(x_0),B(y_0))$。

② $(1-D(x_0)+(2\lambda-1)B^*(y_0))+R(A(x_0),B(y_0))\geqslant 1$ 时

$(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=(1-2\lambda)(1-D(x_0)+(2\lambda-1)B^*(y_0))+R(A(x_0),B(y_0))+2\lambda-1=(2\lambda-1)(D(x_0)-(2\lambda-1)B^*(y_0))+R(A(x_0),B(y_0))$

由 $D(x_0)>B^*(y_0)$ 知, $D(x_0)>(2\lambda-1)B^*(y_0)$,所以 $(2\lambda-1)(D(x_0)-(2\lambda-1)B^*(y_0))>0$

因此 $(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))>R(A(x_0),B(y_0))$。

(2) $D(x_0)+B^*(y_0)\geqslant 1$ 时

$(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=((1-2\lambda)D(x_0)+B^*(y_0)+2\lambda-1)\to R(A(x_0),B(y_0))$

如果 $((1-2\lambda)D(x_0)+B^*(y_0)+2\lambda-1)\leqslant R(A(x_0),B(y_0))$,则

$(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=1$(不是最小值)

如果 $((1-2\lambda)D(x_0)+B^*(y_0)+2\lambda-1)>R(A(x_0),B(y_0))$,再分两种情况来讨论:

① $((1-2\lambda)D(x_0)+B^*(y_0)+2\lambda-1)+R(A(x_0),B(y_0))<1$ 时

$(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=1-((1-2\lambda)D(x_0)+B^*(y_0)+2\lambda-1)+(2\lambda-1)R(A(x_0),B(y_0))$

由 $((1-2\lambda)D(x_0)+B^*(y_0)+2\lambda-1)+R(A(x_0),B(y_0))<1$ 知

$1-((1-2\lambda)D(x_0)+B^*(y_0)+2\lambda-1)>R(A(x_0),B(y_0))$,又 $(2\lambda-1)R(A(x_0),B(y_0))\geqslant 0$

所以 $(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))>R(A(x_0),B(y_0))$。

② $((1-2\lambda)D(x_0)+B^*(y_0)+2\lambda-1)+R(A(x_0),B(y_0))\geqslant 1$ 时

$(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=(1-2\lambda)((1-2\lambda)D(x_0)+B^*(y_0)+2\lambda-1)+R(A(x_0),B(y_0))+2\lambda-1=$

$(2\lambda-1)(1-B^*(y_0)-(2\lambda-1)(1-D(x_0)))+R(A(x_0),B(y_0))$

由 $D(x_0)>B^*(y_0)$ 知,$(1-B^*(y_0))>(1-D(x_0))>(2\lambda-1)(1-D(x_0))$,所以 $(2\lambda-1)(1-B^*(y_0)-(2\lambda-1)(1-D(x_0)))>0$。

因此 $(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))>R(A(x_0),B(y_0))$。

当 $y\in E_x^c$ 时,式(1)的最小值是 1,所以最大的 $A^*(x)=1$。

综上所述,$A^*(x)=\inf\limits_{y\in E_x}\{B^*(y)\}\chi E_x+1\chi_{E_x^c}$ 应是 $F(X)$ 中具有上述性质的最大模糊集。

注 当 $\lambda=\frac{1}{2}$,$A(x)\leqslant B(y)$ 时,式(1)恒为 1,此时最大的 $A^*(x)\equiv 1$。当 $A(x)>B(y)$,$B^*(y)\leqslant((1-A(x))\vee B(y))\leqslant\frac{1}{2}$ 时,有如下定理。

定理 6(反向三 IFMT 上确界算法 II) FMT 模型的反向三 I 约束解的上确界 $A^*(x)$ 由下式给出

$$A^*(x)=\inf_{y\in E_x}\{(B^*(y)\vee(1-B^*(y)))\wedge((1-A(x))\vee B(y))\},x\in X$$

其中 $E_x=\{y\in Y|A(x)>B(y),B^*(y)\leqslant((1-A(x))\vee B(y))\leqslant\frac{1}{2}\}$,$\lambda=\frac{1}{2}$。

证明 一方面,对任意的 $x\in X$ 和满足 $C(x)<A^*(x)$ 的 $C(x)\in F(X)$,$C(x)$ 使得式(1)最小。事实上,对于任意的 $y\in E_x$,由 $C(x)<A^*(x)$,得

$$C(x)<(B^*(y)\vee(1-B^*(y)))\wedge((1-A(x))\vee B(y))$$

所以 $C(x)<(B^*(y)\vee(1-B^*(y)))$ 且 $C(x)<((1-A(x))\vee B(y))\leqslant\frac{1}{2}$。

如果 $C(x)\leqslant B^*(y)$,则

$(C(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))=1\to((1-A(x))\vee B(y))=(1-A(x))\vee B(y)$(最小值)

如果 $B^*(y)<C(x)$,则 $C(x)<(1-B^*(y))$,这时

$(C(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))=((1-C(x))\vee B^*(y))\to((1-A(x))\vee B(y))=(1-C(x))\to((1-A(x))\vee B(y))$

由 $C(x)<((1-A(x))\vee B(y))\leqslant\frac{1}{2}$ 得,$1-C(x)>\frac{1}{2}\geqslant((1-A(x))\vee B(y))$,所以

$(C(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))=C(x)\vee((1-A(x))\vee B(y))=(1-A(x))\vee B(y)$(最小值)

另一方面,若存在 $x_0\in X$ 满足 $D(x_0)>A^*(x_0)$,则 $D(x_0)$ 不会使式(1)最小。事实上,由 $D(x_0)>A^*(x_0)$,则存在 $y_0\in E_{x_0}$ 使 $D(x_0)>(B^*(y_0)\vee(1-B^*(y_0)))\wedge((1-A(x_0))\vee B(y_0))$。

如果 $D(x_0)>(B^*(y_0)\vee(1-B^*(y_0)))$,则 $D(x_0)>B^*(y_0)$ 且 $D(x_0)>1-B^*(y_0)$,这时

$(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=((1-D(x_0))\vee B^*(y_0))\to((1-A(x_0))\vee B(y_0))=B^*(y_0)\to((1-A(x_0))\vee B(y_0))=1$(不是最小值)

如果 $D(x_0)\leqslant(B^*(y_0)\vee(1-B^*(y_0)))$,则 $1-B^*(y_0)\geqslant D(x_0)>((1-A(x_0))\vee B(y_0))\geqslant B^*(y_0)$,$(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=((1-D(x_0))\vee B^*(y_0))\to((1-A(x_0))\vee B(y_0))=(1-D(x_0))\to((1-A(x_0))\vee B(y_0))=1$ 或 $D(x_0)$(不是最小值)。

综上所述,$A^*(x)=\inf\limits_{y\in E_x}\{(B^*(y)\vee(1-B^*(y)))\wedge((1-A(x))\vee B(y))\}$ 应是 $F(X)$ 中具有上述性质的最大模糊集。

5 结束语

文章针对模糊蕴涵算子族 $L\text{-}\lambda\text{-}R_0$ 探讨了模糊推理的 FMP 模型及 FMT 模型的反向三 I 约束算法,给出了 FMP 模型及 FMT 模型的反向三 I 约束算法的基本定理,特别讨论了 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时,FMP 模型及 FMT 模型的反向三 I 约束算法,其结果有待进一步完善。

References:

[1] Zadeh L A. Outline of new approach to the analysis of complex systems and decision processes[J]. IEEE Trans Sys ManCybern, 1973, 3(1): 28–33.

[2] Li Hongxing. Interpolation mechanism of fuzzy control fuzzy control[J]. Science in China: Ser E, 1998, 28(3): 259–267.

[3] Dubois D. Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 2:

logic approaches[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991,40(1): 203-244.

[4] Wang Guojun. Nonclassical mathematics logic and approximate reasoning[M]. Beijing: Science Press, 2000.

[5] Wang Guojun. Total complication triple I method in fuzzy reasoning[J]. Science in China: Ser E, 1999,29(1):43-53.

[6] Wang Guojun. A new method for fuzzy reasoning[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 1999,13(3):1-10.

[7] Wang Guojun, Song Qingyan. A new triple I method and its basement of logic[J]. Progress in Natural Science,2003, 13(6):575-581.

[8] Peng Jiayin, Hou Jian, Li Hongxing. Reverse triple I method under commonly used fuzzy implication operators[J]. Progress in Natural Science, 2005,15(4):404-410.

[9] Peng Jiayin. Fuzzy reasoning total complication triple I constraint method under commonly used fuzzy implication operators[J]. Progress in Natural Science, 2005,15(5): 539-546.

[10] Wang Guojun, Lan Rong. Generalized tautologies of the systems H_α[J]. Journal of Shaanxi Normal University: Natural Science Edition, 2003,31(2):1-11.

[11] Wu Wangming. Generalized tautologies in parametric Kleene's systems[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2000,14(1):1-7.

[12] Zhang Xingfang, Meng Guangwu, Zhang Anying. Families of implication operators and their application[J]. Chinese Journal of Computers, 2007,30(3):448-453.

[13] Song Shiji, Wu Cheng. Fuzzy reasoning reverse triple I constraint method[J]. Progress in Natural Science, 2002, 12(1):95-100.

[14] Song Shiji, Wu Cheng. Fuzzy reasoning reverse triple I method[J]. Science in China: Ser E, 2002,32(2):230-246.

附中文参考文献:

[2] 李洪兴.模糊控制的插值机理[J].中国科学 E辑,1998,28(3):259-267.

[4] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理[M].北京:科学出版社,2000.

[5] 王国俊.模糊推理的全蕴涵三I算法[J].中国科学 E辑,1999,29(1):43-53.

[6] 王国俊.模糊推理的一个新方法[J].模糊系统与数学,1999,13(3):1-10.

[7] 王国俊, 宋庆燕.一种新型的三I算法及其逻辑基础[J].自然科学进展,2003,13(6):575-581.

[8] 彭家寅,侯健,李洪兴.基于某些常见蕴涵算子的反向三I算法[J].自然科学进展,2005,15(4):404-410.

[9] 彭家寅.基于某些常见蕴涵算子的模糊推理全蕴涵三I约束算法[J].自然科学进展,2005,15(5):539-546.

[10] 王国俊,兰蓉.系统 H_α 中的广义重言式理论[J].陕西师范大学学报:自然科学版,2003,31(2):1-11.

[11] 吴望名.参数 Kleene 系统中的广义重言式[J].模糊系统与数学,2000,14(1):1-7.

[12] 张兴芳,孟广武,张安英.蕴涵算子族及其应用[J].计算机学报,2007,30(3):448-453.

[13] 宋士吉,吴澄.模糊推理的反向三I约束算法[J].自然科学进展,2002,12(1):95-100.

[14] 宋士吉,吴澄.模糊推理的反向三I算法[J].中国科学 E辑,2002,32(2):230-246.

王庆平(1979-),男,山东东平人,助教,硕士研究生,2001年毕业于聊城师范学院数学与应用数学专业,目前是聊城大学硕士研究生,主要研究领域为非经典逻辑、模糊推理。

WANG Qingping was born in 1979. He received his BS degree from Liaocheng Teacher's University in 2001, and now is a master graduate candidate at Liaocheng University. His research interests include non-classical logic and fuzzy reasoning.

张兴芳(1957-),女,山东阳谷人,教授,研究生导师,1981年毕业于聊城师范学院,主要研究方向为模糊推理、模糊逻辑、模糊信息处理。

ZHANG Xingfang was born in 1957. She received her BS degree from Liaocheng Teacher's University in 1981. Her research interests include fuzzy reasoning, fuzzy logic and fuzzy information processing.