ISSN 1673-9418 CODEN JKYTA8
Journal of Frontiers of Computer Science and Technology
1673-9418/2008/02(02)-0212-05
DOI:10.3778/j.issn.1673-9418.2008.02.0010

E-mail:fcst@public2.bta.net.cn
http://www.ceaj.org
Tel:+86-10-51616056

泛逻辑学中UB代数系统的fuzzy滤子*

肖云萍+,邹庭荣

XIAO Yunping+, ZOU Tingrong

华中农业大学 理学院,武汉 430070

College of Science and Technology, Huazhong Agricultural University, Wuhan 430070, China

+ Corresponding author: E-mail: xypzx@mail.hzau.edu.cn

XIAO Yunping, ZOU Tingrong. The fuzzy filters of UB algebras systems in universal logic. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2008,2(2):212-216.

Abstract: The formal deductive system ß of universal logic in the ideal condition has been given in paper [2], UB algebra for universal logic in the ideal condition (h=k=0.5) was introduced in paper [3], and some propertives of UB algebra in universal logic were described in paper [5]. Based on paper [3] and [5], fuzzy filter and quotient algebra in UB algebras are discussed more.

Key words: universal logic; UB-algebras; fuzzy logic; fuzzy filter

摘 要:文献[2]给出了理想状态下泛逻辑学的形式演绎系统ß,证明了此系统是可靠的。文献[3]提出了在理想状态(h=k=0.5)下泛逻辑学对应的代数系统-UB代数。文献[5]研究了泛逻辑学中UB代数系统的若干性质。在文献[3,5]的基础上,进一步讨论了UB代数fuzzy滤子与商代数。

关键词:泛逻辑学;UB代数系统;模糊逻辑;fuzzy滤子

文献标识码:A **中图分类号:**O141.1;O153.1

自从模糊集的概念提出以来，关于模糊系统与模糊推理的研究得到了迅速发展，非经典逻辑已被认为是计算机科学与人工智能处理不确定信息与模糊信息的合适工具[1];为了探索逻辑的一般规律,何华灿提出了泛逻辑学理论[2],该理论通过近几年的研究发展已成为人工智能领域最具活力的研究方向之一；文献[3]以理想状态下泛逻辑学的命题演算形式系统ß为背景，提出了一种泛逻辑代数系统UB-代数。文章在文献[3]的基础上引入了UB代数fuzzy滤子和fuzzy商代数的概念,并进行了详细研究,得到了一些有意义的结果。

* the Huazhong Agricultural University Science Foundation No.52204-02009(华中农业大学科研基金).

Received 2007-06, Accepted 2008-03.

1 基本概念

定义 1[3] 设 M 是$(\to,')$型代数,其中$'$为一元运算,$\to$为二元运算,如果 M 上有偏序$\leqslant$使$(M,\leqslant)$是有界偏序集,$'$是关于$\leqslant$的逆序对合对应,且满足以下条件,任意 $a,b,c\in M$

u-1 $a'\to b'=b\to a$

u-2 $1\to a=a$

u-3 $a\to b\leqslant(b\to c)\to(a\to c)$

u-4 $(a\to b)\to b=(b\to a)\to a$

其中 1 是 M 中最大元,$a\leqslant b$ 当且仅当 $a\to b=1$,称 M 为 UB 代数。

命题 1 [3] 设 M 是 UB 代数,0 是 M 的最小元,1 是 M 的最大元,任意 $a,b,c\in M$,下列结论成立:

u-(1) $a'=a\to 0,a=a'\to 0$

u-(2) $(a\to 0)\to 0=a$

u-(3) $a\to a=1$

u-(4) $a\leqslant(a\to b)\to b$

u-(5) 若 $a\leqslant b$,则 $b\to c\leqslant a\to c$

u-(6) $a\to(b\to c)=b\to(a\to c)$

u-(7) $b\to c\leqslant(a\to b)\to(a\to c)$

u-(8) $a\leqslant b\to a$

u-(9) $((a\to b)\to b)\to b=a\to b$

u-(10) $a'\to b=b'\to a,a\to b'=b\to a'$

定义 2 设 F 是 M 的一个非空子集,称 F 为 M 的一个滤子,如果满足:

(1)$l\in F$

(2)$\forall x,y\in M,x,x\to y\in F\Rightarrow y\in F$

定义 3 设 F 是 M 的一个非空子集,称 F 为 M 的一个关联滤子,如果满足:

(1)$l\in F$

(2)$\forall x,y\in M$,若 $x\to y,x\to(y\to z)\in F\Rightarrow x\to z\in F$

2 UB 代数的 Fuzzy 滤子

定义 4 设 M 是一个 UB 代数,M 的一个 fuzzy 子集 μ 称为 M 的 fuzzy 滤子,如果满足:

F-I)对任意 $x\in M,\mu(x)\leqslant\mu(1)$

F-II)对任意 $x,y\in M,\mu(y)\geqslant\min\{\mu(x\to y),\mu(x)\}$

命题 2 设 μ 为 M 的 fuzzy 滤子,$x,y\in M$,若 $x\leqslant y$,则 $\mu(x)\leqslant\mu(y)$。

证明 由 F-II),$\mu(y)\geqslant\min\{\mu(x\to y),\mu(x)\}=\min\{\mu(x),\mu(1)\}=\mu(x)$。 □

命题 3 设 μ 为 M 的 fuzzy 滤子,则 $x\leqslant y\to z\Rightarrow\mu(z)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(y)\}$。

证明 假设 $x\leqslant y\to z$,则 $\mu(x)\leqslant\mu(y\to z)$,由命题 2

$\mu(z)\geqslant\min\{\mu(y\to z),\mu(y)\}\geqslant\min\{\mu(x),\mu(y)\}$ □

定理 1 设 μ 为 M 的 fuzzy 子集,$\mu\neq\phi$,则 μ 是 M 的 fuzzy 滤子当且仅当对任意 $\lambda\in[0,1]$,若 $\mu_\lambda\neq\phi$,则 μ_λ 是 M 的一个滤子。

下面用 $F(M)$表示 M 上 fuzzy 滤子之集。

定理 2 设 $\mu\in F(M)$是一个 fuzzy 滤子,则 μ 是常值 fuzzy 集当且仅当 μ 满足:

(1)$\mu(0)=\mu(1)$

(2)对任意 $x,y\in M,\mu(x\to y)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(y)\}$

证明 必要性 显然。

充分性 若 μ 满足(1)、(2),则对任意 $x\in M,\mu(x)\leqslant\mu(0)=\mu(1)$,又因为 μ 是滤子,故 $\mu(x)\geqslant\min\{\mu(0\to x),\mu(0)\}=\min\{\mu(0),\mu(1)\}=\min\{\mu(0),\mu(0)\}=\mu(0)$,又 $\mu(x)\leqslant\mu(0)$,所以 $\mu(x)=\mu(0)$,即 μ 为一常值 fuzzy 集。 □

推论 1 (1)若 μ 为 UB 代数 M 的 fuzzy 滤子,$\nu=\{x|x\in M$ 且 $\mu(x)=\mu(1)\}$,则 ν 为 M 的滤子;(2)若 F 为 UB 代数 M 的滤子,则χ_F是 M 的 fuzzy 滤子,这里χ_F为 F 上特征函数。

定理 3 UB 代数 M 的 fuzzy 集 μ 是一个 fuzzy 滤子,当且仅当

$$x\leqslant y\to z\Rightarrow\mu(z)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(y)\} \quad (1)$$

证明 必要性 设 μ 是一个 fuzzy 滤子,对任意 $x,y,z\in M$,设 $x\leqslant y\to z$,由于 μ 是保序的(命题 2)及

F-II),所以$\mu(z)\geqslant\min\{\mu(y\to z),\mu(y)\}\geqslant\min\{\mu(x),\mu(y)\}$。

充分性 设μ为M的fuzzy集,由于$x\leqslant x\to 1$,所以,$\mu(1)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(x)\}=\mu(x)$,由于$x\leqslant(x\to y)\to y$且由式(1),有$\mu(y)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(x\to y)\}$,因此$\mu$为fuzzy滤子。 □

定理4 设μ为M的fuzzy滤子,$\mu[a]=\{x\in M,\mu(a)\leqslant\mu(x)\}$,则$\mu[a]$是$M$的滤子。

证明 显然$1\in\mu[a]$,设$x,y\in M$且$x\to y\in\mu[a]$,$x\in\mu[a]$,则$\mu(a)\leqslant\mu(x\to y)$,且$\mu(a)\leqslant\mu(x)$,由于$\mu$是Fuzzy滤子,由F-II)$\mu(y)\geqslant\min\{\mu(x\to y),\mu(x)\}\geqslant\mu(a)$,所以$y\in\mu[a]$,即$\mu[a]$是$M$的滤子。 □

定理5 设μ为M的fuzzy集,则

(1)若$\mu[a]$是M的滤子,则

$$\mu(z)\leqslant\min\{\mu(x\to y),\mu(x)\}\Rightarrow\mu(z)\leqslant\mu(y) \qquad (2)$$

(2)若μ满足F-I)和式(2),则$\mu[a]$是M的滤子。

证明 (1)假设对任意$a\in M$,$\mu[a]$是M的滤子,又设$x,y,z\in M$使$\mu(z)\leqslant\min\{\mu(x\to y),\mu(x)\}$,则$x\to y\in\mu[z]$和$x\in\mu[z]$,由定义2,$y\in\mu(z)$,即$\mu(z)\leqslant\mu(y)$;(2)设$\mu$满足F-I)和式(2),对每个$a\in M$设$x,y\in M$,使$x\to y\in\mu[a]$及$x\in\mu[a]$,则$\mu(a)\leqslant\mu(x\to y)$和$\mu(a)\leqslant\mu(x)$,这蕴涵$\mu(a)\leqslant\min\{\mu(x\to y),\mu(x)\}$,这样,由式(2)有$\mu(a)\leqslant\mu(y)$,即$y\in\mu[a]$,由于$\mu$满足F-I)即$1\in\mu[a]$,故$\mu[a]$是$M$的滤子。 □

定理6 设M是一个UB代数,μ是M的fuzzy滤子,定义M上一个二元关系"$\backsim_\mu$":$x\backsim_\mu y$当且仅当$\mu(x\to y)>0$且$\mu(y\to x)>0$,则"$\backsim_\mu$"是一个等价关系。

证明 (1)因为$\mu\neq\phi$且$\mu(x)\leqslant\mu(1)$,于是,对任意$x\in M$,$\mu(x\to x)=\mu(1)>0$,即$x\backsim_\mu x$;

(2)$x,y\in M$,若$x\backsim_\mu y$则$y\backsim_\mu x$显然成立;

(3)$x,y,z\in M$,若$x\backsim_\mu y$,$y\backsim_\mu z$,则由u-(6)

$(x\to y)\to((y\to z)\to(x\to z))=(x\to y)\to(x\to((y\to z)\to z)=(x\to y)\to(x\to(y\vee z))=1$

可知,$\mu((x\to y)\to((y\to z)\to(x\to z)))>0$,又因$\mu(x\to x)>0$,故

$\mu((y\to z)\to(x\to z))\geqslant\min\{\mu((x\to y)\to((y\to z)\to(x\to z))),\mu(x\to y)\}>0$

再由$\mu(y\to x)>0$,即得

$\mu(x\to z)\geqslant\min\{\mu((y\to z)\to(x\to z)),\mu(y\to z)\}>0$

所以$\mu(x\to z)>0$;类似可证$\mu(z\to x)>0$;故$x\backsim_\mu z$。 □

定理7 对于等价关系"$\backsim_\mu$",下列式子成立:

(1)对任意$x,y\in M$,设$x\backsim_\mu x'$,$y\backsim_\mu y'$,若$x\backsim_\mu y$,则$x'\backsim_\mu y'$;

(2)对任意$x,y,z\in M$,若$x\backsim_\mu y$则$x\to z\backsim_\mu y\to z$且$z\to x\backsim_\mu z\to y$;

(3)对任意$x_1,y_1,x_2,y_2\in M$,若$x_1\backsim_\mu y_1$,$x_2\backsim_\mu y_2$则$x_1\to x_2\backsim_\mu y_1\to y_2$。

证明 显然,对于等价关系"$\backsim_\mu$",令$[x]_\mu=\{y|y\in M$,且$y\backsim_\mu x\}$;$M/\mu=\{[x]_\mu|x\in M\}$,$[x]_\mu{}'=[x']_\mu$,$[x]_\mu\to[y]_\mu=[x\to y]_\mu$。 □

定理8 令$[x]_\mu=\{y|y\in M$且$y\backsim_\mu x\}$,$M/\mu=\{[x]_\mu|x\in M\}$,在M中规定:$[x]_\mu\to[y]_\mu=[x\to y]_\mu$,则$(M/\mu,\to,',[0]_\mu,[1]_\mu)$是一个UB代数,称为由$\mu$诱导的UB-商代数。

3 UB代数的fuzzy关联滤子

定义5 设M是一个UB代数,M的一个fuzzy子集μ称为M的fuzzy关联滤子,如果满足:

F-I)对任意$x\in M$,$\mu(x)\leqslant\mu(1)$

F-III)对任意$x,y,z\in M$,$\mu(x\to z)\geqslant\min\{\mu(x\to(y\to z),\mu(x\to y)\}$

定理9 设M是一个UB代数,μ是M的fuzzy关联滤子,则μ是M的fuzzy滤子。反之不成立。

证明 1)因为μ是M的fuzzy关联滤子,故对$x\in M$,$\mu(x)\leqslant\mu(1)$,又对任意$x,y\in M$,$\mu(1\to y)\geqslant\min\{\mu(1\to(x\to y)),\mu(1\to x)\}$和$1\to x=x$,即$\mu(y)\geqslant\min\{\mu(x\to y),\mu(x)\}$,故$\mu$为$M$的fuzzy关联滤子。(2)举例说明fuzzy滤子不一定是fuzzy关联滤子。

例 设 $M=\{0,a,b,c,1\}$,定义运算如下:

Table 1

表 1

x	x'
0	1
a	c
b	b
c	a
1	0

Table 2

表 2

→	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	c	1	1	1	1
b	b	c	1	1	1
c	a	b	c	1	1
1	0	a	b	c	1

容易验证$(M,',\rightarrow)$为一个 UB 代数,定义μ:$\mu(1)>\mu(x),x\in M-\{1\}$。则$\mu$为 M 的一个 fuzzy 滤子,但μ不是 fuzzy 关联滤子,事实上:

$\mu(a\rightarrow 0)<\min\{\mu(a\rightarrow(b\rightarrow 0)),\mu(a\rightarrow b)\}$,即 F-III)不满足。 □

类似于定理 1 有:

定理 10 设$\mu\in F(M)$,$\mu\neq\phi$,则μ是 M 的 fuzzy 关联滤子的充分必要条件是对任意$\lambda\in[0,1]$,若$\mu_\lambda\neq\phi$,则μ_λ是 M 的一个关联滤子。

推论 (1)若μ为 M 的 fuzzy 滤子,$\nu=\{x|x\in M$ 且 $\mu(x)=\mu(1)\}$,则ν为 M 的关联滤子。(2)若 F 为 M 的关联滤子,则χ_F是 M 的 fuzzy 关联滤子,这里χ_ν为 F 上特征函数。

定理 11 设$(M,',\rightarrow)$为一个 UB 代数,$a\in M$,μ为 M 的 fuzzy 关联滤子,$\mu[a]=\{x\in M,\mu(a)\leqslant\mu(x)\}$,则$\mu[a]$是 M 的关联滤子。

证明 设 $x,y,z\in M$,使 $x\rightarrow(y\rightarrow z)\in\mu[a]$且 $x\rightarrow y\in\mu[a]$,则$\mu(a)\leqslant\mu(x\rightarrow(y\rightarrow z))$和$\mu(a)\leqslant\mu(x\rightarrow y)$,由定义 5 F-III)有$\mu(x\rightarrow z)\geqslant\min\{\mu(x\rightarrow(y\rightarrow z)),\mu(x\rightarrow y)\}\geqslant\mu(a)$,即 $x\rightarrow z\in\mu[a]$,因此$\mu[a]$为 M 的关联滤子。 □

定理 12 若μ为 M 的 fuzzy 滤子,满足对任意 $x,y,z\in M$

$$\mu(y\rightarrow z)\geqslant\min\{\mu(x\rightarrow(y\rightarrow(y\rightarrow z))),\mu(x)\} \quad (3)$$

则μ为 M 的 fuzzy 关联滤子。

证明 由 u-(6):注意 $x\rightarrow(y\rightarrow z)=y\rightarrow(x\rightarrow z)$,又由于$\mu$是保序的,所以由式(3)有

$$\mu(x\rightarrow z)\geqslant\min\{\mu((x\rightarrow y)\rightarrow(x\rightarrow(x\rightarrow z))),\mu(x\rightarrow y)\}\geqslant\min\{\mu(x\rightarrow(y\rightarrow z)),\mu(x\rightarrow y)\}$$

因此μ为 M 的 fuzzy 关联滤子。 □

定理 13 若μ为 M 的 fuzzy 滤子,则下列条件等价(对任意 $x,y,z\in M$):

(1)μ为 M 的 fuzzy 关联滤子;

(2)$\mu(x\rightarrow y)\geqslant\mu(x\rightarrow(x\rightarrow y))$;

(3)$\mu((x\rightarrow y)\rightarrow(x\rightarrow z))\geqslant\mu(x\rightarrow(y\rightarrow z))$。

证明 (1)⇨(2):设μ为 M 的 fuzzy 关联滤子,由定义 4 及 u-2,有

$$\mu(x\rightarrow y)\geqslant\min\{\mu(x\rightarrow(x\rightarrow y)),\mu(x\rightarrow x)\}=\min\{\mu(x\rightarrow(x\rightarrow y)),\mu(1)\}=\mu(x\rightarrow(x\rightarrow y))$$

(2)⇨(3):设(2)适合,及 $x,y,z\in M$,由 u-(6)和 u-3,有 $x\rightarrow(y\rightarrow z)\leqslant x\rightarrow((x\rightarrow y)\rightarrow(x\rightarrow z))$,由于$\mu$是保序的,由 u-(6)及(2)得

$$\mu((x\rightarrow y)\rightarrow(x\rightarrow z))=\mu(x\rightarrow((x\rightarrow y)\rightarrow z))\geqslant\mu(x\rightarrow(x\rightarrow((x\rightarrow y)\rightarrow z)))=\mu(x\rightarrow((x\rightarrow y)\rightarrow(x\rightarrow z)))\geqslant\mu(x\rightarrow(y\rightarrow z))$$

(3)⇨(1):设(3)适合,则

$$\mu(x\rightarrow z)\geqslant\min\{\mu((x\rightarrow y)\rightarrow(x\rightarrow z)),\mu(x\rightarrow y)\} \quad (\text{由}(2))$$

$$\geqslant\min\{\mu(x\rightarrow(y\rightarrow z)),\mu(x\rightarrow y)\} \quad (\text{由}(3))$$

因此,设μ为 M 的 fuzzy 关联滤子。 □

References:

[1] Pavelka J. On fuzzy logic I[J]. Z Math Logic Grund Math, 1979,25:45.

[2] He Huacan. Principium of universal logic[M]. Beijing: Science Press, 2001.

[3] Luo Minxia, He Huacan. A algebras system of universal logic[J]. Computer Engineering and Applications, 2005,41(14):21-22.

[4] Zou Tingrong. A note on the M-R open problem [J]. Acta Mathematica Sinica, 2000(3).

[5] Xiao Yunping, Zou Tingrong. Some property of UB-Algebra system in universal logic[J]. Computer Engineering and Applications. 2007,43(21):72-74.

[6] Zou Tingrong. Vartity of Commutative BCK-Algebras is Z-Based[J]. The Southeast Asian Bulletin of Math, 2000(23).

[7] Xiao Yunping, Zou Tingrong. On fuzzy BCC-ideals and quotient BCC-algebra induced by a fuzzy BCC-ideal[J]. The Southeast Asian Bulletin of Math, 2006(30):165-175.

[8] Zou Tingrong, Xiao Yunping. Filters of FI-algebras[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2003(3).

[9] Zou Tingrong. PFI-algebras and its P-filters[J]. Math Magazine, 2000(3).

[10] Xiao Yunping, Zou Tingrong. *N*-semisimple algebra and implication algebra[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2006,1:99-102.

附中文参考文献:

[2] 何华灿.泛逻辑学原理[M].北京:科学出版社,2001.

[3] 罗敏霞,何华灿.一种泛逻辑代数系统[J].计算机工程与应用,2005,41(14):21-22.

[4] 邹庭荣.关于 M-R 公开问题的注记[J].数学学报,2000(3).

[5] 肖云平,邹庭荣.泛逻辑学中 UB 代数系统的若干性质[J].计算机工程与应用,2007,43(21):72-74.

[8] 邹庭荣 肖云平.FI 代数的滤子[J].模糊系统与数学,2003(3).

[9] 邹庭荣.PFI 代数及其 P 滤子[J].数学杂志,2000(3).

[10] 肖云萍,邹庭荣.*N*-半单代数与蕴涵代数[J].模糊系统与数学,2006,1:99-102.

XIAO Yunping was born in 1959. She received her B.S. degree from Tibet University, and now is an associate professor in department of computer science at Huazhong Agricultural University. Her reasearch interests include artificial intelligence and fuzzy logic.

肖云萍(1959-),女,四川绵阳人,1982 年于西藏大学获学士学位,现为华中农业大学计算机科学系副教授,研究方向:人工智能、模糊逻辑。

ZOU Tingrong was born in 1955. He graduated from Huazhong Normal University in mathematics, and now is a professor in department of mathematics and information science at Huazhong Agricultural University. His reasearch interests include fuzzy algebra and fuzzy logic.

邹庭荣(1955-),男,湖北荆门人,1978 年于华中师范大学数学系毕业,现为华中农业大学数学与信息科学系教授,研究方向:模糊代数、模糊逻辑。