2001年2月
第31卷第1期

西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)

Feb. 2001
Vol. 31 No.1

凸单叶调和映射的Fréchet可微泛函的极值问题

王晓瑛

(西北大学 数学系,陕西 西安 710069)

摘要:借助一种变分方法,研究了凸单叶调和映射上具有Fréchet可微泛函的极值问题,得到极值函数的必要条件。

关 键 词:凸单叶调和映射; Fréchet可微泛函; 变分方法

中图分类号:O174.5 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274X(2001)01-0009-02

1 凸单叶调和映射

若u,v是区域$D\subset C$(有限复平面)内的实调和函数,则称$f=u+\mathrm{i}v$是D内的复调和函数(u,v不一定互为共轭,即f不一定解析)。若D是单连通区域,则f可以表示为$f=h+\overline{g}$,这里$h,g\in H(D)$($H(D)$指D上全体解析函数构成的集合)。又若f是双方单值,$f(D)$是一个凸域,则称f是凸单叶调和映射。

设$U=\{z:|z|<1\}$,$\partial U=T$,Δ是有限复平面上的凸域,Δ的边界Γ是一条约当曲线,且$0\in\Delta$,Γ的极坐标方程为$W=R(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$。$\varphi:T\to\Gamma$是一个保向的单调边界函数,且至少有3个非共线值,从而φ可表示为

$$\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=R(\theta(t))\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}。$$

其中$\theta:[0,2\pi]\to R$是单调增加左连续函数,且$\theta(2\pi-0)-\theta(0)\leqslant 2\pi$,我们称这样的函数$\theta$为圆周映射,用$K$表示全体圆周映射构成的集合。

令
$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z|^2}\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z|^2}R(\theta(t))\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}\mathrm{d}t,\qquad(1)$$

则由文献[1]知f是U到Δ上的凸单叶保向调和映射。用$F(\Delta)$表示所有由式(1)确定的U到Δ上的调和映射全体,由Helly选择定理,$F(\Delta)$是一个紧的正规族,从而$F(\Delta)$上的实值连续泛函可以达到最大值。

2 Fréchet可微泛函

设J为$F(\Delta)$上的复值连续泛函,如果对某$f\in F(\Delta)$以及f的任意变分

$$f_\varepsilon=f+g\varepsilon+o(\varepsilon),\quad \varepsilon\to 0,$$

存在$F(\Delta)$上的线性连续泛涵$L=L(f\cdot)$使得

$$J(f_\varepsilon)=J(f)+\varepsilon L(f\cdot g)+o(\varepsilon),\varepsilon\to 0。$$

称J在f相对于$F(\Delta)$为Fréchet可导,L称为J在f的Fréchet导数。

3 极值函数的必要条件

定 理 设Δ是由约当曲线Γ围成的凸域,$0\in\Delta$,Γ的极坐标方程为$W=R(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,其中$R$具有连续的二阶导数,$J$是$F(\Delta)$上的复值连续泛函,且$\mathrm{Re}J(f)=\max\limits_{g\in F(\Delta)}\mathrm{Re}\{J(g)\}$,$J$在$f$关于$F(\Delta)$具有Fréchet导数$L$,$\theta$表示$f$对应的圆周映射,从而

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z|^2}R(\theta(t))\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}\mathrm{d}t。$$

令
$$G(t)=l(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}[R'(\theta(t))+\mathrm{i}R(\theta(t))],$$
$$l(t)=\frac{1}{2\pi}L\left[\frac{1-|z|^2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z|^2}\right],$$

则极值函数f对应的圆周映射θ满足以下条件:①当$\mathrm{Re}\{G\}$在某区间上符号不变时,θ在此区间上为常数;②$\mathrm{Re}\{G\}$在θ的任何两个跳跃点之间积分值为零。

证 明 因为$F(\Delta)$是一个紧的正规族,J是$F(\Delta)$上的复值连续泛函,所以在$F(\Delta)$上可达到

收稿日期:1999-10-02

作者简介:王晓瑛(1964-)女,陕西咸阳人,西北大学讲师,从事复变函数数学研究。

$\mathrm{Re}\{J\}$ 的最大值。设 $f\in F(\Delta)$，且 $\mathrm{Re}J(f)=\max\limits_{g\in F(\Delta)}\mathrm{Re}\{J(g)\}$，$f$ 对应的圆周映射为 $\theta(t)$，其中 $0\leqslant\theta<2\pi$，所以

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}R(\theta(t))e^{i\theta(t)}dt。$$

现在我们假设构造 θ 的一个变分族 $\theta^*\in K$。

$$\theta^*=\theta+\varepsilon\eta+o(\varepsilon^2)。\tag{2}$$

其中 $|\varepsilon|$ 是充分小的实数，对应于 θ^* 的调和函数为

$$f^*(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}R(\theta^*(t))e^{i\theta^*(t)}dt。$$

因为 $R(\theta)$ 具有连续的二阶导数，所以

$$R(\theta^*(t))=R(\theta(t))+\varepsilon R'(\theta(t))\eta+o(\varepsilon^2),$$

$$e^{i\theta^*(t)}=e^{i\theta}[1+i\varepsilon\eta+o(\varepsilon^2)]。$$

于是 $f^*(z)=f(z)+\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}[R'(\theta(t))+iR(\theta(t))]\eta e^{i\theta(t)}dt+o(\varepsilon^2)$，

$$J(f^*)=J(f)+\varepsilon\int_0^{2\pi}l(t)[R'(\theta(t))+iR(\theta(t))]\eta(t)e^{i\theta(t)}dt+o(\varepsilon^2),$$

$$J(f^*)=J(f)+\varepsilon\int_0^{2\pi}G(t)\eta(t)dt+o(\varepsilon^2)。\tag{3}$$

如果式(2)中的 ε 既可取正值又可取负值，结合 $\mathrm{Re}J(f^*)\leqslant\mathrm{Re}J(f)$ 由式(3)可得

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\{G(t)\}\eta(t)dt=0,\tag{4}$$

这样就得到极值的必要条件。

下面我们构造 θ 的变分，θ 的变分分两种情况。

1) 跳跃变分。设圆周映射 $\theta(t)\in K$，$\theta(t)$ 在 a,b 两点不连续，即 a,b 是跳跃点，$0\leqslant a<b<2\pi$，$\chi(t)$ 为 $(a,b]$ 上特征函数，则对于充分小的 $|\varepsilon|$，定义 θ^* 为

$$\theta^*=\theta+\varepsilon\chi,\tag{5}$$

从而 θ^* 仍为圆周映射。

2) 普通变分。设 a,b 是 $\theta(t)$ 的跳跃点，$\chi(t)$ 为 $(a,b]$ 上特征函数，如果 $\theta(t)$ 在 (a,b) 内不为常数，定义

$$\theta^+(t)=\chi(t)[\theta(b)-\theta(t)]\geqslant 0;$$

$$\theta^-(t)=\chi(t)[\theta(a)-\theta(t)]\leqslant 0。$$

因为 θ 在 (a,b) 内不为常数，所以在 a 的附近 $\theta^+(t)>0$；在 b 的附近 $\theta^-(t)<0$。对于 $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$，可证明

$$\theta_+^*=\theta+\varepsilon\theta^+,\tag{6}$$

$$\theta_-^*=\theta+\varepsilon\theta^-,\tag{7}$$

都是圆周映射。

现设 $\mathrm{Re}\{J\}$ 在 f 上取得最大值，$\mathrm{Re}\{J(f)\}=\max\limits_{g\in F(\Delta)}\mathrm{Re}\{J(g)\}$，$f$ 对应的圆周映射为 θ，如果 $\theta(t)$ 在 a,b 两点不连续，则由跳跃变分式(5)和式(4)得

$$\int_a^b\mathrm{Re}\{G(t)\}dt=0,$$

即在 θ 的任两个跳跃点之间 $\mathrm{Re}\{G(t)\}$ 积分值为零。

如果 $\theta(t)$ 在 (a,b) 内不为常数且 $\mathrm{Re}\{G\}>0$，由普通变分法式(6)和式(3)得

$$J(f^*)=J(f)+\varepsilon\int_a^bG(t)\theta^+(t)dt+0(\varepsilon^2)。\tag{8}$$

因为 θ^+ 非负且在 a 附近的区间上 $\theta^+>0$，对充分小 $\varepsilon>0$，式(8)成立，则 $\mathrm{Re}\{J(f^*)\}\geqslant\mathrm{Re}\{J(f)\}$ 与已知矛盾。如果 θ 在 (a,b) 内不为常数且 $\mathrm{Re}\{G\}<0$，用类似方法可得出矛盾，故当 $\mathrm{Re}\{G\}$ 在某区间上符号不变时，θ 在此区间上为常数。

本文得到张玉林教授的悉心指导，在此表示衷心感谢。

参考文献：

[1] DUREN P, SCHOBER G. A variational method for harmonic mapping onto convex regions[J]. Complex Variables Theory Appl, 1987,9:153-168.

(编 辑 曹大刚)

The extremal problem of Fréchet differential functionals for convex univalent harmonic mappings

WANG Xiao-ying
(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: By a variational method, studing the extremal problem of Fréchet differential functionals for convex univalent harmonic mappings, the necessary conditon are obtained for the extremal functions.

Key words: convex univalent harmonic mapping; Fréchet differential functional; variational method