第 29 卷第 3 期　　温 州 大 学 学 报 · 自 然 科 学 版　　2008 年 6 月
Vol 29, No 3　　Journal of Wenzhou University · Natural Sciences　　Jun, 2008

自相似过程的遍历性及相关函数的性质

邓晚霞，钱能生

（五邑大学数学物理系，广东江门　529020）

摘　要：设 $\{X(t),\ t\ge 0\}$ 是指数 H (>0) 型的自相似过程，给出了其相关函数的一些性质．并且当 $\{X(t),\ t\ge 0\}$ 为均方连续的自相似过程时，给出了其均值和相关函数遍历性的定义，然后获得了它们的遍历性定理．

关键词：自相似过程；相关函数；遍历性

中图分类号：O211　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006-0375(2008)03-0001-06

1 基本定义

1962 年 Lamperti[1]证明了如下重要的结论：如果 Y 是一个平稳增量过程，对于某个正函数 C，当 $a\to\infty$ 时，$\left[C(a)\right]^{-1}Y(at)$ 的有穷维分布收敛于某个 X 的有穷维分布，则此 X 是平稳增量的自相似过程．自上世纪 80 年代开始有很多文章讨论了这种过程的一些性质[2-5]，钱能生教授进一步研究了这一过程的边缘分布[6]．本文将侧重讨论自相似过程的遍历性及相关函数的性质．

称一个实值随机过程 $\{X(t),\ t\ge 0\}$ 是指数 $\mathrm{H}(>0)$ 型的自相似过程，若其满足 $X(at)\underline{\underline{d}}a^{H}X(t)$，$\forall a>0$．记号 $\underline{\underline{d}}$ 表示它两边的过程有相同的有限维分布．若其还满足：$X(b+t)-X(b)\underline{\underline{d}}X(t)-X(0)$，$\forall b>0$，则称 X 是指数 $\mathrm{H}(>0)$ 型平稳增量的自相似过程．

设 $\{X(t),\ t\ge 0\}$ 是自相似过程，它的相关函数为 $R_X(t_1,t_2)$．因为 $R_X(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)X(t_2)\right]=E\left[t_1^{\,H}X(1)X(t_2)\right]=E\left[X(1)X(t_1t_2)\right]$，所以 $R_X(t_1,t_2)$ 只与 t_1,t_2 的乘积 (t_1t_2) 有关，记为 $R_X(t_1t_2)$ 或 $R_X(t,\frac{h}{t})=E\left[X(t)X\left(\frac{h}{t}\right)\right]=R_X(h)$．

定义　设 $\left\{X(t),t\ge 0\right\}$ 为均方连续的自相似过程．

（i）如果均方极限 $\lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt$ 存在，则称此极限为 $X(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上时间均值；又若 $\lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{T}\int_0^T X(t)=E\left[X(t)\right]=\mu$，则称过程 $X(t)$ 的均值具有遍历性或各态历经性．

收稿日期：2007-07-21

作者简介：邓晚霞(1979-)，女，湖南道县人，硕士研究生，研究方向：概率论

（ii）如果均方极限 $\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)X\left(\frac{h}{t}\right)dt$ 存在，则称此极限为 $X(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上时间相关函数；又若 $\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)X\left(\frac{h}{t}\right)=E\left[X(t)X\left(\frac{h}{t}\right)\right]=R_X(h)$，（$t\neq 0$），则称过程 $X(t)$ 的相关函数具有遍历性或各态历经性.

（iii）如果 $X(t)$ 的均值和相关函数都具有各态历经性，则称 $X(t)$ 是各态历经的.

2 主要定理及证明

2.1 相关函数的性质

定理 1 （i） $R_X(1)\geq 0$， $R_X(h)=h^H R_X(1)$ ， $R_X\left(\frac{1}{h}\right)=h^{-2H}R_X(h)$；

（ii） $R_X(h)$ 是非负定的，即对任意 $2n$ 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及 $h_1,h_2,\cdots,h_n$ 有

$$\sum_{i,j=1}^{n}R_X(h_ih_j)a_ia_j\geq 0 .$$

证明：（i）由定义容易得到.

（ii） $$\sum_{i,j=1}^{n}R_X(h_ih_j)a_ia_j=\sum_{i,j=1}^{n}E\left[X(h_i)X(h_j)\right]a_ia_j=E\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_iX(h_i)a_jX(h_j)\right]$$

$$=E\left|\sum_{i=1}^{n}a_iX(h_i)\right|^2\geq 0$$

定理 2 若自相似过程 $\{X(t),t\geq 0\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上均方连续，则它的相关函数 $R_X(h)$ 在 $(0,+\infty)$ 上处处连续.

证明：对任一 h，（$0<h<+\infty$）因为

$$\left|R_X(h+t)-R_X(h)\right|=\left|E\left[X(1)X(h+t)\right]-E\left[X(1)X(h)\right]\right|$$

$$=\left|E\left\{X(1)\left[X(h+t)-X(h)\right]\right\}\right|$$

$$\leq\sqrt{E\left|X(1)\right|^2}\cdot\sqrt{E\left|X(h+t)-X(h)\right|^2}\to 0(t\to 0)$$

所以 $R_X(h)$ 在 $(0,+\infty)$ 处处连续.

定理 3 设自相似过程 $\{X(t),t\geq 0\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上均方可微，则相关函数 $R_X(h)$ 在任一点 $h\in(0,+\infty)$ 二次可导．并有

（i） $R_X'(h)=\frac{1}{h}E\left[X'(1)X(h)\right]$；

（ii） $R_X''(h)=\frac{1}{h}E\left[X'(1)X'(h)\right]-\frac{1}{h}E\left[X'(1)X(h)\right]$.

证明：（i）令 $ht=t'$

$$E\left[X'(1)X(h)\right]=E\left[\lim_{t\to 0}\frac{X(1+t)-X(1)}{t}\cdot X(h)\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}E\left[\frac{X(1+t)-X(1)}{t}\cdot X(h)\right]=\lim_{t\to 0}\frac{R_X(h+ht)-R_X(h)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}h\cdot\frac{R_X(h+ht)-R_X(h)}{ht}=h\cdot\lim_{t'\to 0}\frac{R_X(h+t')-R_X(h)}{t'}$$

$$=hR_X'(h)$$

即 $$R_X'(h)=\frac{1}{h}E\left[X'(1)X(h)\right]$$

（ii）类似地，有

$$E\left[X'(1)X'(h)\right]=E\left[X'(1)\lim_{t\to 0}\frac{X(h+t)-X(h)}{t}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}E\left[X'(1)\cdot\frac{X(h+t)-X(h)}{t}\right]$$（由定理 3 之（i）得）

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(h+t)\cdot R_X'(h+t)-h\cdot R_X'(h)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(h+t)R_X'(h+t)-(h+t)R_X'(h)+(h+t)R_X'(h)-hR_X'(h)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(h+t)\left[R_X'(h+t)-R_X'(h)\right]}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{\left[(h+t)-h\right]R_X'(h)}{t}$$

$$=hR_X''(h)+R_X'(h)$$

即 $$R_X''=\frac{1}{h}E\left[X'(1)X'(h)\right]-\frac{1}{h}E\left[X'(1)X(h)\right]$$

定理4 设$\left\{X(t),t\geq 0\right\}$为零均值均方可积自相似过程，$f(t)$为$(0,+\infty)$上的分段连续函数，则对任意有限区间$[a,b]$，$\int_a^b f(t)X(t)dx$存在，且对任一分段连续函数$g(t)$，有

$$C\mathrm{ov}\left[\int_a^b f(s)X(s)ds,\int_a^b g(t)X(t)dt\right]=\int_a^b\int_a^b f(s)g(t)R_X(st)dsdt\ .$$

证明：因$E\left[f(s)f(t)X(s)X(t)\right]=f(s)f(t)R_X(st)$在区域$[a,b]\times[a,b]$上可积，由均方可积准则知：$\int_a^b f(t)X(t)dt$存在，同理$\int_a^b g(t)X(t)dt$存在.

$$\because E\left[X(t)\right]\equiv 0$$

$$\therefore C\mathrm{ov}\left[\int_a^b f(s)X(s)ds,\int_a^b g(t)X(t)dt\right]=E\left[\int_a^b f(s)X(s)ds\int_a^b g(t)X(t)dt\right]$$

$$=\int_a^b\int_a^b f(s)g(t)R_X(st)dsdt$$

特别地，当 $f(t) \equiv g(t) \equiv 1$，且 $X(t)$ 为实时．则有

$$C\mathrm{ov}\left[\int_a^b X(s)ds, \int_a^b X(t)dt\right] = \int_a^b \int_a^b R_X(st)dsdt .$$

2.2 遍历性

定理 5　设 $\left\{X(t), t > 0\right\}$ 是均方连续的自相似过程，则 $X(t)$ 的均值具有遍历性的充要条件是 $\lim\limits_{T \to +\infty} \frac{1}{T^2} \int_0^{T^2} \left[R_X(h) \ln \frac{T^2}{h} - \quad {}^{2}\right] dh = 0$

ERROR: rangecheck
OFFENDING COMMAND: string

STACK:

66038
33018
32512
33019