一类非线性自治系统的极限环研究

张金波，刘蕊洁，刘　锐

（兰州交通大学数理与软件工程学院，甘肃兰州　730070）

摘　要：研究了一类非线性自治系统的极限环问题，应用常微分方程定性理论，对该系统的平衡点进行了分析，得到了极限环存在唯一性的充分条件.

关键词：非线性自治系统；平衡点；极限环；唯一性

中图分类号：O175.12　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1674-3563(2009)01-0005-04

DOI：10.3875/j.issn.1674-3563.2009.01.02　　本文的 PDF 文件可以从 xuebao.wzu.edu.cn 获得

对于系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x) - P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + Q(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

的定性研究，近些年来有不少的结果．文献[1]讨论了当 $f(x) = bx^2(k-x)$，$P(x,y) = \beta xy - h$，$Q(x,y) = dxy$ 和 $f(x) = bx^2(k-x)(N-x)^{-1}$ 的情形；文献[2]则讨论了 $f(x) = x^2(a-cx^2)$，$P(x,y) = bxy$，$Q(x,y) = (\beta x - ry)r$ 的情形．另外，文献[3]，文献[4]也分别就 $f(x)$，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 的不同情形进行了讨论．而对于 $f(x) = -ax^3 + a(b+L)x^2 - abLx$，$P(x,y) = bxy$，$Q(x,y) = \beta xy - ry^2$ 的系统的研究目前还未见报道．故本文拟研究系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ax^3 + a(b+L)x^2 - abLx - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + \beta xy - ry^2 \end{cases} \tag{2}$$

其中：x，y 意义与文献[1]和[2]中的相同，a，b，c，β，r 均为参数，L 为正常数，$L>0$ 且充分小．基于系统的生态意思，只在 $\overline{R} = \{(x,y) \mid x \ge 0, y \ge 0\}$ 中讨论[5].

令 $x_1 = \dfrac{\beta}{c}x$，$y_1 = \dfrac{r}{c}y$，$t = \dfrac{d\tau}{c}$，并且用 x，y，t 代替 x_1，y_1，τ，系统（2）则化为：

$$\begin{cases} \dot{x} = -a_3x^3 + a_2x^2 - a_1x - a_0xy \\ \dot{y} = y(-1 + x - y) \end{cases} \tag{3}$$

收稿日期：2008-05-21

作者简介：张金波（1983- ），男，河南焦作人，硕士研究生，研究方向：非线性控制

其中：$a_3=\dfrac{ac}{\beta^2}$，$a_2=\dfrac{a(k+L)}{\beta}$，$a_1=\dfrac{akL}{c}<0$，$a_0=\dfrac{b}{r}>0$．

1 平衡点分析

易得系统（3）的平衡点为：$O(0,0)$，$R(x_0,0)$与$S(x_1,y_1)$．其中：$x_0=\dfrac{a_2+\sqrt{a_2^2-4a_1a_3}}{2a_3}$，$x_1=\dfrac{a_2-a_0+\sqrt{\Delta}}{3a_3}$，$y_1=x_1-1$，$\Delta=(a_2-a_0)^2-4a_3(a_1-a_0)$．

当$a_0-a_2+2a_3<0$时，系（3）在$\overline{R}$内无正平衡点，故在$\overline{R}$内无极限环．当$a_0-a_2+2a_3\neq 0$且$a_2-a_3-a_1>0$时，$S(x_1,y_1)$为系统（3）唯一正平衡点.

定理 1　1）$O(0,0)$为系统（3）的鞍点．2）当$a_2-a_3-a_1>0$且$a_2\neq 2a_3$时，$R(x_0,0)$为系统（3）的鞍点；当$a_2-a_3-a_1<0$时，$R(x_0,0)$为系统（3）的稳定鞍点．3）$a_2-a_3-a_1>0$，$a_0-a_2+2a_3\neq 0$　且$a_0<\psi$　时，$S(x_1,y_1)$　为系统（3）稳定的焦点或结点；而当$a_2-a_3-a_1>0$，$a_0-a_2+2a_3\neq 0$且$a_0>\Phi$时，$S(x_1,y_1)$为系统（3）不稳定的焦点或结点．其中：$\psi=\sqrt{\Delta}+1-\dfrac{2a_3}{a_2-a_0+\sqrt{\Delta}}$.

证明：1)，2）易得．下证 3).

系统（3）在$S(x_1,y_1)$的特征方程为$\lambda^2+p\lambda+q=0$．其中：

$$p=x_1(m+1-a_0-\frac{1}{x_1})$$

$$q=\sqrt{(a_2-a_0)^2-4a_3(a_1-a_0)}\cdot x_1y_1$$

当$a_0-a_2+2a_3\neq 0$时，$p>0$，$q>0$，则$S(x_1,y_1)$为稳定的焦点或结点；当$p<0$，$q>0$时，$S(x_1,y_1)$为不稳定的焦点或结点.

定理 1 得证.

2 极限环存在唯一性

定理 2　当$p<0$时，系统（2）在$\overline{R}$内奇点的外围至少存在一个极环点.

证明：作L_1：$y=-\dfrac{a_3}{a_0}x^2+\dfrac{a_2}{a_0}-\dfrac{a_1}{a_0}$，$L_2$：$y=x-1$，两者交于$S(x_1,y_1)$．过$x$轴无穷远点$P$作$x$轴的垂线交$L_2$于$Q$点，过$Q$点作$y$轴的垂线交$y$轴于$R$点．在直线$PQ$上，有$\dfrac{dx}{dt}<0$，在直线$RQ$上有$\dfrac{dy}{dt}<0$，$x$轴$y$轴为积分曲线．故弧线$OPQR$构成一个 Bendixson 区域的外境界限，其上向量场方向如图 1．又由定理 1 知，S不稳定，故由 Bendixson 环域定理[6]知系统（2）

在 $\overline{R}$ 内的奇点 S 外至少有一个极限环.

定理 2 得证.

定理 3　若 $a_0>0$，且 $m<a_2<M$，则系统（3）在区域 $\overline{R}$ 内有唯一稳定极限环．其中：

$$m=\min\{a_0+2a_3-\sqrt{\Delta},\ \frac{a_3(1+2a_1-2a_0)^2-a_1(2a_0-a_2-1)}{(a_0-a_1-1)(2a_0-a_2-1)}\}$$

$$M=\max\{a_0,2a_0-1\}.$$

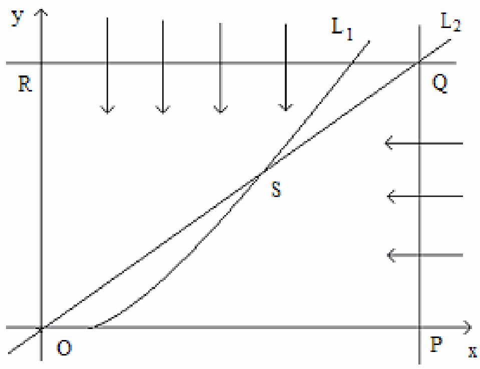

图 1　向量场方向

Fig 1　Direction of Vector Field

证明：将系统（3）改写为

$$\begin{cases}\dot{x}=f_0(x)-f_1(x)y\\ \dot{y}=g_1(x)y+g_2(x)y^2\end{cases}\qquad(4)$$

其中：$f_0(x)=-a_3x^3+a_2x^2-a_1x$，$f_1(x)=a_0x$，$g_1(x)=x-1$，$g_2(x)=-1$．作非奇异变换：$\eta=f_0(x)-f(x)y$，$\nu=\eta e^{\int_{x_1}^{x}\varphi_2(x)ds}$，$d\tau=e^{(-\int_{x_1}^{x}\varphi_2(s)ds)dt}$，$\mu=\nu-f_0(x)e^{\int_{x_1}^{x}\varphi_2(s)ds+f_0(x_1)}$，则系统（4）化为：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\mu+f_0(x)e^{\int_{x_1}^{x}\varphi_2(s)ds-f_0(x_1)}\\ \dfrac{dy}{dt}=(g_1+\dfrac{f_0g_2}{f_1})e^{\int_{x_1}^{x}\varphi_2(s)ds(\mu-f_0(x_1))}\end{cases}\qquad(5)$$

区域 $\overline{R}$ 变为 $x>0$，$\mu<f_0(x_1)$．在此区域内再作非奇异变换：$y=\ln(1-\dfrac{\mu}{f_0(x_1)})$，$x=x$，$f_0(x_1)d\tau=-dt$，则系统（5）化为：

$$\begin{cases}\dot{x}=\Phi(y)-F(x)\\ \dot{y}=-g(x)\end{cases},\qquad(6)$$

其中：$\Phi(y)=e^y-1$，$F(x)=\dfrac{f_0(x)}{f_0(x_1)e^{\int_{x_1}^{x}\varphi_2(s)ds-1}}$，$g(x)=\dfrac{g_1f+f_0g_2}{f_1f_0(x_1)}e^{\int_{x_1}^{x}\varphi_2(s)ds}$．经此变换 $S(x_1,y_1)$ 变为 $T(x_1,0)$.

易知，当 $x>x_1$ 时，有 $\psi(x)>0$，即当 $x\neq x_1$ 时，$(x-x_1)g(x)>0$．又设当 $G(x)=\int_{x_1}^{x}g(x)dx$，可知 $G(x)=+\infty$．再设 $\tau(x)=(1-2a_0)a_3x^2+(a_0-1)a_2x+a_1$，令 $\tau(x)=0$，则有正根 $\overline{x_1}=$

$\dfrac{k+\delta}{2a_2(2a_0-1)}$. 其中：$k=a_2(a_0-1)$，$\delta=\sqrt{a_2^2(a_0-1)^2-4a_1a_3(1-2a_0)}$，当 $(k+\delta)<(a_2-a_0+\sqrt{\Delta})(2a_0-1)$ 时，$x_1>\overline{x_1}$，而此时 $\tau(x)>0$，从而 $f(x_1)=\dfrac{\tau(x_1)}{a_0f_0(x_1)}>0$，又 $\Phi(0)=0$，$\Phi^{'}(y)=e^y>0$，且 $\dfrac{df(x)}{dxg(x)}=\dfrac{p(x)}{[a_3x^2+(a_0-a_2)x+(a_1-a_0)]^2}$，其中：$p(x)=-a_0a_3(2a_0-a_2-1)x^2-2a_0a_3(1+2a_1-2a_0)x+a_0(a_1a_2+a_2-a_0a_2-a_1)$. 当 $a_2<2a_0-1$，$x^{'}=\dfrac{2a_0-2a_1-1}{2a_0-a_2-1}>0$，为 $p(x)$ 在 $\overline{R}$ 的极大值点.

又易知，对 $\forall x>0$，有 $p(x)<0$，从而 $\dfrac{df(x)}{dxg(x)}<0$，故当 $m<a_2<M$ 时，$\dfrac{df(x)}{dxg(x)}<0$. 由唯一性定理知系统（3）在 $\overline{R}$ 内至多有一个极限环. 结合定理 1，知系统（2）有唯一极限环.

定理 3 得证.

参考文献

[1] 陆忠华, 陈兰荪. 食饵种群具有常数投放率的捕食-食饵模型分支问题[J]. 数学杂志, 1994, 14(4): 541-548.

[2] 吴兴岐, 刘学生, 赵振海. 一类稀疏效应下捕食-被捕食系统极限环的存在唯一性[J]. 数学研究与评论, 1997, 17(1): 69-73.

[3] 阳平华, 徐瑞, 张士军. 一类具有稀疏效应的生态系统的极限环[J]. 生物数学学报, 1997, 12(4): 422-426.

[4] 郑靖波, 余昭旭, 孙继涛. 一类稀疏效应下食饵-捕食系统极限环存在唯一性[J]. 生物数学学报, 2001, 16(3): 156-161.

[5] 陈兰荪. 数学生态模型学和研究方法[M]. 北京: 科学出版社, 1988: 74-86.

[6] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 155-183.

Study on Limit Cycles for a Class of Nonlinear Autonomous System

ZHANG Jinbo, LIU Ruijie, LIU Rui

(School of Mathematics, Physics and Software Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou, China　730070)

Abstract: This paper focuses on the limit cycles for a class of nonlinear autonomous system, by using qualitative theory of ordinary differential equations, the equilibrium points and the sufficient conditions for the existence and uniqueness of limit cycle is analyzed.

Key words: Nonlinear autonomous system; Equilibrium point; Limit cycle; Uniqueness

（编辑：王一芳）