均匀设计在纺织工业上的应用

张季纶　王晓琪
（西北国棉三厂）

【提要】 均匀设计法是中国科学院应用数学研究所于1980年11月发表的一项数学新方法，是数论应用在试验设计上的最新成就，能使设计周期大为缩短。本文通过在纺织生产中应用均匀设计安排试验的实例，将均匀设计法引入纺织业，并介绍了设计和计算分析方法。由于均匀设计能以最少的试验次数，获取事物变化的主要规律，因而在纺织工业中有着广泛的使用价值。

（编者注：来稿附录均匀设计表式，由于篇幅关系未刊出，读者如需要进行试验，可参阅参考资料[2]）

一、均匀设计简介

纺织工业试验的特点是：纺织纤维的物理性能随时间、空间的变化，其随机性和条件误差会破坏试验的可信性。如测定棉卷重量不匀率，随着时间的推移、温湿度的波动及原棉的变化，棉卷重量不匀率必然是一个随机变量。大量事实说明，随着时间的推延，会直接影响试验之间的可比性，严重干扰试验的准确性，甚至使之失去意义。而且，长时间、过多的破坏性试验会给人力、物力、财力带来损失。所以选择最优试验方案，寻求用最短的时间和最少的次数，达到完整的全面试验效果，是纺织工业试验工作现代化的迫切需要。

人们首先采用了正交设计法。正交设计的特点，是将试验点在试验范围内安排得“分散均匀”和“整齐可比”，因而用它来安排试验方便易行，分析工作简单直观。一个四因素、四水平的试验，全面进行试验需要做$4^4=256$次，而正交设计法试验仅做16次，故而受到好评。但纺织厂的试验大多要改车，16次改车仍嫌多，尤其改变量较大时，16次改车要数天才能完成，其间生产条件的变化将会带来条件误差，影响试验的可信性。正交设计为了照顾“整齐可比”，放弃了一些“均匀分散”，这是正交设计试验次数仍旧较多的原因。

中国科学院应用数学研究所方开泰同志在八十年代初首先提出了一种崭新的设计方法——均匀设计法。它不考虑整齐可比，而应用数论方法使试验点在积分范围内散布得十分均匀，并使分布点离被积函数的各种值充分接近。所以所用的试验点不多，却能使积分值得到很好的近似，从而使试验次数减少到最低限度。

均匀设计也有专门的表头，如下页表1和表2。表1有五行（表示要做五次试验），四列（表示最多安排四个因素），水平数为五，记作$U_5(5^4)$；表2是六水平试验表，记作$U_6(6^6)$。由于没有六阶正交拉丁方，用正交表安排四因素六水平试验，至少要72次试验（全面试验要做$6^4=1296$次），用均匀设计六次试验即可。

实践证明，均匀设计在纺织工业中是卓有成效和大有可为的。而且，参与试验的因素和水平越多，均匀设计能最大限度地减少试验次数的优越性就越是明显突出。

表 1　$U_5(5^4)$

列号 / 验试号	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1
5	5	5	5	5

表 2　$U_6(6^6)$

列号 / 试验号	1	2	3	4	5	6
1	1	3	2	6	4	5
2	2	6	4	5	1	3
3	3	2	6	4	5	1
4	4	5	1	3	2	6
5	5	1	3	2	6	4
6	6	4	5	1	3	2

二、应用举例

下面我们通过实例介绍均匀设计安排试验和处理分析数据的具体方法。

为了改善并条条干不均匀，在并条机几个工艺参数中选择最佳工艺方案，拟选的工艺参数及水平如下表：

表 3　并条工艺试验正交设计表　单位：毫米

水平 / 因素（工艺参数）	一	二	三	四
A（二罗拉抬高）	1	3	2	4
B（一、二罗拉隔距）	13	10	12	9
C（三、四罗拉隔距）	16	17	12	13
D（后牵伸齿轮齿数）	25	30	29	24

这是一个四因素四水平的试验，采用正交设计法，选 $L_{16}(4^5)$ 表，做 16 次试验，结果选出的方案为 A_4、B_4、C_2，因素 D 的作用不显著。

现采用均匀设计来安排。为了提高数据精度，各因素的每个水平均试两次，故采用表 $U_8(8^6)$。该表最多可安排六个因素，现在只有四因素，根据均匀设计要求，四个因素放在第 1、2、3、5 列，共做八次试验[2]。如果要进一步减少试验次数，可选用表 $U_4(4^4)$，只要做四次试验即可。具体设计如下：

表 4　并条工艺试验均匀设计表

因素 / 试验号	A (X_1)	B (X_2)	C (X_3)	D (X_4)	条干不匀率 y
1	1(1毫米)	2(13毫米)	4(17毫米)	7(24齿)	14.93
2	2(1毫米)	4(10毫米)	8(13毫米)	5(29齿)	15.16
3	3(3毫米)	6(12毫米)	3(17毫米)	3(30齿)	14.37
4	4(3毫米)	8(9毫米)	7(13毫米)	1(25齿)	13.67
5	5(2毫米)	1(13毫米)	2(16毫米)	8(24齿)	15.64
6	6(2毫米)	3(10毫米)	6(12毫米)	6(29齿)	15.13
7	7(4毫米)	5(12毫米)	1(16毫米)	4(30齿)	14.30
8	8(4毫米)	7(9毫米)	5(12毫米)	2(25齿)	13.60

由于均匀设计没有整齐可比性，因而其结果一般都不简单地进行直观分析，通常采用回归分析方法，而它的充分均匀性则为使用回归分析提供了有利条件。

设 x 和 y 之间存在线性关系（这在一般条件下是可以满足的），令 x_{ik} 表示 x_i 在第 k 次试验时的取值，y_k 表示 y 在第 k 次试验的结果。根据最小二乘原理，计算

$$L_{ij}=\sum_{k=1}^{N}(x_{i}-\bar{x}_i)(x_{jk}-\bar{x}_j) \qquad (1)$$

$$L_{iy}=\sum_{k=1}^{N}(x_{ik}-\bar{x}_i)(y_k-\bar{y}) \qquad (2)$$

$$L_{yy}=\sum_{k=1}^{N}(y_k-\bar{y})^2 \qquad (3)$$

式中　$N=8$ 是试验总数。

i、j 均表示第 i 个、第 j 个因素，即

i、$j=1$、2、3、4、…、m。

x_{ik}、x_{jk}分别表示 x_i、x_j 在第 k 次试验时所选用的工艺参数值。如

$$x_{18}=4,\ x_{36}=12,\ \cdots$$

$\bar{x}_i$、$\bar{x}_j$ 分别表示 x_i、x_j 的平均值，有

$\bar{x}_1=2.5$，$\bar{x}_2=11$，$\bar{x}_3=14.5$，$\bar{x}_4=27$

y_k 表示第 k 次试验结果。

$\bar{y}$ 表示试验结果的平均值。$\bar{y}=14.60$。

当 $i=j$ 时，$$L_{ij}=\sum_{k=1}^{N}(x_{ik}-\bar{x})^2 \qquad (4)$$

为了计算方便，通常采用一组等价公式计算以上平方和，对本例计算如下：

$$L_{12}=L_{21}=\sum_{k=1}^{8}x_{1k}\cdot x_{2k}-\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}x_{1k}\cdot\sum_{k=1}^{8}x_{2k}=-4$$

$$L_{13}=L_{31}=\sum_{k=1}^{8}x_{1k}\cdot x_{3k}-\frac{1}{8}\sum_{1}^{8}x_{1k}\cdot\sum_{1}^{8}x_{3k}=-2$$

$$L_{14}=L_{41}=\sum_{k=1}^{8}x_{1k}\cdot x_{4k}-\frac{1}{8}\sum_{1}^{8}x_{1k}\cdot\sum_{1}^{8}x_{4k}=4$$

$$L_{23}=L_{32}=\sum_{k=1}^{8}x_{2k}\cdot x_{3k}-\frac{1}{8}\sum_{1}^{8}x_{2k}\cdot\sum_{1}^{8}x_{3k}=24$$

$$L_{24}=L_{42}=\sum_{k=1}^{8}x_{2k}\cdot x_{4k}-\frac{1}{8}\sum_{1}^{8}x_{2k}\cdot\sum_{1}^{8}x_{4k}=-2$$

$$L_{34}=L_{43}=\sum_{k=1}^{8}x_{3k}\cdot x_{4k}-\frac{1}{8}\sum_{1}^{8}x_{3k}\cdot\sum_{1}^{8}x_{4k}=0$$

$$L_{11}=\sum_{k=1}^{8}(x_{1k})^2-\frac{1}{8}\left(\sum_{1}^{8}x_{1k}\right)^2=10$$

$$L_{22}=\sum_{k=1}^{8}(x_{2k})^2-\frac{1}{8}\left(\sum_{1}^{8}x_{2k}\right)^2=20$$

$$L_{33}=\sum_{k=1}^{8}(x_{3k})^2-\frac{1}{8}\left(\sum_{1}^{8}x_{3k}\right)^2=34$$

$$L_{44}=\sum_{k=1}^{8}(x_{4k})^2-\frac{1}{8}\left(\sum_{1}^{8}x_{4k}\right)^2=52$$

$$L_{1y}=\sum_{k=1}^{8}x_{1k}\cdot y_k-\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}x_{1k}\cdot\sum_{1}^{8}y_k=-4.65$$

$$L_{2y}=\sum_{k=1}^{8}x_{2k}\cdot y_k-\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}x_{2k}\cdot\sum_{1}^{8}y_k=4.98$$

$$L_{3y}=\sum_{k=1}^{8}x_{3k}\cdot y_k-\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}x_{3k}\cdot\sum_{k=1}^{8}y_k=3.09$$

$$L_{4y}=\sum_{k=1}^{8}x_{4k}\cdot y_k-\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}x_{4k}\cdot\sum_{k=1}^{8}y_k=0.34$$

$$L_{yy}=\sum_{k=1}^{8}y_k^2-\frac{1}{8}\left(\sum_{k=1}^{8}y_k\right)^2=3.79$$

得线性方程组

$$\begin{cases}L_{11}b_1+L_{12}b_2+L_{13}b_3+L_{14}b_4=L_{1y}\\ L_{21}b_1+L_{22}b_2+L_{23}b_3+L_{24}b_4=L_{2y}\\ L_{31}b_1+L_{32}b_2+L_{33}b_3+L_{34}b_4=L_{3y}\\ L_{41}b_1+L_{42}b_2+L_{43}b_3+L_{44}b_4=L_{4y}\end{cases} \qquad (5)$$

其中 b_1、b_2、b_3、b_4 是 x_1、x_2、x_3、x_4 的回归系数。利用矩阵方法可以方便地求得回归系数 b

$$b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&C_{14}\\ &C_{22}&C_{23}&C_{24}\\ & &C_{33}&C_{34}\\ & & &C_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_{1y}\\L_{2y}\\L_{3y}\\L_{4y}\end{pmatrix} \qquad (6)$$

式中：

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ & & C_{33} & C_{34} \\ & & & C_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ & & L_{33} & L_{34} \\ & & & L_{44} \end{pmatrix}^{-1}$$

代入数据解得

$$b = \begin{pmatrix} 0.1541 & 0.1601 & -0.0673 & -0.0044 \\ & 0.4211 & -0.2907 & 0.0080 \\ & & 0.2297 & -0.0030 \\ & & & 0.0200 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4.65 \\ 4.98 \\ 3.09 \\ 0.34 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = -0.29, \quad b_2 = 0.70,$$
$$b_3 = -0.42, \quad b_4 = 0.056$$

回归常数为

$$a = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2 - \cdots - b_m\bar{x}_m \qquad (7)$$

代入数据，得 $a = 12.20$

回归方程为

$$\hat{y} = 12.20 - 0.29x_1 + 0.7x_2 - 0.42x_3 + 0.056x_4$$

回归平方和为

$$S_{回} = b_1L_{1y} + b_2L_{2y} + b_3L_{3y} + b_4L_{4y} = 3.56$$

其自由度为因素个数，即 $f_1 = m = 4$

利用复相关系数检验回归方程的可信性，复相关系数利用下式计算：

$$R = \sqrt{\frac{S_{回}}{L_{yy}}} = 0.97 \qquad (8)$$

由于R非常接近1，可以认为回归方程是可信的。

四个因素相互间关系密切，必须用偏回归系数作F显著性检验，才能判别各因素对试验结果的影响。先计算剩余方差 $\hat{\sigma}^2$：

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{L_{yy} - S_{回}}{N - m - 1} = 0.077 \qquad (9)$$

偏回归系数的计算用下式：

$$p_i = \frac{b_i^2}{C_{ii}}$$

C_{ii} 为逆矩阵 $C = (C_{ij})$ 中的对应元素。

$$p_1 = \frac{b_1^2}{C_{11}} = \frac{(-0.29)^2}{0.1541} = 0.5457$$

$$p_2 = \frac{b_2^2}{C_{22}} = \frac{0.7^2}{0.4211} = 1.1636$$

$$p_3 = \frac{b_3^2}{C_{33}} = \frac{(-0.42)^2}{0.2297} = 0.7680$$

$$p_4 = \frac{b_4^2}{C_{44}} = \frac{0.056^2}{0.0200} = 0.1568$$

将偏回归系数对剩余方差作F检验：

$$F_1 = \frac{p_1}{\hat{\sigma}^2} = 7.09$$

$F_2 = 15.11$，$F_3 = 9.97$，$F_4 = 2.04$

式中分子对应自由度为 $m = 4$，分母自由度为 $N - m - 1 = 3$。由两个自由度查得 F 临界值在显著性水平为 $\alpha = 0.01$、0.05、0.10、0.25 时分别为

$$F_{0.01(4,3)} = 28.71, \quad F_{0.05(4,3)} = 9.12,$$
$$F_{0.10(4,3)} = 5.54, \quad F_{0.25(4,3)} = 2.39。$$

今

$$F_{0.05} > F_1 > F_{0.10}$$

表示因素1对结果有一定程度的影响。

$$F_{0.01} > F_2 > F_{0.05}$$

表示因素2对结果有显著影响。

$$F_{0.01} > F_3 > F_{0.05}$$

表示因素3对结果有显著影响。

$$F_{0.25} > F_4$$

表示因素4对结果无影响。

对作用不明显的因素，应予剔除，余下三个变量，回归系数及常数均应修正为：

$$b_1^* = b_1 - \frac{C_{14}}{C_{44}}b_4 = -0.278$$

$$b_2^* = b_2 - \frac{C_{24}}{C_{44}}b_4 = 0.678$$

$$b_3^* = b_3 - \frac{C_{34}}{C_{44}}b_4 = -0.412$$

$$a^* = \bar{y} - \sum_{i=1}^{m} b_i^* \bar{x}_i = 13.81$$

回归方程修订为

$$\hat{y} = 13.81 - 0.278x_1 + 0.678x_2 - 0.412x_3$$

从回归方程可以清楚看到，因素中以前

区隔距影响条干均匀度最显著，以下顺次为后区隔距、二罗拉抬高高度。因素A与C以取值大为好,因素B以取值小为好。故选得工艺配置为A_4、B_4、C_2，这和正交设计试验的结论一致。

三、结　　论

根据以上理论阐述和实践，可有以下结论：

一、均匀设计具有在保证反映事物间主要规律的前提下得到最少试验次数的功能，因而可以满足试验时间短，尽可能少影响生产的要求,最适宜纺织生产的采用。

二、均匀设计在数据很少的条件下得到反映事物间主要规律的回归方程，为全面质量管理提供了标准化的有利条件。

三、均匀设计是我国数学界独创的一种数学新方法。它虽然不能完全取代正交设计等其他试验设计法,但可以补充其不足,使试验设计法更趋完善。

四、如果试验目的仅是寻找最优方案，均匀设计也可以进行直观分析。即从试验点中挑一组指标最优者，相应的试验条件即是其欲选方案。这是因为试验充分均匀，试验点中最优者离试验范围内的最优理论条件不会很远。此法看来粗糙，但在正交试验中，当有混杂时也常采用。实践证明,它的误差不大。上例中直观分析与回归分析差别仅表现在因素C上。

五、均匀设计严格分析所用多元回归分析虽较复杂，但在电子计算技术及工具日益发达与普遍的今天，也并不很困难。只要具有高中数学水平,掌握线性代数基本知识,即可胜任。对复杂问题，可采用逐步回归。这种以工程技术人员的较多的设计计算分析工作来换取工业生产中为了安排较多的试验而造成的损失，即以较多脑力劳动换取大量体力劳动并节约物力，既是均匀设计的显著特点,又是它的一个突出优点。

参　考　资　料

[1] 方开泰:«均匀设计»，概率统计通讯(内部资料)第一期。

[2] 方开泰:«均匀设计——数论方法在试验设计的应用»,应用数学学报,1980年,第4期。

[3] 上海师范大学:«回归分析及其试验设计»，上海教育出版社 1978年。