关于平均值不等式的新应用

张　章，赵焕光

（温州大学数学与信息科学学院，浙江温州　325035）

摘　要：利用平均值不等式推得 Hölder 不等式和在数学竞赛题中有广泛应用的“分式和”不等式．此外，通过平均值不等式建立了一个应用非常广泛的新不等式．

关键词：平均值不等式；Hölder 不等式；柯西不等式；“分式和”不等式

中图分类号：O178　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1674-3563(2009)03-0014-04

DOI：10.3875/j.issn.1674-3563.2009.03.003　　本文的 PDF 文件可以从 xuebao.wzu.edu.cn 获得

1 预备知识

先用引理的形式介绍平均值不等式链，调和平均数≤几何平均数≤算术平均数≤ p 幂平均数，并利用凸函数的 Jensen 不等式[1]给出非常简洁的证明．

引理 1　设 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 与 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ 是给定的正数组，而且有 $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i = 1$，则：

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^{-1}\right)^{-1} \le \prod_{i=1}^n a_i^{\lambda_i} \le \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \le \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^p\right)^{1/p} \text{（其中 } p>1\text{）}.$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时，上述不等式中的等号成立．

证明：易见 $f(x) = e^x$ 是凸函数（$\because f''(x) = e^x > 0$），由凸函数的 Jensen 不等式有：

$$\prod_{i=1} a_i^{\lambda_i} = e^{\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i \ln a_i} \le \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{\ln a_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i .$$

当且仅当 $\ln a_1 = \ln a_2 = \cdots = \ln a_n$ 即 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时，上述不等式中的等号成立．

对 $\{b_i\}_{i=1}^n = \{a_i^{-1}\}_{i=1}^n$，应用刚刚所得的不等式有：

$$\prod_{i=1}^n a_i^{-\lambda_i} \le \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^{-1},$$

重新整理即得：

$$(\sum_{i=`}^n \lambda_i a_i^{-1})^{-1} \le \prod_{i=1}^n a_i^{\lambda_i} .$$

当且仅当 $a_1^{-1} = a_2^{-1} = \cdots = a_n^{-1}$ 即 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时，上述不等式中的等号成立．

又易见 $f(x) = x^p\ (x>0)$ 是凸函数（当 $x>0$ 时，$f''(x) = p(p-1)x > 0$），因此由凸函数

收稿日期：2008-08-30

作者简介：张章（1982- ），女，浙江温州人，硕士研究生，研究方向：应用分析

的 Jensen 不等式又有：

$$(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i)^p \le \sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^p,$$

两边开 p 次方即得：

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i \le (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^p)^{1/p}.$$

同理，当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时，上述不等式中的等号成立.

2 平均值不等式在重要不等式推证中的应用

首先建立：

命题 1　平均值不等式(算术平均数≤p 次幂平均数)可推得 Hölder 不等式[1]成立：若 $p,q>0$ 而且 $p^{-1}+q^{-1}=1$，则对于任何 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 与 $\{b_i\}_{i=1}^n$，都有 $|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i| \le [\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p]^{1/p}\cdot[\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q]^{1/q}$.

证明：不妨设 $|b_i|>0$（$i=1,2,\cdots,n$）. 注意到 $q^{-1}=1-p^{-1}$ 及 $p(q-1)=q$，由平均值不等式可得：

$$|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i| \le \sum_{i=1}^{n}|a_i b_i| = \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i b_i|}{\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{|b_i|^q}{\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q}\cdot\frac{|a_i|}{|b_i|^{q-1}}\right)$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p}{\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q}\right)^{1/p} \quad （算术平均数\le p\ 幂平均数）$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right]^{1/p}\left[\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right]^{1/q}.$$

注：由 $p=q=2$ 时可说明，柯西不等式可直接由算术平均数≤均方平均数推得. 从这个角度看，研究不等式的柯西方法实际上可由平均值方法取而代之. 然而，平均值不等式与柯西不等式通常要分两个专题研究，因此命题 1 的建立，对重新认识经典不等式是有益处的.

下面利用平均值不等式推证在数学竞赛题中有广泛应用的“分式和”不等式[2]：

命题 2　若 $a_i>0$（$i=1,2,\cdots,n$）且 $\sum_{i=1}^{n}a_i = s$（s 为正常数），则：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{s-a_i} \ge \frac{s^{k-1}}{(n-1)n^{k-2}} \quad （其中\ k\in N^+\ 为常数）.$$

证明：在需证不等式两边同时除以 s^{k-1}，又在不等式左边的分子、分母各除以 s，原不等式可转化为 $\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{a_i}{s})^k}{1-\frac{a_i}{s}} \ge \frac{1}{(n-1)n^{k-2}}$，若 $\sum_{i=1}^{n}a_i = 1$，则 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{1-a_i} \ge \frac{1}{(n-1)n^{k-2}}$.

由[调和平均数]$^{-1}$ ≥[算术平均数]$^{-1}$可得：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{1-a_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i^k}{\sum_{i=1}^{n}a_i^k}\cdot\left(\frac{1}{1-a_i}\right)\right]\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{\sum_{i=1}^{n}a_i^k}\cdot(1-a_i)\right]^{-1}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^2\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+1}\right)\right]^{-1}.$$

由 Hölder 不等式可得：$\sum_{i=1}^{n}a_i^k\leq\left[\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+1}\right]^{k/(k+1)}\cdot n^{1/(k+1)}$，于是有$\sum_{i=1}^{n}a_i^{k+1}\geq\left(\frac{1}{n}\right)^{1/k}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right]^{1+(1/k)}$，再次由算术平均数≤ p 幂平均数可得：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{1-a_i}\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^k}{1-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{1/k}}\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^k}{1-\frac{1}{n}}\geq\frac{\frac{1}{n^{k-1}}}{1-\frac{1}{n}}=\frac{1}{(n-1)n^{k-2}}.$$

注：命题 2 的证明蕴涵着平均值方法的用法.

3 一个新的不等式及其应用

下面再次利用平均值不等式（几何平均数≤算术平均数）建立一个应用非常广泛的新不等式：

命题 3　给定正数组$\{\alpha_i\}_{i=1}^n$，那么对任何正变量组$\{x_i\}_{i=1}^n$都有：

$$\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}\right)\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\leq\left(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\alpha_i}\right)\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}.$$

不等式中的等号成立当且仅当存在正常数c使得$x_i=ca_i\ (i=1,2,\cdots,n)$.

证明：由基本平均值不等式（几何平均数≤算术平均数）有：

$$\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}\right)=\left(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\alpha_i}\right)\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i}=\left(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\alpha_i}\right)\cdot\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i/\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\right]^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$$

$$\leq\left(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\alpha_i}\right)\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\cdot\frac{x_i}{\alpha_i}\right]^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}=\left(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\alpha_i}\right)\cdot\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\right]^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}.$$

当且仅当$\frac{x_1}{\alpha_1}=\frac{x_2}{\alpha_2}=\cdots=\frac{x_n}{\alpha_n}=c(>0)$时，上述不等式中的等号成立．重新整理即得需证不等式.

以下举例说明上述新得到的不等式在证明条件不等式中的巧妙应用.

推论 1[3]　若$x>0$，$\alpha_i>0$，$x_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，且$\sum_{i=1}^{n}x_i=a$，则：

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \le \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\alpha_i}\right) \cdot \left(\frac{a}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} .$$

当且仅当 $x_i = (\alpha_i a) / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时，上述不等式中的等号成立.

证明：把条件代入命题 3 重新整理即得.

推论 2[3]　若 a, b, c, k 是正的常数，x, y, z 是正的变量，而且 $x^k + y^k + z^k = 1$，则：

$$x^a y^b z^c \le (a^a b^b c^c)^{1/k} \cdot (a+b+c)^{-(a+b+c)/k} .$$

当且仅当 $x = \left(\frac{a}{a+b+c}\right)^{1/k}$，$y = \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^{1/k}$，$z = \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^{1/k}$ 时上述不等式中的等号成立.

证明：$x^a y^b z^c = [(x^k)^a \cdot (y^k)^b \cdot (z^k)^c]^{1/k}$，再把条件代入命题 3 即得.

推论 3[4]　若 a 是正的常数，x, y, z 是正的变量，而且 $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = a^{-1}$，那么有：

$$xyz \ge 27a^3 .$$

当且仅当 $x = y = z = 3a$ 时，上述不等式中的等号成立.

证明：把 $x_1 = x^{-1}$，$x_2 = y^{-1}$，$x_3 = z^{-1}$，$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ 代入命题 3 即得.

参考文献

[1] 刘三阳, 于力, 李广民. 数学分析选讲[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 77-90.

[2] 季明银. 一类不等式的推广[J]. 数学通报, 2008, 47(1): 60-61.

[3] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000: 213-217.

[4] 候玲, 尹云辉, 胡钢, 等. 关于函数条件极值解题一例的补充[J]. 高等数学研究, 2007, 10(2): 17.

New Application of Mean Inequality

ZHANG Zhang, ZHAO Huanguang

(College of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, China　325035)

Abstract: Hölder inequality and a Fractional sum inequality which is applied widely in mathematics competition aspect can be deduced from Mean inequality. In addition, through Mean inequality, a new inequality can be established, which has also been in a very wide range of application.

Key words: Mean Inequality; Hölder Inequality; Cauchy Inequality; Fractional Sum Inequality

（编辑：王一芳）