

(15) 295-298

警告参数计算公式的推导<sup>†</sup>

王欣

(陕西师范大学物理学系, 710062, 西安; 53岁, 副教授)

G449

**摘要** 由警告参数的意义出发, 计算实际应答反应与理想应答反应两种情况下有关变量间的协方差, 从而导出了警告参数的计算公式。其结果与日本学者的研究结果相符合。

**关键词** SP表; 警告参数; 协方差

**分类号** G40-058.13

教育测量, 形成性测验

由日本引进的SP表(Student-Problem Table)评价方法, 主要应用于形成性测验的质量评价。在某次形成性测验之后, 将学生答对题数直方图与试题答对人数直方图相结合制成的SP表, 获得学生学习质量和试题质量的二维评价结果。该评价方法与一般数理统计方法相比, 具有模型简单、图形直观、信息量大等特点, 从而得到了推广应用, 其有效性与实用性已被证实<sup>[1]</sup>。在SP表中, 为了定量地描述实际应答反应模式与理想应答反应模式的差异程度, 引入了一个重要的判断指标——警告参数。警告参数的计算公式已由日本引进<sup>[2]</sup>, 但计算公式的推导尚未见文献报道。为了深刻理解SP表的原理以及警告参数的意义, 灵活地运用、改进或推广使用这种评价方法, 本文拟给出警告参数计算公式的推导过程。

## 1 SP表概述

在应答反应中, 设学生 $S_i$ 回答问题 $P_j$ 的应答变量为 $X_{ij}$  ( $i=1, 2, 3 \dots m; j=1, 2, 3 \dots n$ ), 规定

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{答对}) \\ 0 & (\text{答错}) \end{cases}$$

则学生答对题数变量  $X_i = \sum_{j=1}^n X_{ij}$ ; 学生答对率  $X_{i0} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}$ ; 问题答对人数变量  $Y_j = \sum_{i=1}^m X_{ij}$ ; 问题答对率  $Y_{j0} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{ij}$ ; 全体学生答对总数  $X = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}$ 。

在如图1所示的SP表中, 学生排序按答对题数 $X_i$ 的大小由上到下排列; 问题排序按答对人数 $y_j$ 的大小由左到右排列; S线(学生答对线)由“S”组成; 对学生 $S_i$ , S线左方的格数等于该生答对题数 $X_i$ ; P线(问题答对线)由“P”组成; 对问题 $P_j$ , P线上方的格数等于该题的答对人数 $Y_j$  (即S线、P线分别是学生 $S_i$ 答对题数 $X_i$ 的直方图和问题 $P_j$ 答对人数 $Y_j$ 的直方图)。表中右下角G为学生平均答对率; D为差异量;  $C_{S_i}$ 和 $C_{P_j}$ 分别为学生 $S_i$ 和问题 $P_j$ 的警告参数。

## 2 警告参数计算公式的推导

### 2.1 应答变量 $X_{ij}$ 与答对人数变量 $Y_j$ 间的线性相关程度

概率论指出, 两列随机变量的协方差表征它们之间的线性相关程度<sup>[3]</sup>。学生 $S_i$ 应答变量 $X_{ij}$ 与问题

<sup>†</sup> 国家教委直属师范大学“基础教育改革与实践研究”项目资助课题(教直(1990)034)

收稿日期: 1997-9-10

S \ P	20	15	04	10	11	03	06	01	19	18	02	09	12	17	13	07	14	05	16	08	Xi	Xi0	CSi	
01	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	S0	19	.95	.00
																					SSSSSSSS			
02	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	S0	1	0	17	.85	.47	
																					S			
03	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	S1	1	0	17	.85	.57	
																					SSSSS			
04	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	S1	1	0	1	16	.80	.90
																					S			
12	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	S1	0	1	0	16	.80	.43
																					SSSSS			PP
19	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	S1	0	1	0	15	.75	.30
																					SSSSS			P
05	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	S1	0	1	0	14	.70	.24
																					S			PPPP
17	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	S0	1	0	1	14	.70	.37
																					S			PPPP
06	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	S1	0	1	1	14	.70	.54
																					SSSSS			PPPP
14	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	S1	0	0	1	13	.65	.66
																					S			PPPPPPP
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	S0	1	0	0	13	.65	.19
																					SSSSS			PPP
10	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	S1	1	1	0	12	.60	.53
																					S			P
18	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	S1	1	0	12	.60	.38
																					PPPP			
13	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	P1	0	0	12	.60	.66
																					PPPPPPP			
20	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	S0	0	0	12	.60	.44
																					PPPPPPP			SSSSS
08	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	S0	0	1	11	.55	.52
																					PPPPPPP			SSSSS
09	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	10	.50	.70
																					PPPPPPP			S
07	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	S1	0	0	10	.50	.37
																					PPPP			SSSSS
11	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	09	.45	.71
																					SSSSSSSSSSS			
15	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	06	.30	.84
																					S0			
Yj	18	17	17	16	16	16	16	15	15	15	14	14	13	11	10	10	09	08	07	05	G = .655			
Y0	.90	.85	.85	.80	.80	.80	.80	.75	.75	.75	.70	.70	.65	.55	.50	.50	.45	.40	.35	.25				
Cpj	.36	.00	.35	1.4	.40	.52	.75	.21	.36	.87	.63	.00	.55	.25	1.1	.33	.25	.52	.63	1.0	G = .23			

图 1 SP 表

Fig. 1 Student-Problem Table

答对人数变量  $Y_j$  间的协方差

$$\begin{aligned}
 \text{COV}_i(X_{ij}, Y_j) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \frac{X_i}{n}) \cdot (Y_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j) = \\
 &= \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n X_{ij} \cdot Y_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij} \sum_{j=1}^n Y_j - \frac{X_i}{n} \sum_{j=1}^n Y_j + \frac{X_i}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{j=1}^n Y_j \right) = \\
 &= \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n X_{ij} \cdot Y_j - \frac{X_i}{n} \sum_{j=1}^n Y_j - \frac{X_i}{n} \sum_{j=1}^n Y_j + \frac{X_i}{n^2} \sum_{j=1}^n 1' \sum_{j=1}^n Y_j \right) = \\
 &= \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n X_{ij} \cdot Y_j - \frac{X_i}{n} \sum_{j=1}^n Y_j \right).
 \end{aligned}$$

2.2 学生群体处于理想稳定状态下, 应答变量  $X'_{ij}$  与答对人数变量  $Y'_j$  间的线性相关程度

在 SP 表中, 由于学生排序按得分多少由上到下排列, 问题排序按易难由左到右排列, 若每个学生

的应答水平表现绝对稳定,则S线左方或P线上方将不出现“0”(即S线右方或P线下方将不出现“1”),S线与P线重合(差异量 $D=0$ ),学生群体处于理想稳定状态。设此状态下学生 $S_i$ 应答变量为 $X'_{ij}$ ;答对题数变量为 $X'_i$ ;问题答对人数变量为 $Y'_j$ ,则有

$$X'_i = X_i, \quad Y'_j = Y_j, \quad X'_{ij} = \begin{cases} 1 & 1 \leq j \leq X_i \\ 0 & n \geq j > X_i \end{cases}$$

同理,在学生群体处于理想稳定状态下,学生 $S_i$ 应答变量 $X'_{ij}$ 与问题答对人数变量 $Y'_j$ 间的协方差

$$\begin{aligned} \text{COV}_i(X'_{ij}, Y'_j) &= \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n X'_{ij} \cdot Y'_j - \frac{X'_i}{n} \sum_{j=1}^n Y'_j \right) = \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n X'_{ij} \cdot Y_j - \frac{X_i}{n} \sum_{j=1}^n Y_j \right). \end{aligned}$$

$\text{COV}_i(X'_{ij}, Y'_j)$ 值的大小反映学生 $S_i$ 应答变量 $X'_{ij}$ 在群体处于理想化稳定状态下与问题答对变量 $Y'_j$ 间的线性相关程度。

### 2.3 学生警告参数

学生警告参数表征学生 $S_i$ 应答变量 $X_{ij}$ 与学生群体应答变量(即问题答对人数变量 $Y_j$ )之间的偏离程度<sup>[2]</sup>。故学生警告参数为

$$\begin{aligned} C_{S_i} &= 1 - \frac{\text{COV}_i(X_{ij}, Y_j)}{\text{COV}_i(X'_{ij}, Y'_j)} = \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n X_{ij} \cdot Y_j - \frac{X_i}{n} \sum_{j=1}^n Y_j \right)}{\frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n X'_{ij} \cdot Y_j - \frac{X_i}{n} \sum_{j=1}^n Y_j \right)} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n X'_{ij} \cdot Y_j - \sum_{j=1}^n X_{ij} \cdot Y_j}{\sum_{j=1}^n X'_{ij} \cdot Y_j - \frac{X_i}{n} \sum_{j=1}^n Y_j} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{X_i} X'_{ij} \cdot Y_j + \sum_{j=X_i+1}^n X'_{ij} \cdot Y_j - \sum_{j=1}^{X_i} X_{ij} \cdot Y_j - \sum_{j=X_i+1}^n X_{ij} \cdot Y_j}{\sum_{j=1}^{X_i} X'_{ij} \cdot Y_j + \sum_{j=X_i+1}^n X'_{ij} \cdot Y_j - \frac{X_i}{n} \sum_{j=1}^n Y_j} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{X_i} (1 - X_{ij}) \cdot Y_j - \sum_{j=X_i+1}^n X_{ij} \cdot Y_j}{\sum_{j=1}^{X_i} Y_j - \frac{X_i}{n} \sum_{j=1}^n Y_j}. \end{aligned} \quad (1)$$

显然, $C_{S_i}$ 值越大,表明学生 $S_i$ 应答变量 $X_{ij}$ 与学生群体应答变量 $Y_j$ 间偏离程度越大。

### 2.4 问题警告参数

同理,问题警告参数为

$$C_{P_j} = \frac{\sum_{i=1}^{Y_j} (1 - X_{ij}) \cdot X_i - \sum_{i=Y_j+1}^m X_{ij} \cdot X_i}{\sum_{i=1}^{Y_j} X_i - \frac{Y_j}{m} \sum_{i=1}^m X_i}. \quad (2)$$

$C_{P_j}$ 值越大,表明问题 $P_j$ 应答变量 $X_{ij}$ 与学生答对题数变量 $X_i$ 间的偏离程度越大。

以上所推导的式(1)、式(2)与文献[2]所给公式是一致的。

### 3 警告参数计算公式的应用

根据图示 SP 表的数据和式(1)和式(2),分别计算 3 号学生和 7 号题的警告参数

$$C_{S_3} = \frac{\sum_{j=1}^{X_3} (1 - X_{3j}) \cdot Y_j - \sum_{j=X_3+1}^n X_{3j} \cdot Y_j}{\sum_{j=1}^{X_3} Y_j - \frac{X_3}{n} \sum_{j=1}^n Y_j} = \frac{(16 + 10) - (8 + 7)}{242 - 0.85 \times 262} = 0.57;$$

$$C_{p_7} = \frac{\sum_{i=1}^{Y_7} (1 - X_{i7}) \cdot X_i - \sum_{i=Y_7+1}^m X_{i7} \cdot X_i}{\sum_{i=1}^{Y_7} X_i - \frac{Y_7}{m} \sum_{i=1}^m X_i} = \frac{(14 + 14 + 13) - (12 + 12 + 9)}{155 - 0.5 \times 262} = 0.33.$$

计算结果与图示 SP 表中所给警告参数的值相符合。

一般认为: $C_{S_i}$ (或 $C_{p_j}$ ) $< 0.5$  无需引起注意; $0.75 \geq C_{S_i}$ (或 $C_{p_j}$ ) $\geq 0.5$  需引起注意; $C_{S_i}$ (或 $C_{p_j}$ ) $> 0.75$  且答对率 $X_{i0}$ (或 $Y_{j0}$ ) $< 0.85$ ,需引起特别注意。结合上述经验数据, $C_{S_3} = 0.57$ ,表明 3 号学生的应答变量 $X_{3j}$ 与理想稳定状态下学生群体应答变量 $Y'_j$ ( $Y'_j = Y_j$ )偏离较大,应答状态不够稳定,应仔细分析其原因。 $C_{p_7} = 0.33$ ,表明 7 号题符合测验的目标。

#### 参 考 文 献

- 1 张宪魁,王欣,李来政. 物理教育量化方法. 长沙:湖南教育出版社,1992. 251~275
- 2 李克东. 教育传播科学研究方法. 北京:高等教育出版社,1991. 232
- 3 周概括. 概率论与数理统计. 北京:高等教育出版社,1984

责任编辑 曹大刚

## The Derivation of the Alarm Parameter Formula

Wang Xin

(Department of Physics, Shaanxi Teacher's University, 710062, Xi'an)

**Abstract** On the basis of the definition of alarm parameter, the covariance of relative variables for practical and ideal answer reactions are calculated, and the formula of the alarm parameter is derived. This result is in agreement with the study result by Japanese scholars.

**Key words** Student-problem table; alarm parameter; covariance