维普资讯 http://www.cqvip.com

1998年2月 西北大学学报(自然科学版) Feb. 1998
第28卷第1期 Journal of Northwest University(Natural Science Edition) Vol. 28 No. 1

⑨ 30-33

重正化群方法及应用*

马致考 O414.21

(西北大学物理学系,710069,西安;52岁,副教授)

摘 要 从几何相变阐明重正化群(RG)方法的概念和实质;通过与非线性函数迭代类比,揭示临界点与不动点的联系;论述RG方法在相变研究及社会学方面的应用。

关键词 关联长度;重正化群变换;不动点

分类号 O414.21 相变

由于研究对象内部结构和相互作用的细节难于了解,从对称性出发,研究对称变换下的不变性质,是本世纪理论物理的重要研究方法。临界现象与物理体系的微观细节无关,临界指数的普适性意味着在临界点附近,宏观体系确实存在着一定的对称性,这种对称性正好可用重正化群变换来表示。美国物理学家威尔逊(Wilson)把量子场论中的重正化群方法创造性地运用到相变理论研究中,取得重大成就,为此获得1982年诺贝尔物理学奖。重正化群方法(简称RG方法)不仅是研究临界现象的有力工具,而且可以广泛地应用于材料科学研究等领域。特别是作为一种"由大量随机个性提取必然共性"的科学方法而与电子计算机相结合,已开始用于社会科学的某些方面。

1 重正化变换和重正化群RG

变换是一种操作,对称性是在变换中保持某种不变性,群是指一类变换的总体,重正化群变换是一种对称变换。为直观起见,从几何相变来阐明RG方法的基本概念和实质。

1.1 连通概率和关联长度

将若干尺寸相同的绝缘球和导体球装在一个绝缘的箱体内,置于两电极之间。设导体球占总球个数的百分比为P,每摇动箱体一次,可得一种掺合状态即概率分布。摇动若干次可得一个概率分布的集合,称总状态数。设其中使电路导通的状态数占总状态数的百分比为P'称为连通概率。显然,当$P=0$时,$P'=0$,即完全不会出现导通;当$P=1$时,$P'=1$,恒处导通状态;当P由0增加到1的过程中,每个P都对应一定的连通概率。这个实验可以用计算机模拟来完成,得到$P-P'$图线。从而可知当P很小时,连通概率P'等于0,当P达到临界值P_c时,P'迅速上升接近和达到1。

若指定某个导体球,算出和它有通道相连的导体球的平均距离,此亦可看作互相连接着的导体球"集团"的平均尺寸,记作ξ,显然ξ是P的函数。将$\xi(P)$定义为几何相变的关联长度,亦可理解为空间格点被导体球占据的概率为P的连通集团的平均尺寸。由$\xi(P)$的函数图线可知,当P很小时,ξ也不大;当P接近P_c时,ξ迅速上升、接近和达到1。当$P>P_c$时,在计算ξ时把完全连通起来的"无穷大"集团扣除,剩下的有限集团自然越来越小。$\xi(P)$在P_c附近是发散的量,即当$P=P_c$达到临界点时,关联长度达到无穷大,这是临界点最重要的特征。

1.2 重正化变换和非线性函数迭代

想像上述箱体内有很多可被导体球或绝缘球占据的格点,设每个格点被导体球占据的概率为P,再把箱内格点总体分为若干个元胞,每个元胞内包含b个格点,要使整个元胞完全导通,元胞中每个格点

* 收稿日期:1997-09-24

维普资讯 http://www.cqvip.com

必为导体球占据,所以元胞的连通概率 P' 等于单个格点连通概率的乘积,它是格点连通概率的函数,并与元胞尺寸有关,记作 $R_b(P)$。一般情况下 $R_b(P)$ 可能很复杂,但对于由导体球和绝缘球排成的一维线性链则很简单,可写为

$$P' = R_b(P) = P^b。 \tag{1}$$

将 $R_b(P)$ 称作 P 的重正化变换,即从格点的连通概率变换成元胞的连通概率。例如取 $b=2$,图1表示线性集团的归并。在这里采取了"否决权"原则,只要元胞中出现一个绝缘球(白色),归并后就得白球(不导通)。如果元胞中取多于2个格点,$b\geqslant3$,可采用"少数服从多数"的原则进行归并。例如有一个平面的三角格子,格点上有自旋的小陀螺,角速度的方向有的向上,有的向下。若每个三角格子中有两个向上,归并后就取向上。经过多次乃至无穷次归并后将得到不变的概率 $P'=P^*$。在上例中,假定初始概率 $P_0=0.95$,经过一次元胞归并后,得到 $P'_0=R_b(P_0)=P_0^2=0.90$,再作一次归并后变为 $P''_0=R_b(P'_0)=R_b[R_b(P_0)]=0.90^2=0.81$。如此循环以至无穷,最后达到不动点 $P^*=0$。

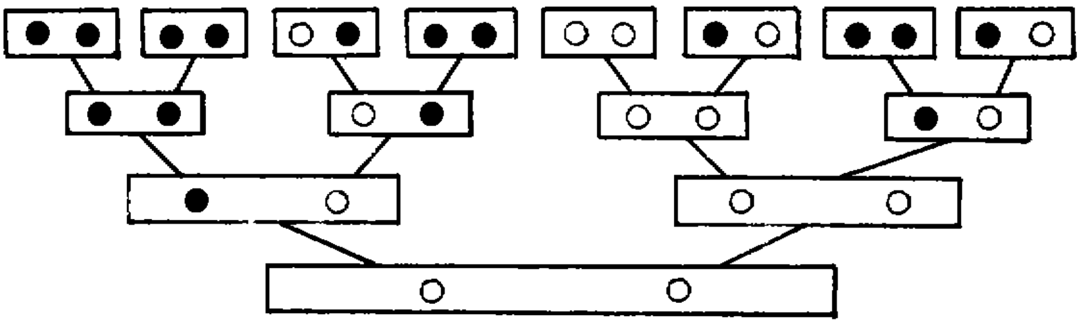

图1 线性链的集团归并

Fig. 1 Grouping and Merging of Linear Link

在重正化变换下,关联长度 $\xi(P)$ 缩短为

$$\xi(P') = \xi(P)/b。 \tag{2}$$

其原因是由格点扩大到元胞时,相当于"尺子"变长 b 倍。例如图1中黑球链的平均尺寸原来是4,变换一次后成为2,再变换一次成为1。当达到临界点之后,连通集团的尺寸变为无穷大,此时导通性不再因为重正化变换而改变。

为说明临界点与不动点的关系,考查非线性迭代过程,写出二次函数

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \quad (n = 0,1,2\cdots)。 \tag{3}$$

式中 μ 为参数,$\mu \in (0,2)$,取 $\mu = 2$,$x_0 = 0.1$ 依次迭代,可发现经第7次迭代后,函数值保持不变,$x_7 = x_8 = \cdots = x^* = 0.5$,即达到不动点。

在普遍情况下,非线性迭代函数写为

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 0,1,2,\cdots), \tag{4}$$

达到不动点时有 $x^* = f(x^*)$。 (5)

在离不动点很近时可设 $x_n = x^* + \varepsilon_n$, $x_{n+1} = x^* + \varepsilon_{n+1}$。将此代入(4)式,并在不动点作泰勒展开,$x^* + \varepsilon_{n+1} = f(x^* + \varepsilon_{n+1}) = f(x^*) + f'(x^*)\varepsilon_n + \cdots$ 利用不动点方程消去两边第一项

$$\varepsilon_{n+1} = f'(x^*)\varepsilon_n + \cdots, \tag{6}$$

如果 $|f'(x^*)| > 1$,再迭代一次就有 $|\varepsilon_{n+1}| > \varepsilon_n$,离不动点更远一些,此称不稳定不动点。反之,如果 $|f'(x^*)| < 0$,再迭代一次离不动点更近,称稳定不动点。

这种非线性函数迭代与重正化变换非常类似。临界点至少应该是重正化变换的不动点,但不动点却不一定都是临界点。可以证明:只有不稳定不动点才是临界点。

1.3 重正化群

群是可以通过乘法联系到一起的一组变换。例如围绕定轴的各种转动构成一个群,转30°和转50°分别是这个群的一个元素,先转30°再转50°也是这个群的一个元素。连续两次变换(或叫两元素相乘)

维普资讯 http://www.cqvip.com

的结果等价于已经包括在群中的一个变换,这是构成群的主要特征。在上面线性链的例子中,可以先作一次变换,把b个格点归并成一个小元胞,再作一次变换把b个小元胞归并成一个大元胞。群的乘法规则可写为

$$R_b[R_b(P)] = R_b^2(P)。 \tag{7}$$

通常将R_b这些重正化变换的整体称为重正化群。作为一个群必须要有单位元素,即"什么事也不做"的"全同变换",在转动的变换群中,"不转"是单位元素。顺时针和反时针转同一角度的两个操作互为逆元素。没有逆元素的群称为半群。重正化群实际上是一种半群。

1.4 标度变换和普适性假定

标度变换就是自相似变换,如数学中的等角螺线$\rho=e^{a\theta}$具有标度不变性,即当图形放大或缩小时,只需转过一个角度就可与原来的曲线重合。海岸线在标度变换下具有无限嵌套的自相似性,在无限放大比例尺的情况下,海岸线的长度将趋于无穷。它没有面积而长度是无穷大。凝聚态物质在相变临界点附近,涨落的关联长度趋于无穷大,形象地说,我们无论用多大放大倍数的放大镜观察临界现象,所看到的图像都一样,只是所能看到的细节不同。正是这种"连环套"似的标度变换,使原来没有直接相互作用的粒子也关联起来了,个性逐渐退居次要地位,普适性愈益表露出来。

标度假定认为,关联长度ξ是唯一决定各物理量在临界温度附近奇异性质的量,意即临界现象是由各个大的自旋畴来决定,小范围内的细节对临界现象无影响。由于在临界点上关联长度趋于无穷,体系就具有标度不变性。好像用放大或缩小的方法总能把不同大小的诸多等角螺线变为同一个图形,标度假定反映了事物的本质。

卡丹诺夫在总结了大量实验事实的基础上,提出假定:各种物体体系可以划分为若干普适类,每个普适类的临界特性完全一样,区分普适类最重要的标志是空间维数D,其次是内部自由度数目n(或序参量的个数)。标度假定和普适性假定是突破平均场理论框架的两个新概念的飞跃。

应用重正化群方法分为三步:一是找到恰当的重正化变换,即标度变换;二是研究这个变换的不动点,找出与临界点有关的不动点和相应的参数;三是分析在这个不动点附近的变换性质,求出临界指数。

2 重正化群方法用于相变研究

相变研究的是包含大量粒子和复杂相互作用的多体问题。由于关联长度趋于无穷,必须同时考虑所有粒子从微观到宏观一切尺度的作用和影响。这正是困难所在,也是平均场理论失败的原因。相变是有序和无序两种倾向矛盾斗争的表现,热运动是无序的来源,相互作用是有序的起因,相变是一种倾向盖过另一种倾向时发生的突变。由于相变的具体机制是多种多样的,从经典的相互作用到宏观的量子效应,各种相变的相似之处远远超过它们之间的差异,相变理论的任务就在于透过个性,抓住共性,揭示和概括那些最普遍、最本质的规律。70年代,威尔逊把重正化群方法与相变理论中标度变换图像结合起来,在他创造性工作中关键的一步是把关联长度趋于无穷的临界点与重正化变换的不动点联系起来。

伊辛模型可作为一大类相变现象的代表,其哈密顿量写为

$$H = -J\sum_{(ij)}\sigma_i\sigma_j。$$

其中J是表示最邻近自旋间相互作用强度的参数。σ_i表示每个格点之上的自旋(磁矩),(ij)表示对一切最近邻求和。当然还可以考虑次近邻,再次近邻的作用,在哈密顿量中引入含参数$K,L\cdots$等的项。当给定体系一个哈密顿量H,就有一组确定的参数值,如$J=2,K=0.5\cdots$等,反之,对于特定类型的哈密顿量,给出一组参数值也就完全确定了哈密顿量本身。可以取J,K,L等为坐标轴,构成一个参数空间,其中每个点代表一个哈密顿量。重正化群作用的对象就是这样一个参数空间。原始的没有经过重正化变换的哈密顿量有一组参数值,可在参数空间中用一个点代表,经过变换以后的有效哈密顿量具有另一组参数值,由参数空间中另一点代表。这就可以形象地把重正化变换看成是参数空间中"代表点"的运动,称其运动轨迹为流向图。参数空间中"代表点"的运动受少数特殊点所控制,如在一维几何相变的例子

维普资讯 http://www.cqvip.com

中，不稳定的不动点控制“代表点”的运动，它正好对应临界点。如果哈密顿量有许多参数，某个确定的不动点可能对一部分参数（无关参数）是稳定的，而对另一些参数（有关参数）又是不稳定的，有这种性质的不动点称为“鞍点”，正是这类鞍点才对应相变的临界点。在相变研究中应用重正化群变换，实际包含两个步骤：第一步是把“放大镜”的分辨率降低，即将较小尺度上的运动状态平均掉；第二步将有旋变量等重新标度，使通过平均求得的有效哈密顿量又具有原来的形式。重正化即降低分辨率的办法很多，最直观的办法就是自旋集团归并。

当 $V<<C$ 时相对论力学还原为牛顿力学，对于宏观运动，当 $h=0$ 时量子力学还原为经典力学。重正化群理论也有一个“经典极限”，当空间维数 $D>4$ 时，它就化为朗道的平均场理论，可以说平均场理论是重正化群理论的“经典极限”和零级近似。重正化群理论抓住了连续相变的本质。

3　重正化群方法的应用拓伸

从统计物理的发展来看，合作现象的重要特点是存在转变点。在转变点上，一些热力学函数发散，另一些热力学函数则趋于0。重正化群方法是研究转变点附近临界现象的新的有力工具。特别是近几年来，Brezin 等人把重正化群方法与场论对应起来，使人们对临界现象的理解更加深入了一步。“湍流”是一种普遍的物理现象，也是当今未能解决的“老大难”问题，有人指出，重正化群概念和它背后的无穷嵌套几何图像，还将继续帮助我们去认识湍流[3]，总之，正像元激发，准粒子的概念刷新了疑聚态理论一样，对称性破缺和标度变换，重正化群理论将对其他科学产生深远的影响。

从哲学意义上看，临界现象在自然界和社会领域中是普遍存在的。临界点是事物发展进化过程中由量变到质变发生飞跃的“关节线”，研究和把握这“关节线”附近的内部结构，宏观表现和变化规律，对我们控制和疏导事物发展走向有着极为重要的意义。例如，我们可以用电子计算机建立相关模型，运用重正化群的理论方法，设计围棋对弈最佳方案，果树防病虫害优化植距，大范围民意倾向调查，宏观决策的微观支持，选举区域规划以及石油探测中渗流现象模拟研究等。

参　考　文　献

1　史美伦. 固体统计力学. 重庆：科学技术文献出版社重庆分社，1984. 246

2　Amit D J. Field Theory, the Renormalization Gnoup and Critical Phenomena. New Delhi: McGraw Hill, 1978. 63～81

3　于渌，郝柏林. 相变和临界现象. 北京：科学出版社，1992. 201

责任编辑　曾大刚

Method of Renormalization Group and Its Applications

Ma Zhikao

(Department of Physics, Northwest University, 710069, Xi'an)

Abstract　The theory of RG is a very important and effective method of modern physics. Its concepts and essence are expounded with the help of the "geometrical phase change". The relation between the critical point and the unstable fixed point is exposed by a comparison with the logistic mapping. The Method of RG is applied to the research on the phase change and to some fields of sociology.

Key words　transformation of RG; related distance; fixed point