一种新的直觉模糊集的熵

牛彩云,杨 勇,金 兰
NIU Cai-yun,YANG Yong,JIN Lan

西北师范大学 数学与信息科学学院,兰州 730070
College of Mathematics and Information Science,Northwest Normal University,Lanzhou 730070,China
E-mail:niucaiyunz@163.com

NIU Cai-yun,YANG Yong,JIN Lan.New entropy for intuitionistic fuzzy sets.Computer Engineering and Applications, 2009,45(34):32-34.

Abstract: Based on the concepts of intuitionistic fuzzy set and entropy by analying some problems existed in methods for calculating entropy of intuitionistic fuzzy sets,a new entropy for intuitionistic fuzzy sets is presented and its structure,properties are discussed.Compared with other existing entropies,it shows that the result of this entropy is among those of other methods.Therefore,it can make better limits to fuzziness of the fuzzy question and help people understand the fuzzy questions.Finally,its effectiveness is validated by some examples.
Key words: intuitionistic fuzzy sets;entropy;fuzziness

摘 要:通过分析现有直觉模糊熵计算方法中存在的一些问题,基于直觉模糊集理论和熵的概念,提出一种新的直觉模糊集的熵,给出它的结构、性质,并将其与现有的几种直觉模糊集的熵进行比较,发现其计算结果介于其他几种方法的计算结果之间,因而能够对模糊问题的模糊性做出更好的界定,有助于人们对模糊问题的理解和把握。最后,通过实例验证了它的有效性。
关键词:直觉模糊集;熵;模糊性
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2009.34.010 **文章编号:**1002-8331(2009)34-0032-03 **文献标识码:**A **中图分类号:**TP18

1 引言

直觉模糊集(intuitionistic fuzzy sets)最初是由 Atanassov 提出的用于描述和求解不确定、不精确、信息不完全的问题的概念[1-2],它从隶属度 $\mu_A(x)$ 和非隶属度 $\gamma_A(x)$ 两个方面研究模糊问题的本质。而直觉模糊集的熵是对直觉模糊集的模糊性的一种度量方法。直觉模糊集的最大特点是同时提供支持和反对的证据,因而能更有效地刻画不确定信息,但这也导致了它的模糊性来自两个方面,一是来自数据的未知信息 $1-\mu_A(x)-\gamma_A(x)$;二是来自数据本身的不确定性[3]。

Gau 等[4]在 1993 年提出 Vague 集,它用一个真隶属函数 $t_A(u)$ 和一个假隶属函数 $f_A(u)$ 来描述隶属度的边界,这两个边界就构成[0,1]的一个子区间 $[t_A(u),1-f_A(u)]$,其中一个对象的支持度、反对度和未知度分别为 $t_A(u)$、$f_A(u)$ 和 $1-f_A(u)$。1996 年BUSTINCE[5]又得出"Vague 集就是直觉模糊集"的结论,因此,Vague 集的熵就是直觉模糊集的熵。

文献[6-7]从不同角度定义了直觉模糊集熵的概念,但厚此薄彼。鉴于此,刘云生教授提出一种同时考虑上述两种因素的 Vague 集熵的定义准则及计算公式[8]。基于对上述文献的研究学习,提出了一种新的直觉模糊集熵的计算方法,而且这种熵的结构是结合上述两种因素提出的,且通过比较研究发现,其计算结果介于其他几种直觉模糊集熵的计算结果之间,因而它更具有实用性。

2 预备知识

直觉模糊集是对经典模糊集的扩充,增加了一个新的属性参数:非隶属度函数,能够更加细腻地描述和刻画客观世界的模糊性本质。

定义 1[1-2] 设 U 是一个给定的有限论域,则 U 上的一个直觉模糊集 A 为 $A=\{<x,\mu_A(x),\gamma_A(x)>|x\in U\}$,其中,$\mu_A(x):U\to[0,1]$ 和 $\gamma_A(x):U\to[0,1]$ 分别代表 A 的隶属函数和非隶属函数,且对于 A 上的所有 $x\in U$,$0\leqslant\mu_A(x)+\gamma_A(x)\leqslant 1$ 成立。

直觉模糊集 A 的补集可表示为 A^C,且 $A^C=\{<x,\gamma_A(x),\mu_A(x)>|x\in U\}$。

当 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为离散空间时,$A=\sum_{i=1}^{n}<\mu_A(x_i),\gamma_A(x_i)>/$

基金项目:国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10771171);兰州市科技攻关计划(the Key Technologies R&D Program of Lanzhou City,China under Grant No.2008-1-34)。
作者简介:牛彩云(1981-),女,硕士,主要研究领域为:数据挖掘与粗糙集理论;杨勇(1967-),男,博士,副教授,主要研究领域为:数据挖掘与粗糙集理论;金兰(1981-),女,硕士,主要研究领域为:数据挖掘与粗糙集理论。
收稿日期:2009-06-25 **修回日期:**2009-10-09

$x_i, x_i \in U, i=1,2,\cdots,n$。直觉模糊集 A 可简记作 $A=\langle x,\mu_A(x),\gamma_A(x)\rangle$ 或 $A=\langle \mu_A(x),\gamma_A(x)\rangle/x$。$U$ 上所有直觉模糊用 $IFSs(U)$ 表示。

对 U 中的直觉模糊集 A,那么称 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\gamma_A(x)$ 为 A 中 x 的直觉指数,它是 x 对 A 的犹豫程度的一种测量,表示"非此非彼"的中立状态。

定义 2[6,9] 设 U 是给定的论域,A 是 U 上的直觉模糊集,称函数 $E:IFSs(U)\to[0,1]$ 为直觉模糊集 A 的熵,如果满足下列 4 条准则:

(1)$E(A)=0$ iff A 为经典集;

(2)$E(A)=1$ iff $\mu_A(x_i)=\gamma_A(x_i)$, $\forall x_i\in U$;

(3)当 $\mu_A(x_i)\leqslant\gamma_A(x_i)$ 时,若有 $\mu_{A^*}(x)\leqslant\mu_A(x)$ 且 $\gamma_{A^*}(x)\geqslant\gamma_A(x)$,或当 $\mu_A(x)\geqslant\gamma_A(x)$ 时,若有 $\mu_{A^*}(x)\geqslant\mu_A(x)$ 且 $\gamma_{A^*}(x)\leqslant\gamma_A(x)$,则都有 $E(A^*)\leqslant E(A)$;

(4)$E(A)=E(A^C)$。

3　现有直觉模糊集熵计算方法存在的问题

例 1 若直觉模糊集 $A_1=\langle 0.1,0.6\rangle/x$,$A_2=\langle 0.2,0.6\rangle/x$,此时,$\pi_{A_1}=0.3$,$\pi_{A_2}=0.2$,按照文献[10]中的计算方法,有 $E_1(A_1)=\dfrac{\pi_{A_1}+1-\left|\mu_{A_1}^2-\gamma_{A_1}^2\right|}{\pi_{A_1}+1+\left|\mu_{A_1}^2-\gamma_{A_1}^2\right|}=0.576$,$E_2(A_2)=0.579$,而按照文献[10]中的定义 1 的条件(4),若 $\mu_{A_1}\neq\gamma_{A_1}$,$\mu_{A_2}\neq\gamma_{A_2}$ 则当 $\pi_{A_1}>\pi_{A_2}$ 时,应当有 $E_1(A_1)>E_2(A_2)$,与计算结果不一致。因此文献[10]中关于直觉模糊熵的定义存在缺陷。而且,其定理 1 中关于条件(4)的证明也不合理。

另外,可以发现,对同一个直觉模糊集,各种熵的计算方法得出的结果可能相差较大。这样,影响人们对该问题模糊性的理解,如例 2。

例 2 若直觉模糊集 $A=\langle 0.2,0.7\rangle/x$,由文献[7]计得 $E_2(A)=1-\dfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(x)-\gamma_A(x)|+\mu_A(x)+\gamma_A(x)\right)=0.300$,而文献[11]得 $E_3(A)=\dfrac{1}{\ln 2}\left(-\dfrac{\mu_A(x)+1-\gamma_A(x)}{2}\ln\dfrac{\mu_A(x)+1-\gamma_A(x)}{2}-\dfrac{\gamma_A(x)+1-\mu_A(x)}{2}\ln\dfrac{\gamma_A(x)+1-\mu_A(x)}{2}\right)=0.811$,这样,人们对该问题的模糊性很难做出直观的认识,对其模糊性的界定也难把握。

基于上述存在的问题,该文参考文献[6,9]关于直觉模糊熵的定义,提出一种新的直觉模糊集的熵。

4　一种新的直觉模糊集的熵

定义 3 A 是 $U=\{x\}$ 上的直觉模糊集,即 $A=\langle\mu_A(x),\gamma_A(x)\rangle/x$,令 $E(A)$ 为

$$E(A)=\frac{1-(\mu_A(x)-\gamma_A(x))^2+\pi_A^2(x)}{1+(\mu_A(x)-\gamma_A(x))^2+\pi_A^2(x)}$$

定理 1 $E(A)$ 满足熵的四条准则。

证明 因为 $0\leqslant\mu_A(x),\gamma_A(x),\pi_A(x)\leqslant1$,所以 $0\leqslant1-(\mu_A(x)-\gamma_A(x))^2+\pi_A^2(x)\leqslant1+(\mu_A(x)-\gamma_A(x))^2+\pi_A^2(x)$,从而 $0\leqslant\dfrac{1-(\mu_A(x)-\gamma_A(x))^2+\pi_A^2(x)}{1+(\mu_A(x)-\gamma_A(x))^2+\pi_A^2(x)}\leqslant1$,即 $0\leqslant E(A)\leqslant1$。以下是 4 条准则的证明:

(1)若 $E(A)=0$,则 $1-(\mu_A(x)-\gamma_A(x))^2+\pi_A^2(x)=0$,由 $1=(\mu_A(x)-\gamma_A(x))^2-\pi_A^2(x)$,可得 $(\mu_A(x)-\gamma_A(x))^2=1$ 且 $\pi_A(x)=0$,即 $\mu_A(x)=1,\gamma_A(x)=0$,或者 $\mu_A(x)=0,\gamma_A(x)=1$,于是知 A 为经典集;若 A 为经典集,显然有 $E(A)=0$。

(2),(4)显然。

(3)因为 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\gamma_A(x)$,上述 $E(A)$ 可化为:$E(A)=\dfrac{1+2\mu_A(x)\gamma_A(x)-\mu_A(x)-\gamma_A(x)}{1+\mu_A^2(x)+\gamma_A^2(x)-\mu_A(x)-\gamma_A(x)}$。

当 $\mu_A(x)\leqslant\gamma_A(x)$ 时,则 $0\leqslant\mu_A(x)\leqslant1/2$ 且 $0\leqslant\gamma_A(x)\leqslant1$,$E(A)$ 关于 $\gamma_A(x)$ 求偏导数得

$$\frac{\partial E}{\partial r}=\frac{(\mu_A(x)-\gamma_A(x))[(1-\mu_A(x)-\gamma_A(x))(1-2\mu_A(x))+1]}{(1+\mu_A^2(x)+\gamma_A^2(x)-\mu_A(x)-\gamma_A(x))^2}$$

此时 $\mu_A(x)-\gamma_A(x)\leqslant0$,$1-2\mu_A(x)\geqslant0$,$1-\mu_A(x)-\gamma_A(x)\geqslant0$,于是知 $\dfrac{\partial E}{\partial r}\leqslant0$,因此,$E(A)$ 是关于 $\gamma_A(x)$ 的减函数。同理可知,$E(A)$ 是关于 $\mu_A(x_i)$ 的增函数。故当 $\mu_{A^*}(x)\leqslant\mu_A(x)$ 且 $\gamma_{A^*}(x)\geqslant\gamma_A(x)$ 时,有 $E(A^*)\leqslant E(A)$。

同理,当 $\mu_A(x)\geqslant\gamma_A(x)$ 时,该准则成立。

上面提出的熵的计算方法满足刘云生在文献[8]中提出的以下性质:

定理 2 若 A 是 U 上的直觉模糊集,则 $E(A)$ 是关于 $\left|\mu_A(x)-\gamma_A(x)\right|$ 的减函数,关于 $\pi_A(x)$ 的增函数。

证明 令 $\left|\mu_A(x)-\gamma_A(x)\right|=x$,$\pi_A(x)=y$,则 $E(A)=f(x,y)=\dfrac{1-x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$,$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{-4x(1+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\leqslant0$,$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{4x^2y}{(1+x^2+y^2)^2}\geqslant0$,因此,$f(x,y)$ 是关于 x 的减函数,关于 y 的增函数。

该性质与刘云生教授提出的 Vague 熵所具备的性质相吻合,既考虑到未知信息对直觉模糊集熵的影响,又考虑了不确定信息对熵的影响,大大增加了它的适用范围,而且,它是通过直觉模糊集熵的三维图形表示方法加以证明的,合乎实际情况,对直觉模糊集上熵理论的研究具有重要的作用。

定理 3 设 A 是 U 上的直觉模糊集,则有 $E(A)\geqslant E_4(A)$。其中 $E_4(A)$ 为文献[8]中熵的计算方法

$$E_4(A)=\frac{1-\left|\mu_A(x)-\gamma_A(x)\right|+\pi_A(x)}{1+\left|\mu_A(x)-\gamma_A(x)\right|+\pi_A(x)}$$

证明 令 $\left|\mu_A(x)-\gamma_A(x)\right|=x$,$\pi_A(x)=y$,则上述不等式化 $\dfrac{1-x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\geqslant\dfrac{1-x+y}{1+x+y}$。由 $x\leqslant1-y$,可得 $(y+1)(x-y+1)\leqslant(y+1)(1-y+1-y)$,又 $(y+1)(1-y+1-y)=2(1-y^2)\leqslant2$,有 $(y+1)(x-y+1)\leqslant2$,得 $1+y^2-x(y+1)\geqslant0$,从而 $x(1+y^2)-x^2(1+y)\geqslant0$,亦即 $2x-2x^2-2x^2y+2xy^2\geqslant0$,有 $1+x+y-x^2-x^3-x^2y+y^2+xy^2+y^3\geqslant1-x+y+x^2-x^3+x^2y+y^2-xy^2+y^3$,等价于 $(1-x^2+y^2)(1+x+y)\geqslant(1+x^2+y^2)(1-x+y)$,从而 $\dfrac{1-x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\geqslant\dfrac{1-x+y}{1+x+y}$。

定理 4 设 A 是 U 上的直觉模糊集,则有 $E(A)\geqslant E_5(A)$。其中 $E_5(A)$ 为文献[12]中熵的计算方法

$$E_5(A)=\frac{2\mu_A(x)\gamma_A(x)+\pi_A^2(x)}{\mu_A^2(x)+\gamma_A^2(x)+\pi_A^2(x)}$$

证明 因为函数 $f(t)=\frac{a+t}{b+t}$,当 $a\leqslant b$ 时是关于 t 的增函数,又 $\pi_A(x)\geqslant\pi_A^2(x)$,所以

$$E(A)=\frac{1-(\mu_A(x)-\gamma_A(x))^2+\pi_A^2(x)}{1+(\mu_A(x)-\gamma_A(x))^2+\pi_A^2(x)}=$$

$$\frac{2\mu_A(x)\gamma_A(x)+\pi_A(x)}{\mu_A^2(x)+\gamma_A^2(x)+\pi_A(x)}\geqslant$$

$$\frac{2\mu_A(x)\gamma_A(x)+\pi_A^2(x)}{\mu_A^2(x)+\gamma_A^2(x)+\pi_A^2(x)}=E_5(A)$$

根据定理 3 和定理 4,文献[8]和文献[12]所提出的熵的计算方法所计算的直觉模糊集的熵的数据普遍偏低,而该文新提出的熵的所得结果较高。

定理 5 设 A 是 U 上的直觉模糊集,则有 $E(A)\leqslant E_3(A)$,其中 $E_3(A)$为文献[11]中熵的计算方法

$$E_3(A)=\frac{1}{\ln 2}\Big[-\frac{\mu_A(x)+1-\gamma_A(x)}{2}\ln\frac{\mu_A(x)+1-\gamma_A(x)}{2}-\frac{\gamma_A(x)+1-\mu_A(x)}{2}\ln\frac{\gamma_A(x)+1-\mu_A(x)}{2}\Big]$$

证明 令 $F(\mu_A,\gamma_A,\pi_A)=E(A)-E_3(A)$,即

$$F(\mu_A,\gamma_A,\pi_A)=\frac{1-(\mu_A-\gamma_A)^2+\pi_A^2}{1+(\mu_A-\gamma_A)^2+\pi_A^2}+\frac{1}{2\ln 2}[(\mu_A+1-\gamma_A)\ln(\mu_A+1-\gamma_A)+(\gamma_A+1-\mu_A)\ln(\gamma_A+1-\mu_A)]-1$$

下面求函数 F 在约束条件 $\mu_A(x)+\gamma_A(x)+\pi_A(x)=1$ 下的条件极值,为此先做出 Lagrange 函数

$$L(\mu_A,\gamma_A,\pi_A,\lambda)=\frac{1-(\mu_A-\gamma_A)^2+\pi_A^2}{1+(\mu_A-\gamma_A)^2+\pi_A^2}+\frac{1}{2\ln 2}[(\mu_A+1-\gamma_A)\ln(\mu_A+1-\gamma_A)+(\gamma_A+1-\mu_A)\ln(\gamma_A+1-\mu_A)]-1+\lambda(\mu_A+\gamma_A+\pi_A-1)$$

得到相应的方程组

$$\begin{cases}L_\mu=\dfrac{-4(\mu_A-\gamma_A)(1+\pi_A^2)}{(1+(\mu_A-\gamma_A)^2+\pi_A^2)^2}+\dfrac{1}{2\ln 2}\ln\dfrac{\mu_A(x)-\gamma_A(x)+1}{\gamma_A(x)-\mu_A(x)+1}+\lambda=0 & (1)\\ L_\gamma=\dfrac{-4(\gamma_A-\mu_A)(1+\pi_A^2)}{(1+(\mu_A-\gamma_A)^2+\pi_A^2)^2}+\dfrac{1}{2\ln 2}\ln\dfrac{\gamma_A(x)-\mu_A(x)+1}{\mu_A(x)-\gamma_A(x)+1}+\lambda=0 & (2)\\ L_\pi=\dfrac{-4\pi_A(\mu_A-\gamma_A)^2}{(1+(\mu_A-\gamma_A)^2+\pi_A^2)^2}+\lambda=0 & (3)\\ \mu_A+\gamma_A+\pi_A=1 & (4)\end{cases}$$

从而可得 $F(\mu_A,\gamma_A,\pi_A)\leqslant 0$,即 $E(A)\leqslant E_3(A)$。

这表明,新提出的熵的计算结果又低于文献[11]所计算的结果。

综上,提出的直觉模糊集的熵计算结果介于文献[8,12]和文献[11]的计算结果之间,能够较合理地对直觉模糊集的熵加以定量描述,更有助于人们对直觉模糊集的模糊性的把握。

定义 4 对具有 n 个元素的直觉模糊集 $A=A_1+A_2+\cdots+A_n$,令 $E(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(A_i)$。

前面提到的熵均是针对具有单个元素的直觉模糊集提出的,此定义给出了对具有多个元素的直觉模糊集其熵的计算方法。

5 对现有直觉模糊集熵计算方法存在问题的改进

例 3 若直觉模糊集 $A_1=\langle 0.1,0.2\rangle/x$,$A_2=\langle 0.1,0.6\rangle/x$,$A_3=\langle 0.1,0.7\rangle/x$,$A_4=\langle 0.2,0.5\rangle/x$,$A_5=\langle 0.2,0.6\rangle/x$,$A_6=\langle 0.2,0.7\rangle/x$,$A_7=\langle 0.3,0.1\rangle/x$,$A_8=\langle 0.3,0.2\rangle/x$,用 $E_1(A_i)$、$E_2(A_i)$、$E_3(A_i)$、$E_4(A_i)$、$E_5(A_i)$和 $E(A_i)$分别表示文献[10]、文献[7]、文献[11]、文献[8]、文献[12]和该文中熵计算公式,根据不同方法计算所得熵如表 1。

表 1 现有几种直觉模糊熵比较分析表

	$E_1(A_i)$	$E_2(A_i)$	$E_3(A_i)$	$E_4(A_i)$	$E_5(A_i)$	$E(A_i)$
A_1	0.965	0.8	0.993	0.889	0.981	0.987
A_2	0.576	0.4	0.811	0.444	0.457	0.627
A_3	0.429	0.3	0.722	0.333	0.333	0.486
A_4	0.625	0.5	0.934	0.625	0.763	0.847
A_5	0.500	0.4	0.881	0.500	0.636	0.733
A_6	0.375	0.3	0.811	0.375	0.537	0.603
A_7	0.778	0.7	0.971	0.778	0.913	0.943
A_8	0.935	0.7	0.993	0.875	0.974	0.984

对表 1 进行分析如下:

首先,可以明显看出对同一直觉模糊集,文献[11]计算得到的结果普遍偏高,对熵的界定过大,文献[8,12]所得结果又普遍偏低,而该文所提出的新的直觉模糊集的熵介于上述两者之间,对直觉模糊集熵的模糊性的定量界定较合理,有助于人们对直觉模糊集熵的认识和理解。例如,对直觉模糊集 A_6,由文献[11]得 $E_3(A_3)=0.811$,而由文献[7]计算得 $E_2(A_6)=0.300$。文献[11]对于熵的界定过大,而文献[7]对于熵的界定过小。而由该文得到 $E(A_3)=0.603$,介于前两者之间。

其次,由文献[11]的方法求得 $E_3(A_1)=E_3(A_8)=0.993$,显然不合常理,且与定理 2 不符。而由该文提出的计算方法得,$E(A_3)=0.987$,$E(A_4)=0.984$,符合常理,且与定理 2 相符。而且,同样的问题存在于 $E_2(A_7)$与 $E_2(A_8)$、$E_2(A_3)$与 $E_2(A_6)$等中。

最后,新提出的熵对文献[10]中提出的熵进行了纠正。例如,由该文计算得 $E(A_2)=0.627$,$E(A_5)=0.733$,尽管此时有 $\pi_{A_2}(x)>\pi_{A_5}$,然而 $E(A_2)<E(A_5)$,说明文献[10]中关于熵的定义 1 的条件(4)存在问题。应当在条件(4)中附加条件 $|\mu_A-\gamma_A|=|\mu_B-\gamma_B|$时才成立。

6 结束语

提出一种新的直觉模糊集的熵,它满足直觉模糊集熵的 4 条基本准则,讨论了和其他几种直觉模糊集的熵之间存在的关系,进而发现这种新的直觉模糊集的熵计算结果介于其他几种熵的计算结果之间,能够较合理的对直觉模糊集的模糊性加以界定,而且计算结果合乎人们对直觉模糊集的模糊性的直观理解。

参考文献:

[1] Atanassov K.Intuitionistic fuzzy sets[J].Fuzzy Sets Systems,1986,20(1):87-96.

(下转 37 页)