§2　方程求根

- §2.0　引言
- §2.1　二分法
- §2.2　迭代法
- §2.3　牛顿(Newton)法
- §2.4　迭代过程的加速方法

前页 后页 返回

§2.0 引 言

方程是在科学研究中不可缺少的工具 $f(x)=0$

方程求解是科学计算中一个重要的研究对象

几百年前就已经找到了代数方程中二次至四次方程的求解公式

但是,对于更高次数的代数方程目前仍无有效的精确解法

对于无规律的非代数方程的求解也无精确解法

因此,研究非线性方程的数值解法成为必然

本节主要研究单根区间上方程求根的各种近似算法

§2.1　二分法

第1节　基本概念与定理

第2节　二分法原理

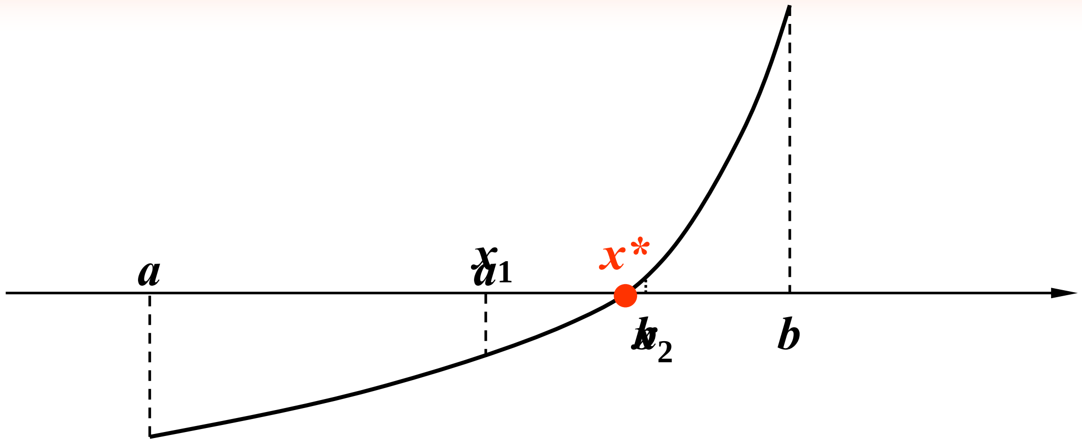
第3节　算例分析

第二章 方程求根--二分法

求 $f(x) = 0$ 的根

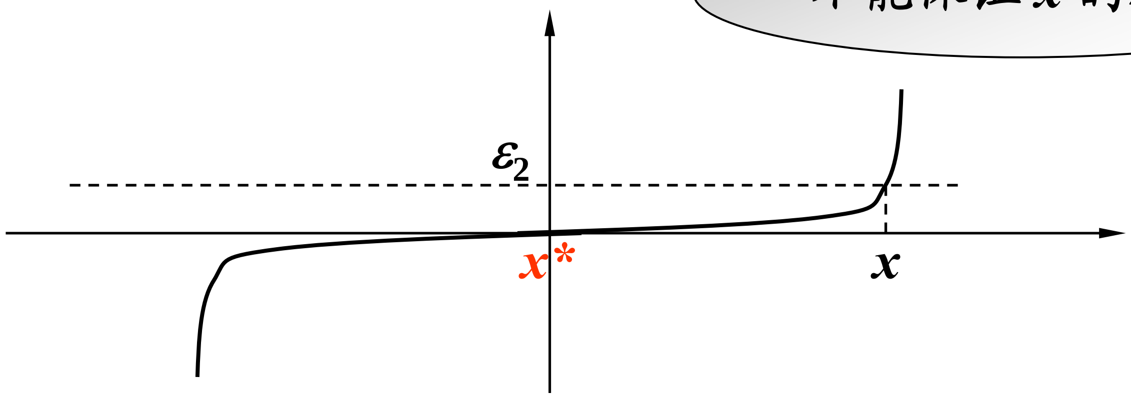
§2.1 二分法

原理: 若 $f \in C[a, b]$，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则 f 在 (a, b) 上必有一根。



$$|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon_1 \quad 或 \quad |f(x)|<\varepsilon_2$$

不能保证 x 的精度



前页 后页 返回

算法

算法 (二分法)

给定有根区间 $[a, b]$ ($f(a)\cdot f(b) < 0$) 和 精度要求 ε

1. 令 $x = (a+b)/2$

2. 如果 $b - a < \varepsilon$ 或 $f(x) < \varepsilon$, 停机，输出 x

3. 如果 $f(a)f(x) < 0$, 则令 $b = x$，否则令 $a = x$, 返回第1步

用二分法求根，通常先给出 $f(x)$ 草图以确定根的大概位置。

误差分析

记 $a_1 = a, b_1 = b$, 第 k 步的有根区间为 $[a_k, b_k]$

$$|x_k - x^*| = \left|\frac{b_k + a_k}{2} - x^*\right| \le \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{4} = \cdots = \frac{b_1 - a_1}{2^k}$$

对于给定的精度 ε,可估计二分法所需的步数 k：

$$\frac{b-a}{2^k} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad k > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}, \qquad \text{取} \quad k = \left\lceil \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \right\rceil$$

- ✓ 简单易用
- ✓ 对 $f(x)$ 要求不高，只要连续即可

- ✓ 收敛速度慢
- ✓ 无法求复根及偶重根

前页 后页 返回

例：求 $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ 在 (1, 1.5) 的实根，

要求误差不超过0.005。

STEP 0	输入a,b,eps1,eps2 y0=f(a)
STEP 1	x=(a+b)/2 ,y=f(x)
STEP 2	判断：(b-a)/2<eps1否 若是，goto step 4 否则，执行下一步
STEP 3	若y.y0>0,则a=x, 否则 b=x. goto step 1
STEP 4	输出x,y,停机

前页 后页 返回

§2.2　迭代法

第1节　迭代原理

第2节　迭代过程收敛性

第3节　迭代法的收敛速度

第4节　算例分析

第1节　迭代原理

$$f(x)=0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x=\varphi(x)$$

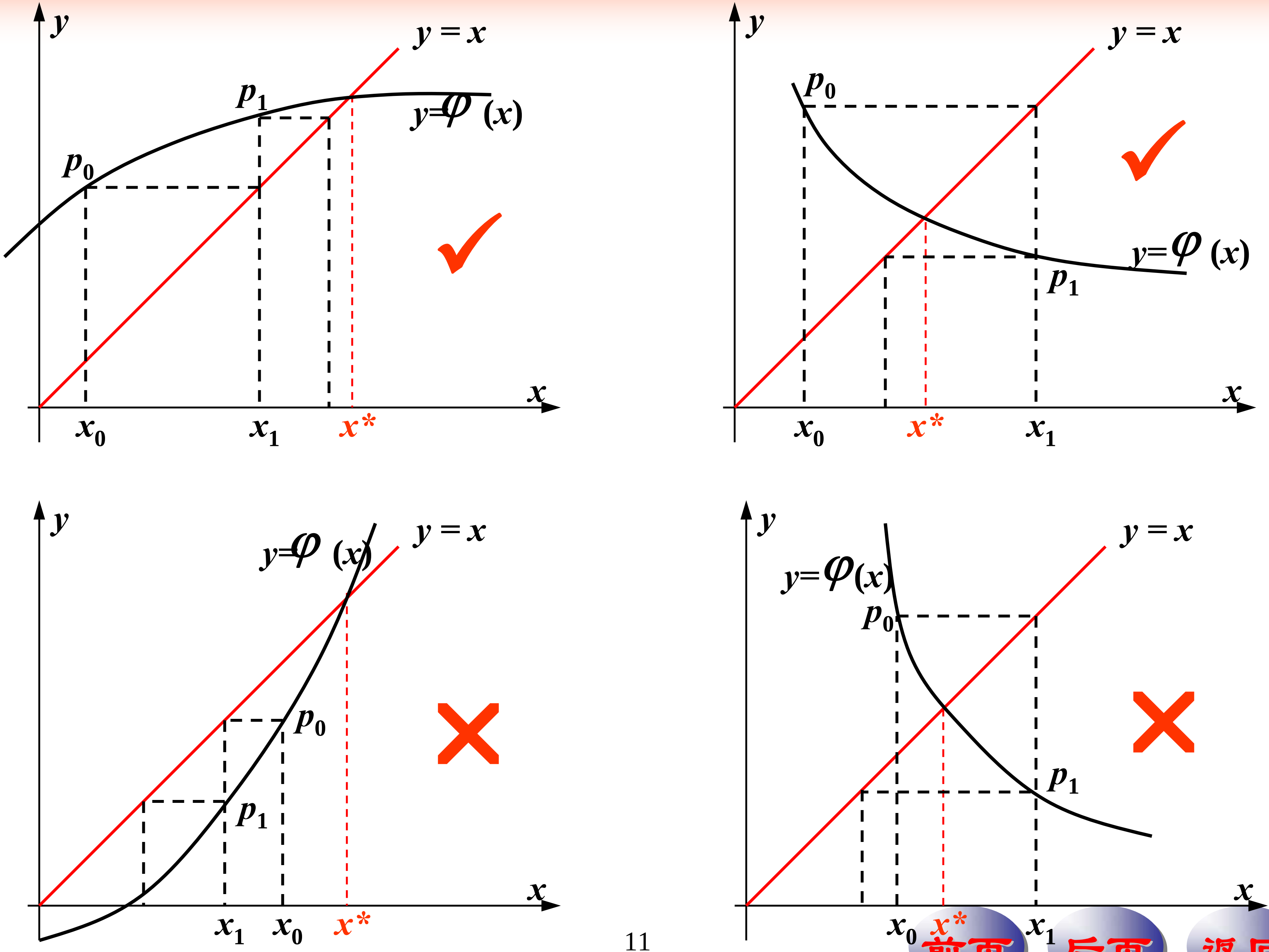
$f(x)$ 的根 $\longleftrightarrow$ $\varphi(x)$的不动点

思路

从一个初值 x_0 出发，计算 $x_1=\varphi(x_0)$, $x_2=\varphi(x_1)$, …, $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, … 若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即存在 x^* 使得

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，且 φ 连续，则由 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x_k)$

可知 $x^*=\varphi(x^*)$，即x^*是 φ 的不动点，也就是f 的根。



前页 后页 返回

例1. 用迭代法求解方程 $2x^3 - x - 1 = 0$

解: (1) 将原方程化为等价方程

$$x = 2x^3 - 1$$

如果取初值$x_0 = 0$,由迭代法,得

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 2x_0^3 - 1 = -1$$

$$x_2 = 2x_1^3 - 1 = -3$$

$$x_3 = 2x_2^3 - 1 = -55$$

………

显然迭代法发散

前页 后页 返回

(2) 如果将原方程化为等价方程

$$x = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$$

仍取初值 $x_0 = 0$

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{x_0+1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0.7937$$

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{x_1+1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1.7937}{2}} \approx 0.9644$$

依此类推,得

x2 = 0.9644
x3 = 0.9940
x4 = 0.9990
x5 = 0.9998
x6 = 1.0000
x7 = 1.0000

已经收敛,故原方程的解为

$$x = 1.0000$$

同样的方程
不同的迭代格式
有不同的结果

迭代函数的构造有关

什么形式的迭代法
能够收敛呢?

第2节　迭代过程收敛性

定理　设迭代函数$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，且满足

(1) 当$x\in[a,b]$时，$a\le\varphi(x)\le b$;

(2) 存在一正数 L，满足 $0<L<1$，且$\forall x\in[a,b]$，有

$$|\varphi'(x)|\le L \qquad \text{--------(1)}$$

则1^o. 方程$x=\varphi(x)$在$[a,b]$内有唯一解 x^*

2^o.对于任意初值$x_0\in[a,b]$，迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$均收敛于x^*

(局部收敛性)

$$3^o.\ |x_k-x^*|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}| \qquad \text{--------(2)}$$

$$4^o.\ |x_k-x^*|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \qquad \text{--------(3)}$$

证: 设$f(x)=x-\varphi(x)$, 则$f(x)$在$[a,b]$上连续可导

由条件(1) $$f(a)=a-\varphi(a)\le 0$$
$$f(b)=b-\varphi(b)\ge 0$$

由根的存在定理, 方程$f(x)=0$在$[a,b]$上至少有一个根

由 $$|\varphi'(x)|\le L<1$$

$$f'(x)=1-\varphi'(x)>0$$

则$f(x)$在$[a,b]$上单调递增, $f(x)=0$在$[a,b]$上仅有一个根

所以 1^o. 方程$x=\varphi(x)$在$[a,b]$内有唯一解 x^*

2^o. 对于迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, 由微分中值定理

$$x_{k+1}-x^* = \varphi(x_k)-\varphi(x^*) = \varphi'(\xi)(x_k-x^*)$$

$$x_{k+1}-x_k = \varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1}) = \varphi'(\bar{\xi})(x_k-x_{k-1})$$

由于 $|\varphi'(x)|\le L$

$$\left|x_{k+1}-x_k\right|\le L\left|x_k-x_{k-1}\right|$$

$$\left|x_{k+1}-x^*\right| \le L\left|x_k-x^*\right| = L\left|x_{k+1}-x^*-(x_{k+1}-x_k)\right|$$

$$\le L\left|x_{k+1}-x^*\right|+L\left|(x_{k+1}-x_k)\right|$$

$$|x_{k+1}-x^*|\le\frac{L}{1-L}|x_{k+1}-x_k|$$

$$|x_k - x^*| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|$$

$$\le \frac{L^2}{1-L}|x_{k-1} - x_{k-2}|$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

由于 $L < 1$, $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k - x^*) = 0$

因此对任意初值 x_0,迭代法 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 均收敛于 x^*

$$|x_k - x^*| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

证毕.

定理指出， 只要构造的迭代函数满足

$$|\varphi'(x)| \le L < 1$$

此时虽收敛但不一定是唯一根

迭代法 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 就收敛

对于预先给定的误差限 ε 即要求 $|x_k - x^*| < \varepsilon$

只要

$$\frac{L}{1-L}\left| x_k - x_{k-1} \right| < \varepsilon$$

因此,当 $\left| x_k - x_{k-1} \right| < \dfrac{1-L}{L}\varepsilon \approx \varepsilon$

迭代就可以终止， x_k 可以作为方程的近似解

例2. 用迭代法求方程的近似解,精确到小数点后6位

$$e^x + 10x - 2 = 0$$

解: 由于 $e^x > 0$， 则 $2 - 10x > 0$ $x < 0.2$

$x < 0$时， $0 < e^x < 1$， $2 - 10x > 2$

因此 $[0,0.2]$为有根区间

本题迭代函数有两种构造形式

$$x = \varphi_1(x) = \frac{2 - e^x}{10} \qquad x = \varphi_2(x) = \ln(2 - 10x)$$

由于 $|\varphi_1'(x)| = \dfrac{e^x}{10} < \dfrac{e^{0.2}}{10} < 1$ $|\varphi_2'(x)| = \dfrac{10}{2 - 10x} \geq 5$

因此采用迭代函数 $x = \varphi_1(x) = \dfrac{2 - e^x}{10}$

取初值 $x_0 = 0$

$$x_1 = \frac{2 - e^{x_0}}{10} = 0.1$$

x1 = 0.1000000	d1 = 0.1000000
x2 = 0.0894829	d2 = -0.0105171
x3 = 0.0906391	d3 = 0.1156e-002
x4 = 0.0905126	d4 = -0.1265e-003
x5 = 0.0905265	d5 = 0.1390e-004
x6 = 0.0905250	d6 = -0.1500e-005
x7 = 0.0905251	d7 = 0.1000e-006

由于|d7| =0.1000e-006<1e-6

因此原方程的解为 $x^* \approx$ x7 = 0.090525

第3节　迭代法的收敛速度

L或$|\varphi'(x)|$在$[a,b]$上越小，迭代法收敛就越快

设$e_k = |x_k - x^*|$

定义1.　若存在实数 $p \geq 1$和$c > 0$满足

$$\lim_{k \to \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = c$$

则称迭代法p阶收敛,当$p = 1$时称为线性收敛,$p > 1$时称为超线性收敛,$p = 2$时称为平方收敛

显然,p越大,收敛速度也就越快

前页　后页　返回

那么,如何确定p,从而确定收敛阶呢？　不可能直接确定

如果迭代函数$\varphi(x)$在精确解x^*处充分光滑,即处处可导

将$\varphi(x)$在x^*作Taylor展开,有

$$\varphi(x)=\varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x-x^*)+\frac{\varphi''(x^*)}{2!}(x-x^*)^2+\cdots$$

$$+\frac{\varphi^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}(x-x^*)^{p-1}+\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}(x-x^*)^p+\cdots$$

如果$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$　而$\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$

$$\varphi(x)=\varphi(x^*)+\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}(x-x^*)^p+\cdots$$

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}(x_k-x^*)^p+\cdots$$

$$x_{k+1}-x^*=\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}(x_k-x^*)^p+\frac{\varphi^{(p+1)}(x^*)}{(p+1)!}(x_k-x^*)^{p+1}+\cdots$$

$$\frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k-x^*|^p}=\left|\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}+\frac{\varphi^{(p+1)}(x^*)}{(p+1)!}(x_k-x^*)+\cdots\right|\to\left|\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}\right|,(k\to\infty)$$

即迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$的收敛阶是p

定理2. 如果迭代法迭代函数 $\varphi(x)$在根x^*附近满足：

(1) $\varphi(x)$存在p阶导数且连续；

(2) $\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$， 而$\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$

则迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$的收敛阶是p

例3. 设x^*是方程$f(x)=0$的$m(\geq 2)$重根,证明迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

为线性收敛

证明: 因为x^*是方程$f(x)=0$的m重根,故

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x) \qquad 且g(x^*)\neq 0, m\geq 2$$

所以 $$f'(x)=m(x-x^*)^{m-1}g(x)+(x-x^*)^m g'(x)$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{(x_k-x^*)^m g(x_k)}{m(x_k-x^*)^{m-1}g(x_k)+(x_k-x^*)^m g'(x_k)}$$

$$=x_k-\frac{(x_k-x^*)g(x_k)}{mg(x_k)+(x_k-x^*)g'(x_k)}$$

$$x_{k+1}-x^*=(x_k-x^*)(1-\frac{g(x_k)}{mg(x_k)+(x_k-x^*)g'(x_k)})$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}=\lim_{k\to\infty}(1-\frac{g(x_k)}{mg(x_k)+(x_k-x^*)g'(x_k)})=1-\frac{1}{m}$$

$m\geq 2$时,$1-\frac{1}{m}>0$

该迭代法对$m(\geq 2)$重根是线性收敛的

例4. 设$f(a)=0$,且$f'(a)\neq 0$,证明迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$ 至少是平方收敛的

注意例4与例3的迭代法是相同的,两例有何区别?

证明: 令 $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

则 $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = -\dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$

所以 $\varphi'(a) = 0$

由定理2 该迭代法至少是平方收敛的

全局收敛与局部收敛

- 定理的条件保证了不动点迭代的**全局收敛性**。

  即迭代的收敛性与初始点的选取无关。

定理中的条件 $|\varphi'(x)|\le L<1$ 可以适当放宽

$\boxed{(2')\ \varphi'(x)\text{ 在 } x^*\text{ 的某个邻域内连续，且 } |\varphi'(x^*)|<1}$

由 $\varphi'(x)$ 的连续性及 $|\varphi'(x^*)|<1$ 即可推出：

> 存在 x^* 的某个 δ 邻域 $N(x^*)=[x^*-\delta,\ x^*+\delta]$，使得对 $\forall\, x\in N(x^*)$ 都有 $|\varphi'(x)|\le L<1$，则由 $\forall x_0\in N(x^*)$ 开始的迭代都收敛。

- 这种在 x^* 的邻域内具有的收敛性称为**局部收敛性**。

§2.3　牛顿(Newton)法

第1节　牛顿法的基本思想

第2节　牛顿法的收敛速度

第3节　牛顿下山法

第4节　算例分析

第1节　牛顿法的基本思想

1. 原理：将非线性方程

$$f(x)=0$$

逐步线性化而形成迭代公式.

取 $x_0 \approx x^*$，将 $f(x)$在 x_0 做一阶Taylor展开：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,$$ ξ在 x_0 和 x 之间。

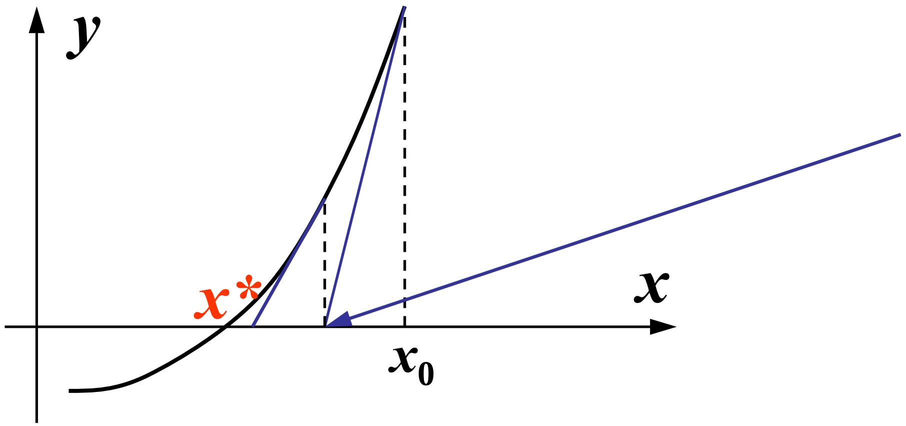
将 $(x^*-x_0)^2$ 看成高阶小量，则有：

$$0=f(x^*)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x^*-x_0)$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\Rightarrow \quad x^*\approx x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

2. 牛顿法 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 几何意义



$$x^* \approx x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

只要 $f\in C^1$，每一步迭代都有 $f'(x_k)\neq 0$，

而且 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，则 x^* 就是 f 的根。

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

[牛顿迭代法]

1: 初始化. $x0$, M, δ, ε, 置i:=0

2: 如果$|f(xi)|\leqslant\varepsilon$，则停止.

3: 计算$xi+1:=xi-f(xi)/f'(xi)$

4: 如果$|xi+1-xi|<\delta$ *OR* $|f(xi)|\leqslant\varepsilon$，则停止.

5: $i:=i+1$, 转至3.

定理

（局部收敛性）设 $f \in C^2[a, b]$，若 x^* 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$上的根，且 $f'(x^*) \neq 0$，则存在 x^* 的邻域 $B_\delta(x^*)$ 使得任取初值 $x_0 \in B_\delta(x^*)$ ，Newton's Method产生的序列$\{x_k\}$收敛到x^*，且满足

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{(x^*-x_k)^2}=-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

证明： Newton's Method 事实上是一种特殊的不动点迭代

其中 $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$， 则

$$|g'(x^*)|=\left|\frac{f''(x^*)f(x^*)}{f'^2(x^*)}\right|=0<1 \quad\Rightarrow\quad \text{收敛} \quad ✓$$

由 Taylor 展开：

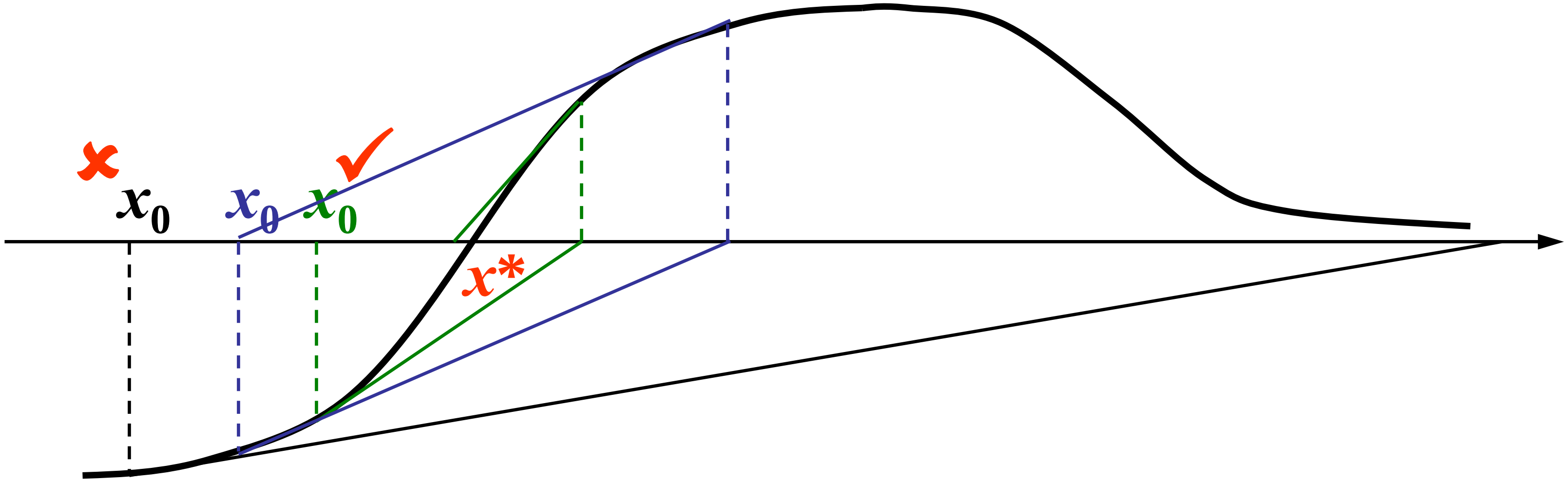
$$0=f(x^*)=f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2!}(x^*-x_k)^2$$

$$\Rightarrow\quad x^*=\underbrace{x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{x_{k+1}}-\frac{f''(\xi_k)}{2!\,f'(x_k)}(x^*-x_k)^2$$

$$\Rightarrow\quad \frac{x^*-x_{k+1}}{(x^*-x_k)^2}=-\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}$$

只要 $f'(x^*)\neq 0$，则令 $k\to\infty$ 可得结论。 ∎

注：Newton's Method 收敛性依赖于x_0 的选取。



§ 2.4 迭代过程的加速方法

收敛阶

定义 设迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点 x^*。

记 $e_k = x_k - x^*$，若

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r} = C > 0 \quad (C\text{为常数})$$

则称该迭代为 r 阶收敛。

(1) 当 $r=1$ 时称为线性收敛，此时 $C<1$；

(2) 当 $r=2$ 时称为二次收敛，或平方收敛；

(3) 当 $r>1$ 时称为超线性收敛。

- 二分法线性收敛
- 不动点迭代中，若 $\varphi'(x^*) \neq 0$，则

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x^* = \varphi(x_k) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi)e_k$$

取极限得 $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = |\varphi'(x^*)| \neq 0$ ⟹ 线性收敛

p 阶收敛

定理 设迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，若 $\varphi^{(p)}(x)$ 在 x^* 的某邻域内连续，则该迭代法具有 p 阶收敛的充要条件是

$$\varphi(x^*)=x^*,$$

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0,$$

$$\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$$

并且有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^r}=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*)$$

证明：充分性. 根据泰勒展开有

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x_k-x^*)+\ldots+\frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k-x^*)^p$$

$$\Rightarrow x_{k+1}-x^*=\frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k-x^*)^p \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^r}=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*)$$

必要性. 设迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 是 p 阶收敛。

迭代两边取极限，由 $\varphi(x)$ 的连续性可知 $x^* = \varphi(x^*)$ 。

设 p_0 是满足

$$\varphi'(x^*) = \varphi'(x^*) = \cdots = \varphi^{(p_0-1)}(x^*) = 0, \quad \varphi^{(p_0)}(x^*) \neq 0$$

的最小正整数。

由充分性的证明过程可知迭代 p_0 阶收敛。

又 $\dfrac{e_{k+1}}{e_k^p} = \dfrac{e_{k+1}}{e_k^{p_0}} \cdot \dfrac{1}{e_k^{p-p_0}} \Longrightarrow$ 若 $p_0 < p$， 与迭代 p 阶收敛矛盾

若 $p_0 > p$， 与迭代 p_0 阶收敛矛盾

$$\Longrightarrow p_0 = p$$

前页 后页 返回

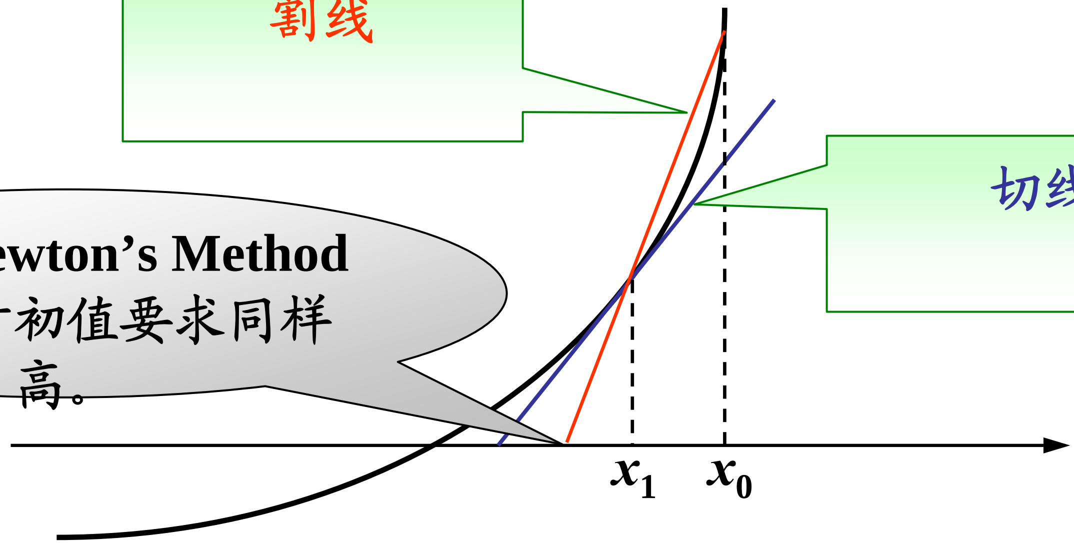
➢ 割线法 /* Secant Method */：

Newton's Method 一步要计算 f 和 f'，相当于2个函数值，比较费时。现用 f 的值近似 f'，可少算一个函数值。

割线

切线

收敛比Newton's Method慢，且对初值要求同样高。



切线斜率 $\approx$ 割线斜率 $\Rightarrow f'(x_k) \approx \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$

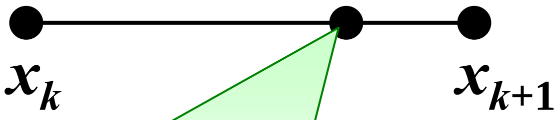
$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

需要2个初值 x_0 和 x_1。

前页 后页 返回

➢ 下山法 ——Newton's Method 局部微调:

原理: 若由 x_k 得到的 x_{k+1} 不能使 $|f|$ 减小，则在 x_k 和 x_{k+1} 之间找一个更好的点 $\overline{x_{k+1}}$，使得 $\left|f(\overline{x_{k+1}})\right| < \left|f(x_k)\right|$。



$$\lambda x_{k+1} + (1-\lambda)x_k\ ,\ \lambda \in [0, 1]$$

$$\overline{x_{k+1}} = \lambda\left[x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right] + (1-\lambda)x_k$$

$$= x_k - \lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

注: $\lambda = 1$ 时就是Newton's Method 公式。

当 $\lambda = 1$ 代入效果不好时，将 λ 减半计算。

前页 后页 返回