用谐量分析法研究周期性现象的规律

李元祥　　　　黄丹香
（上海市纺织科学研究院）　（上海第十一棉纺织厂）

【摘要】 本文通过实例对谐量分析法的应用进行了简要介绍，以便在纺织科研和生产中推广应用。

纺织生产中往往会出现各种周期性的现象。如白天和黑夜电网负荷的不同，引起纺织机械的实际速度随早、中、夜三班有一个周期性的变化。反映在细纱的断头率、布机的二停三关率等，夜班要高一些。又由于早、中、夜三班工人精神状态有所不同，生产效率亦有所不同。在不考虑其他因素的情况下，由于操作状态的变化，反映在产品质量上也有周期性的变化。这种变化在数学上是用周期函数来描述：

$$y=f(x)=f(x+kT) \tag{1}$$

式中：x为自变量；y为应变量；k为整数；T称为周期为正数是一定值。

表示周期函数最有效的方法是采用富利埃级数。函数$f(x)$展开为富利埃级数，将具有下列的形式

$$y=f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{2}$$

按照实验结果数据，求取具有周期函数的富利埃级数的方法，称谐量分析法。式(2)中的各正弦量与余弦量称谐量。谐量分析法的基础为最小二乘法，它一般不能求取具有无穷项的级数(式2)，而是求取具有有穷项的级数(式3)来作近似值。

$$y=f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{l}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{3}$$

一般的实验结果，自变量x的取值并非等间隔的，即$(x_{m+1}-x_m)$并非常数。这种性质的数据，进行谐量分析是比较繁复的。本文仅研究符合下式的情形：

$$x_{m+1}-x_m=T/K$$

其中：T为周期，$m=0,1,2\cdots$，$K-1$，K为总的试验次数。由于一般具有周期T的函数，经一个尺度上的转化后，就可转化为具有周期为2π的函数，若认为$f(x)$的周期为2π，则：

$$x_{m+1}-x_m=2\pi/K \tag{4}$$

即有对应的K对数据，如表1所示。

表1

x	$x_0=0$	$x_1=2\pi/K$	…	$x_m=m(2\pi/K)$	…	$x_{k-1}=(K-1)(2\pi/K)$
y	y_0	y_1	…	y_m	…	y_{k-1}

注：K为试验次数，即有K对数据；$m=0,1,2,\ldots\ldots K-1$。

谐量分析法的具体计算式如下[1,2]。

当K为奇数时，展开级数共有K项，其中第一项为a_0，带有余弦项的项数为$(K-1)/2$项，带有正弦项的项数也为$(K-1)/2$项，即$l=(K-1)/2$，展开级数为

$$y=f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{(k-1)/2}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{5}$$

当K为偶数时，亦有K项，其中第一项为a_0，带有余弦项的项数为$(K/2)$项；带有正弦项的项数为$(K-2)/2$项，即展开级数为：

$$y=f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{k/2}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{(k-2)/2}b_n\sin nx \tag{6}$$

展开级数的系数为：

$$a_0=(1/K)\sum_{m=0}^{K-1}y_m \tag{7}$$

$$a_n=\begin{cases}(2/K)\sum\limits_{m=0}^{K-1}y_m\cos nm(2\pi/K) & [n\neq(K/2)]\\ (1/K)\sum\limits_{m=0}^{K-1}y_m\cos n\pi & [n=(K/2)]\end{cases} \tag{8}$$

$$b_n=\begin{cases}(2/K)\sum\limits_{m=0}^{K-1}y_m\cdot\sin nm(2\pi/K) & n\neq(K/2)\\ 0 & n=(K/2)\end{cases} \tag{9}$$

以上各式的推导从略。

[例]根据长期积累资料，某厂一天24小时内某台纺 28 特纱的细纱机前罗拉速度的变化如表 2 所示(按 4 小时内的速度平均)。用谐量分析法求其回归方程。

表 2

时　　间(时)	0	4	8	12	16	20
x 对应转化角度	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	π	$4/\pi 3$	$5\pi/3$
y 前罗拉速度(转/分)	330	308	285	287	310	320.5

注：$K=6$，$m=0,1,2,3,4,5$。

因 K 为偶数，故展开级数中除第 1 项为 a_0 外，带有余弦的项数有 3 项，带有正弦的项数有 2 项。其展开级数的系数如下：

$$a_0=(1/K)\sum_{m=0}^{K-1} y_m=(1/6)\sum_{m=0}^{5} y_m=306.75$$

$$a_1=(2/K)\sum_{m=0}^{K-1} y_m \cos m\cdot 2n/K=19.18$$

$$a_2=(2/K)\sum_{m=0}^{K-1} y_m \cos 2m(2\pi/K)=1.75$$

$$a_3=(1/K)\sum_{m=0}^{K-1} y_m \cos m\pi=1.58$$

同理可求得：$b_1=-10.82$；$b_2=3.60$

故得出回归方程为：

$$y=f(x)=306.75+19.18\cos x-10.82\sin x$$
$$+1.75\sin 2x+3.60\sin 2x+1.58\cos 3x$$

由上述回归方程可估算该台细纱机任意时间的前罗拉速度。例如要估算在下午 3 时的前罗拉速度，则：

$$\because\quad 24:15=2\pi:x \quad \therefore\quad x=15\times 2\pi/24=1.25\pi$$

故得出在下午 3 时的前罗拉速度为

$$y=306.75+19.18\cos 1.25\pi-10.82\sin 1.25\pi$$
$$+1.75\cos 2.5\pi+3.60\sin 2.5\pi+1.58\cos 3.75\pi$$
$$=305.56(\text{转/分})$$

以上的经验公式可用方差分析的方法来检验其正确性。由上所述可见，推广谐量分析法，可为研究分析纺织中的周期性现象提供有效的工具。

参 考 资 料

[1] 陈建功，《三角级数论》，上海科技出版社，1963。

[2] 沼仓三郎，《测定值计算法》，1943。