文章编号:1671-9352(2009)12-0022-03

3-正则图的环边连通性和环连通性之间的关系

祁忠斌[1],叶东[2],张和平[2]
(1. 兰州工业高等专科学校基础学科部, 甘肃 兰州 730050;
2. 兰州大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730000)

摘要:研究了一般 3-正则连通图 G 的环边连通性和环连通性之间的关系,证明了 G 的环边连通度等于其环连通度。讨论了 G 的环连通度与环点连通度之间的关系,指出当 G 的顶点个数不少于其环连通度的 6 倍时,其环连通度等于其环点连通度。

关键词:3-正则连通图; 环边连通度; 环连通度; 环点连通度
中图分类号:O157.6　　**文献标志码**:A

The relation between cyclic edge-connectivity and cyclic connectivity of 3-regular connected graphs

QI Zhong-bin[1], YE Dong[2], ZHANG He-ping[2]
(1. The Basic Courses Department of Lanzhou Polytechnic College, Lanzhou 730050, Gansu, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, Gansu, China)

Abstract: The relation between cyclic edge-connectivity and cyclic connectivity of a 3-regular connected graph G is studied. It is proved that the cyclic edge-connectivity of G is equal to its cyclic connectivity. Further, the relation between the cyclic connectivity and the cyclic vertex-connectivity of G is discussed. It is shown that if the vertex number of G is more than 6 times its cyclic connectivity, then its cyclic connectivity is equal to its cyclic vertex-connectivity.

Key words: 3-regular connected graph; cyclic edge-connectivity; cyclic connectivity; cyclic vertex-connectivity

0 引言

图的环边连通度是由 P.G. Tait 于 1880 年研究四色定理时首先提出的[1]。后来表明关于着色、网络流、哈密尔顿圈、特别是匹配理论的许多结果都与环边连通度有关(参见[2-9])。

设图 G 含有至少一条边。如果从 G 中去掉任意两个顶点 u 和 v 后所得的子图 $G-u-v$ 都有完美匹配,则称 G 是双临界图(bicritical graph)。对于一个至少含有 $2k+2$ 个顶点的连通图 G,如果 G 中至少有一个大小为 k 的匹配而且任意同样大小的匹配都包含在其某个完美匹配中,则称 G 为 k-可扩图(k-extandable graph)。

下面的两个结论分别表明了图的环边连通度与其双临界性及 2-可扩性之间的联系:

命题 1[10]　设 G 为 k-正则的非二部图。如果 G 是环$(k+1)$-边连通图且有偶数个顶点,则 G 是双临界图。

命题 2[11]　设 G 为 3-连通、3-正则的平面图。如果 G 是环 4-边连通的且不含大小为 4 的面,则 G 是

收稿日期:2009-03-30
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10831001);甘肃省教育厅科研资助项目(0712B-02)
作者简介:祁忠斌(1969-),男,博士,研究方向为图论及其应用. Email: qizhb70@163.com

2-可扩图。

作为上述两个结论的典型应用，T. Došlić证明了所有 Fullerene 图(3-连通、3-正则的平面非二部图，其每个面为五边形或六边形)都是环 4-边连通的[12]，从而借助命题 1 表明了 Fullerene 图的双临界性。进而张和平和张福基，利用命题 2 揭示了 Fullerene 图的 2-可扩性[13]。后来，T. Došlić和本文作者分别在文[14]和[15]中证明了 Fullerene 图的环边连通度为 5，并且文[15]中还证明了 Fullerene 图的环连通度也为 5。

本文研究一般 3-正则图的环边连通性和环连通性之间的关系，主要证明 3-正则图的边连通度等于其环连通度。

1　3-正则图的环边连通性和环连通性之间的关系

在下面讨论的图 G 中，分别用 $V(G)$和 $E(G)$表示 G 的顶点集和边集. 设 G' 是 G 的一个子图，$v\in V(G')$，用 $d_{G'}(v)$表示 v 在 G' 中的度。对于 G 的一个顶点子集 V'，用 $G[V']$表示由 V' 导出的 G 的子图。文中其它未作说明的术语请参见[10]。

定义 1　设 X 是连通图 G 的一个边割。如果 $G-X$ 的分支中至少有两个含有圈，则称 X 为 G 的环边割(cyclic edge-cut)。

定义 2　设 k 为正整数，如果图 G 中不存在边数小于 k 的环边割，则称 G 环 k-边连通(cyclically k-edge-connected)。使 G 为环 k-边连通的最大正整数 k(如果存在)称为 G 的环边连通度(cyclic edge-connectivity)，记为 $c\lambda(G)$。

定义 3　如果当把一个图 G 表示为 $G=G_1\cup G_2$，其中 $E(G_1)\cap E(G_2)=\emptyset$，并且 G_1 和 G_2 都含有圈时，总有 $|V(G_1)\cap V(G_2)|\geqslant k$，则称 G 环 k-连通(cyclically k-connected)。使 G 为环 k-连通的最大正整数 k(如果存在)称为 G 的环连通度(cyclic connectivity)，记为 $c\kappa(G)$。

注　如果上述定义 2 和定义 3 中的最大正整数 k 不存在，我们分别规定 $c\lambda(G)=+\infty$，$c\kappa(G)=+\infty$。

引理 1　3-正则图 G 的最小环边割是 G 的一个独立边子集。

证明　设 X 是 3-正则图 G 的一个最小环边割，则 $G-X$ 恰有两个连通分支且这两个分支中都含有圈。记这两个分支分别为 G_1 和 G_2。如果 X 不是 G 的独立边子集，则在 X 中至少存在两个边 e_1 和 e_2，使得 e_1 和 e_2 有一个公共端点 v，不妨设 $v\in V(G_1)$。由于 G 是 3-正则图，故除 e_1 和 e_2 外还有一条 G 中边 e_3 与 v 关联，而且由于 G_1 是 G 的连通子图，所以 $e_3\in E(G_1)$，即 v 是 G_1 中的 1-度顶点，从而边 e_3 不在 G_1 的任何圈上。因此，当取 $X':=X\cup\{e_3\}\setminus\{e_1,e_2\}$时，$G-X'$就有两个分支 G_1-v 和 $G_2\cup\{e_1,e_2,v\}$，而且这两个分支都含有圈，即 X' 为 G 的另一个环边割，但 $|X'|=|X|-1$，这与 X 的最小性矛盾。

下面的定理表明了 3-正则图的环边连通度与环连通度的关系：

定理 1　设 G 为 3-正则图，则 $c\lambda(G)=c\kappa(G)$。

证明　先证明 $c\lambda(G)\geqslant c\kappa(G)$。假设 $c\lambda(G)=k$，并设 X 为 G 的一个最小环边割，则 $|X|=k$。记 $G-X$ 的两个分支为 G_1 和 G_2，则 G_1 和 G_2 都含有圈。由引理 1，X 为 G 的一个匹配，从而 $|V(X)\cap V(G_1)|=|X|=k$，其中 $V(X)$表示 X 中所有边的端点的集合。现令 $G'_1=G_1$，$G'_2=G_2\cup X$，则显然 G'_1 和 G'_2 中都含有圈，且 $G=G'_1\cup G'_2$，$E(G'_1)\cap E(G'_2)=\emptyset$，$|V(G'_1)\cap V(G'_2)|=|V(X)\cap V(G_1)|=|X|=k$。由环连通度的定义，$c\kappa(G)\leqslant k=c\lambda(G)$。

再证 $c\lambda(G)\leqslant c\kappa(G)$。假设 $c\kappa(G)=k$，即存在 G 的含有圈的子图 G_1 和 G_2，满足 $G=G_1$ 和 G_2，$E(G_1)\cap E(G_2)=\emptyset$，并且 $S:=V(G_1)\cap V(G_2)$中恰有 k 个顶点。如果存在 $v_0\in S$，使得 $d_{G_1}(v_0)=0$ 或 $d_{G_2}(v_0)=0$(不妨设 $d_{G_1}(v_0)=0$)，则可以取得 G 的两个子图 $G'_1:=G_1\setminus\{v\}$，$G'_2:=G_2$。显然 G'_1 和 G'_2 都含有圈，而且 $G=G'_1\cup G'_2$，$E(G'_1)\cap E(G'_2)=\emptyset$，但 $|V(G'_1)\cap V(G'_2)|=|S|-1=k-1$，这与 $c\kappa(G)=k$ 矛盾。因此，对任意 $v\in S$，都有 $d_{G_i}(v)>0(i=1,2)$。又由于 $d_G(v)=3$ 及 $E(G_1)\cap E(G_2)=\emptyset$，所以 v 必为 G_1 或 G_2 的 1-度顶点，即有 G_1 或 G_2 的一个悬挂边与之相关联。现把这些与 S 中的顶点关联的 G_1 或 G_2 的悬挂边所构成的集合记为 X，并令 $G'_1:=G[V(G_1)\setminus\{v\in S\mid d_{G_2}(v)=2\}]$，$G'_2:=G[V(G_2)\setminus\{v\in

$S \mid d_{G_1}(v)=2\}]$,则有$|X|=|V(G_1)\cap V(G_2)|=|S|=k$, $V(G'_1)\cap V(G'_2)=\emptyset$, $V(G'_1)\cup V(G'_2)=V(G)$,而且 G'_i 含有 G_i 中的所有圈($i=1,2$)。另外,介于 $V(G'_1)$与 $V(G'_2)$之间的边一定在 X 中。事实上,任取 $e=v_1v_2\in E(G)$,且不妨设 $v_1\in V(G'_1)$, $v_2\in V(G'_2)$,则有 $e\in E(G_1)$或 $e\in E(G_2)$,不妨设 $e\in E(G_1)$,则 $v_2\in S$,且 $d_{G_1}(v_2)=1$,即 e 是 G_1 的一个悬挂边,从而由 X 的定义可知 $e\in X$。因此 G'_1 和 G'_2 恰为 $G-X$ 的两个分支,即 X 为 G 的一个含有 k 条边的环边割。所以有 $c\lambda(G)\leqslant k=c\kappa(G)$。

另外,D. Lou 和 D. A. Holton 在文[16]中给出了如下环点连通度的定义:

定义 4 设 k 为正整数,如果图 G 中不存在小于 k 的顶点割 S,使得 $G-S$ 恰有两个分支,而且每个分支中有圈,则称 G 为环 k-点连通的。使 G 为环 k-点连通的最大正整数 k(如果存在)称为 G 的环点连通度,记为 $c\kappa'(G)$。

同时在文[16]中还给出了 $c\kappa'(G)$与 $c\lambda(G)$的关系:

定理 2[16] 设 G 为 k-正则连通图($k\geqslant 3$),则

(1) $\lceil 2c\lambda(G)/k\rceil\leqslant c\kappa'(G)$;

(2) $c\kappa'(G)\leqslant c\lambda(G)$,如果$|V(G)|\geqslant 2((2k-3)/(k-2))c\lambda(G)$。

我们发现定义 4 与定义 3 是不等价的。对于图 1 中给定的图 G 及其子图 G_1 和 G_2,显然有 $G=G_1\cup G_2$, $E(G_1)\cap E(G_2)=\emptyset$ 和 $V(G_1)\cap V(G_2)=\{x,y\}$。从而有 $c\kappa(G)=2$。但 G 中根本没有顶点割 S,使得 $G-S$ 恰有两个分支,而且每个分支中有圈,从而 $c\kappa'(G)=+\infty$。

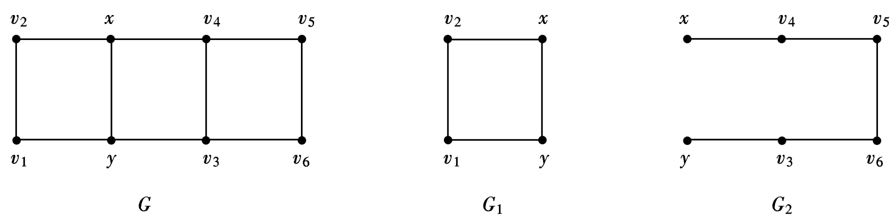

图 1 图 G 及其两个子图 G_1 和 G_2

Fig.1 The graph G and its two subgraphs G_1 and G_2

事实上,$c\kappa$ 与 $c\kappa'$存在以下关系:

定理 3 对于任意连通图 G,都有 $c\kappa(G)\leqslant c\kappa'(G)$。

证明 如果不存在顶点割 $S\subseteq V(G)$,使得 $G-S$ 恰有两个分支,且每个分支中有圈,则结论是平凡的。故假设 G 中有这样的顶点割。现取 $S\subseteq V(G)$满足:$|S|=c\kappa'(G)$, $G-S$ 有 2 个分支 G'和 G'',且 G'和 G''都含圈。令 $G_1:=G[V(G')\cup S]$, $G_2:=G[V\setminus V(G')]-E(G[S])$。则有 $G=G_1\cup G_2$, $E(G_1)\cap E(G_2)=\emptyset$, G_1 和 G_2 都含圈,且 $V(G_1)\cap V(G_2)=S$。因此,$c\kappa(G)\leqslant|S|$,即 $c\kappa(G)\leqslant c\kappa'(G)$。

而对于 3-正则连通图 G,当$|V(G)|\geqslant 6c\kappa(G)$时,由定理 2 及定理 1 有 $c\kappa'(G)\leqslant c\lambda(G)=c\kappa(G)$,而由定理 3 又有 $c\kappa(G)\leqslant c\kappa'(G)$,从而可得以下结果:

定理 4 设 G 是 3-正则连通图。如果$|V(G)|\geqslant 6c\kappa(G)$,则 $c\kappa(G)=c\kappa'(G)$。

参考文献:

[1] TAIT P G. Remarks on the Colouring of Maps[J]. Proc Royal Soc Edinburgh, 1880, 10:501-503.

[2] ALDRED R E L, HOLTON D A, JACKSON B. Uniform cyclic edge connectivity in cubic graphs[J]. Combin, 1991, 11:81-96.

[3] ALDRED B, BAU S, HOLTON D A, et al. Nonhamiltonian 3-connected cubic planar graphs[J]. SIAM J Discrete Math, 2000, 13:25-32.

[4] CELMINS U A. On cubic graphs that do not have an edge-3-colouring[D]. Waterloo, Canada: Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, 1984.

[5] FLEISCHNER H. Cycle decompositions, 2-coverings, removable cycles and the four-color disease[C]// Bondy J A, Murty U S R. Progress in Graph Theory. New York: Academic Press, 1984: 233-246.

[6] FLEISCHNER H, JACKSON B. A note concerning come conjectures on cyclically 4-edge connected 3-regular graphs[J]. Annals of Disc Math, 1989, 41:71-178. [7] JAEGER F, SWART T. Conjecture 1[C]// Deza M, Rosenberg I G. Combinatorics 79, Annals of Discrete

Mathematics: Vol.9. Amsterdam: North-Holland, 1980: 305.

[8] KOCHOL M. A cyclically 6-edge-connected snark of order 118[J]. Discrete Math, 1996, 161:297-300.

[9] KOCHOL M. Reduction of the 5-flow conjecture to cyclically 6-edge-connected snarks[J]. J Combin Theory: Ser B, 2004, 90:139-145.

[10] LOVASZ L, PLUMMER M D. Matching Theory[M]// Annals of Discrete Mathematics 29. Amsterdam: North-Hollond, 1986.

[11] HOLTON D A, PLUMMER M D. 2-extendability in 3-polytopes[C]// Combinatorics, Eger, Hungary, Budapest: Akadémial Kiadó, 1988: 281-300.

[12] Dovšlić T. On lower bounds of number of perfect matching in fullerene graphs[J]. J Math Chem, 1998, 24:359-364.

[13] ZHANG Heping, ZHANG Fuji. New lower bound on the number of perfect matchings in fullerene graphs[J]. J Math Chem, 2001, 30: 343-347.

[14] Dovšlić T. Cyclical edge-connectivity of fullerene graphs and (k,6)-cages[J]. J Math Chem, 2003, 33:103-112.

[15] QI zhongbin, ZHANG Heping. A note on the cyclical edge-connectivity of fullerene graphs[J]. J Math Chem, 2008, 43:134-140.

[16] LOU D, HOLTON D A. Low bound of cyclic edge connectivity for n-extendability of regular graphs[J]. Discrete Math, 1993, 112: 139-150.

（编辑：李晓红）