文章编号:1671-9352(2009)12-0041-03

W-C-倾斜模的 Auslander-Reiten 对应

雷雪萍
(淮阴师范学院数学系, 江苏 淮安 223300)

摘要:给出了 W-C-倾斜模与满足特定条件的子范畴的一一对应关系, 将倾斜模上的 Auslander-Reiten 对应推广到了 W-C-倾斜模上。

关键词: Artin 代数;W-C-倾斜模;Auslander-Reiten 对应
中图分类号:O153　　**文献标志码:**A

Auslander-Reiten correspondence for W-C-tilting modules

LEI Xue-ping
(Department of Mathematics, Huaiyin Normal University, Huaian 223300, Jiangsu, China)

Abstract: It is proved that there exists a one-to-one correspondence relationship between W-C-tilting modules and subcategories satisfying some conditions, which generalized the Auslander-Reiten correspondence for tilting modules.

Key words: Artin algebras; W-C-tilting modules; Auslander-Reiten correspondence

1　预备知识

倾斜理论在 Artin 代数表示论中起着一个中心的作用,并且由此衍生出了 Wakamatsu-倾斜模, $*$-模, $*^n$-模和倾斜对等。1991 年, Auslander 和 Reiten 在文[1]给出了著名的 Artin 代数上倾斜模的一个对应:设 A 是 Artin 代数,T 是自正交左 A-mod,则(1) $T \mapsto T^{\perp}$ 给出{基础的倾斜左 A-模的同构类}→{$\mathscr{D}$|$\mathscr{D}$是共变有限的余可解的 A-mod 的子范畴且 $\check{\mathscr{D}}=A$-mod}的一一对应;(2) $T \mapsto \mathrm{add}\check{}_A T$ 给出{基础的倾斜左 A-模的同构类}→{$\mathscr{D}$|$\mathscr{D}$是反变有限的可解的 A-mod 的子范畴且 $\mathscr{D}\subseteq \mathrm{add}\hat{}_A A$}的一一对应。2008 年,魏加群和惠昌常在文[2]中将这个 Auslander-Reiten 对应推广到倾斜对上。最近,作者在文[3]中给出了 W-C-倾斜模的定义,并且研究了它的性质。在此基础上,本文将给出 W-C-倾斜模上的 Auslander-Reiten 对应,从而丰富了倾斜理论。

设 A 是 Artin 代数,A-mod 表示所有有限生成的左 A-模构成的范畴。本文只考虑有限生成的左 A-模,范畴均指关于同构封闭的 A-mod 的满子范畴。

任意给定 $M\in A$-mod,将 M 分解成 $M\cong\oplus_{i=1}^{m}M_i^{d_i}$,其中每个 M_i 是不可分解模,$d_i>0$,且当 $i\neq j$ 时,M_i 与 M_j 是互不同构的。如果对每个 i,$d_i=1$,M 称为基础的。

任意模 $M\in A$-mod,add M 表示同构于 M 的有限直和的直和项组成的子范畴。模 M 称为自正交的,如果 $\mathrm{Ext}_A^i(M,M)=0$, $\forall\, i\geqslant 1$。$M^{\perp}$ 表示所有满足 $\mathrm{Ext}_A^i(M,X)=0$(任意 $i\geqslant 1$)的模 X 构成的子范畴,$M^{\perp_1}$ 表示所有满足 $\mathrm{Ext}_A^1(M,X)=0$ 的模 X 构成的子范畴。对自正交模 M,定义子范畴 ${}_M\mathscr{X}=\{N\in A$-mod|存在正合列⋯

收稿日期:2009-04-01
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771112);淮阴师范学院青年优秀人才支持计划项目(08QNZCK002)
作者简介:雷雪萍(1976-),女,讲师,博士,主要研究方向为代数表示论. Email:leixp2005@163.com

$\xrightarrow{f_2} M_1 \xrightarrow{f_1} M_0 \xrightarrow{f_0} N \to 0$,其中任意 $i \geqslant 0, M_i \in \operatorname{add} M, \operatorname{Im} f_i \in M^{\perp}\}$。因此${}_M\mathscr{X} \subseteq M^{\perp}$。对偶地,定义${}^{\perp}M$ 和 $\mathscr{X}_M$。

设 $\mathscr{C}$ 是 A-mod 的满子范畴。$I \in \mathscr{C}$ 称为 $\mathscr{C}$ 的余生成子,如果任意 $M \in \mathscr{C}$,有正合列 $0 \to M \to I' \to N \to 0$,其中 $I' \in \operatorname{add} I, N \in \mathscr{C}$。如果 I 还满足对任意 $i \geqslant 1$,任意 $X \in \mathscr{C}$,有 $\operatorname{Ext}_A^i(X, I) = 0$,则称 I 是 $\mathscr{C}$ 的相对内射余生成子。对偶地,定义 $\mathscr{C}$的生成子和相对投射生成子。假设 $\mathscr{C}$ 是有相对内射余生成子 I 的范畴,如果 $\mathscr{C}$ 的子范畴 $\mathscr{D}$ 关于扩张,直和项和单态射的余核封闭且包含 I,则称 $\mathscr{D}$ 在 $\mathscr{C}$ 中相对余可解。对偶地,假设 $\mathscr{C}$ 是有相对投射生成子 P 的范畴,如果 $\mathscr{C}$ 的子范畴 $\mathscr{D}$ 关于扩张,直和项和满态射的核封闭且包含 P,则称 $\mathscr{D}$ 在 $\mathscr{C}$ 中相对可解。本文中所涉及的其它定义和符号参考文献[1-5]。

定义 1.1[3] 设 $\mathscr{C}$ 是自正交左 A-模。左 A-模 T 称为 W-C-倾斜模,如果满足下列条件:(1) $\operatorname{Ext}_A^i(T, T) = 0$,对任意 $i \geqslant 1$;(2) $T \in {}_C\mathscr{X}$;(3) $C \in \mathscr{X}_T$。

引理 1.1[4] 设 M 是自正交左A-模,则

(1) ${}_M\mathscr{X}$ 在扩张,单同态的余核和直和项下是封闭的;

(2) 任意正合列 $0 \to U \to V \to W \to 0$,如果 $V, W \in {}_M\mathscr{X}$ 和$\operatorname{Ext}_A^1(M, U) = 0$,则 $U \in {}_M\mathscr{X}$。

引理 1.2[3] 设 C 是自正交模,${}_C\mathscr{X}$ 有相对内射余生成子 I。

(1) 设 $0 \to C \to W \to C_1 \to 0$ 是 A-mod 中正合列,$X \in {}_C\mathscr{X}$。如果$\operatorname{Ext}_A^1(C_1, X) = 0$,则 $X \in \operatorname{gen} W$。

(2) 设 $0 \to I_1 \to T \to I \to 0$ 是 A-mod 中正合列,$Y \in {}_C\mathscr{X}$。如果$\operatorname{Ext}_A^1(Y, I_1) = 0$,则 $Y \in \operatorname{cogen} T$。

2 主要结果

引理 2.1 设 C 是自正交模,${}_C\mathscr{X}$ 有相对内射余生成子 I, $C^{\perp_1}$ 关于满态射的核封闭。设 T 是 W-C-倾斜模,则 $I \in {}_T\mathscr{X}$。

证明 由 T 是 W-C-倾斜模,从而有正合列

$$0 \to C \xrightarrow{f_0} T_0 \xrightarrow{f_1} T_1 \to \cdots,$$

其中任意 $i \geqslant 0, T_i \in \operatorname{add} T, C_{i+1} = \operatorname{Coker} f_i \in {}^{\perp}T \cap {}_C\mathscr{X}$。注意到 $\operatorname{Ext}_A^1(C_1, I) = 0$,由引理 1.2(1)得 $I \in \operatorname{gen} T$。从而有正合列

$(*_0)$ $$0 \to I_1 \to T'_0 \to I \to 0,$$

其中 $T'_0 \to I$ 是 I 的极小右 add T-逼近,再由[1,引理 1.3]得 $I_1 \in T^{\perp}$。由题设和引理 1.1(2)得 $I_1 \in {}_C\mathscr{X}$。用函子 $\operatorname{Hom}_A(-, I_1)$和 $\operatorname{Hom}_A(C_2, -)$分别作用正合列 $0 \to C_1 \to T_1 \to C_2 \to 0$ 和正合列$(*_0)$,由维数转移,得到

$$\operatorname{Ext}_A^1(C_1, I_1) \cong \operatorname{Ext}_A^2(C_2, I_1) \cong \operatorname{Ext}_A^1(C_2, I) = 0,$$

由引理 1.2(1)知 $I_1 \in \operatorname{gen} T$。从而有正合列

$(*_1)$ $$0 \to I_2 \to T'_1 \to I_1 \to 0,$$

其中 $T'_1 \to I_1$ 是 I_1 的极小右 add T-逼近,$I_2 \in T^{\perp}$。对 I_2 重复 I_1 的过程,如此继续下去,得到无限多的正合列$(*_i)$。将这些正合列连接在一起,得到正合列

$$\cdots \to T'_1 \to T'_0 \to I \to 0,$$

即 $I \in {}_T\mathscr{X}$。

引理 2.2 设 C 是自正交模,${}_C\mathscr{X}$ 有相对内射余生成子 I, $C^{\perp_1}$ 关于满态射的核封闭。设 T 是 W-C-倾斜模,则${}_T\mathscr{X} \cap {}_C\mathscr{X}$ 是${}_C\mathscr{X}$ 中相对余可解的有相对投射生成子 $\mathscr{T}$的子范畴。

证明 由引理 2.1得 $I \in {}_T\mathscr{X} \cap {}_C\mathscr{X}$,再根据引理 1.1(1)可证得。

引理 2.3 设 T 和 T' 都是${}_C\mathscr{X}$ 中相对余可解的子范畴 $\mathscr{D}$ 的相对投射生成子,且 T 和 T' 都是基础的,则 $T \cong T'$。

证明 由 T' 是 $\mathscr{D}$ 的相对投射生成子,得正合列 $0 \to N \to T'_1 \to T \to 0$,其中 $T'_1 \in \operatorname{add} T', N \in \mathscr{D}$。因为 T 是 $\mathscr{D}$ 的相对投射生成子,所以这个正合列可裂,从而 $T \in \operatorname{add} T'$。

同理可证 $T'\in \mathrm{add}\ T$。所以 $T'\cong T$。

由引理 2.2 和引理 2.3,得到下面的引理。

引理 2.4　设 C 是自正交模,${}_C\mathscr{X}$ 有相对内射余生成子,$C^{\perp_1}$ 关于满态射的核封闭,则 $T\ \mapsto {}_T\mathscr{X}\cap {}_C\mathscr{X}$ 是 $\{T\mid T$ 是基础的 W-C-倾斜模的同构类$\}\to\{\mathscr{D}\mid\mathscr{D}$ 是 ${}_C\mathscr{X}$ 中相对余可解的有相对投射生成子的子范畴$\}$的一个单射。

引理 2.5　设 C 是自正交模,${}_C\mathscr{X}$ 有相对内射余生成子,$C^{\perp_1}$ 关于满态射的核封闭,则 $\mathscr{D}\ \mapsto T$ 是$\{\mathscr{D}\mid\mathscr{D}$ 是 ${}_C\mathscr{X}$ 中相对余可解的有相对投射生成子的子范畴$\}\to\{T\mid T$ 是基础的 W-C-倾斜模的同构类$\}$的一个满射,这里 $\mathrm{add}\ T=\mathscr{D}\cap{}^{\perp}\mathscr{D}$。

证明　设 T 是 $\mathscr{D}$ 的基础的相对投射生成子。显然 $\mathrm{add}\ T\subseteq\mathscr{D}\cap{}^{\perp}\mathscr{D}$。另一方面,$\forall\, M\in\mathscr{D}\cap{}^{\perp}\mathscr{D}$,有正合列 $0\to M_1\to T'\to M\to 0$,其中 $T'\in \mathrm{add}\ T$,$M_1\in\mathscr{D}$。由 $M\in{}^{\perp}\mathscr{D}$,得这个正合列可裂,从而 $M\in\mathrm{add}\ T$。所以 $\mathrm{add}\ T=\mathscr{D}\cap{}^{\perp}\mathscr{D}$。

下面证明 T 是 W-C-倾斜模。因为 $T\in\mathscr{D}\subseteq{}_C\mathscr{X}$,所以我们只需证 $C\in\mathscr{X}_T$。设 I 是 ${}_C\mathscr{X}$ 的相对内射余生成子,则由题设知 $I\in\mathscr{D}$,从而有正合列

$$\cdots\to T_2\to T_1\xrightarrow{f_1}T_0\xrightarrow{f_0}I\to 0,$$

其中任意 $i\geqslant 0$,$T_i\in\mathrm{add}\ T$,$K_i=\mathrm{Im}\ f_i\in\mathscr{D}\subseteq T^{\perp}$。利用引理 1.2(2)和引理 2.1 中类似方法可得 $C\in\mathscr{X}_T$。

定理 2.1　设 C 是自正交模,${}_C\mathscr{X}$ 有相对内射余生成子,$C^{\perp_1}$ 关于满态射的核封闭,则 $T\ \mapsto{}_T\mathscr{X}\cap{}_C\mathscr{X}$ 给出$\{T\mid T$ 是基础的 W-C-倾斜模的同构类$\}\to\{\mathscr{D}\mid\mathscr{D}$ 是 ${}_C\mathscr{X}$ 中相对余可解的有相对投射生成子的子范畴,且 $\mathscr{D}$ 关于这个相对投射生成子是极大子范畴$\}$的一一对应。

证明　设 $f:T\ \mapsto{}_T\mathscr{X}\cap{}_C\mathscr{X}$。由引理 2.5 得 $g:\mathscr{D}\ \mapsto T$ 是$\{\mathscr{D}\mid\mathscr{D}$ 是 ${}_C\mathscr{X}$ 中相对余可解的有相对投射生成子的子范畴,且 $\mathscr{D}$ 关于这个相对投射生成子是极大子范畴$\}$到$\{T\mid T$ 是基础的 W-C-倾斜模的同构类$\}$的一映射,其中 T 是 $\mathscr{D}$ 的相对投射生成子。设 T 是任意的基础的 W-C-倾斜模,有 $gf(T)=g({}_T\mathscr{X}\cap{}_C\mathscr{X})=T$。设 $\mathscr{D}$ 是 ${}_C\mathscr{X}$ 中相对余可解的有相对投射生成子的子范畴,且 $\mathscr{D}$ 关于这个相对投射生成子是极大子范畴,有 $fg(\mathscr{D})=f(T)={}_T\mathscr{X}\cap{}_CX$,其中 T 是 $\mathscr{D}$ 的相对投射生成子。由此可得 $\mathscr{D}\subseteq{}_T\mathscr{X}$,从而 $\mathscr{D}\subseteq{}_T\mathscr{X}\cap{}_C\mathscr{X}$。又因为 T 是 ${}_T\mathscr{X}\cap{}_C\mathscr{X}$ 的相对投射生成子,由 $\mathscr{D}$ 关于 T 的极大性得 $\mathscr{D}={}_T\mathscr{X}\cap{}_C\mathscr{X}$。所以 f 是一一映射。

对满足定理 2.1 条件的左 A-模 C 来说,任意 W-C-倾斜模 T,$\mathscr{X}_T\cap{}_C\mathscr{X}$ 是 ${}_C\mathscr{X}$ 中相对可解的有相对内射余生成子 T 的子范畴。因此有定理 2.1 的对偶结果:

定理 2.2　设 C 是自正交模,${}_C\mathscr{X}$ 有相对内射余生成子,$C^{\perp_1}$ 关于满态射的核封闭。则 $T\ \mapsto\mathscr{X}_T\cap{}_C\mathscr{X}$ 给出$\{T\mid T$ 是基础的 W-C-倾斜模的同构类$\}\to\{\mathscr{D}\mid\mathscr{D}$ 是 ${}_C\mathscr{X}$ 中相对可解的有相对内射余生成子的子范畴,且 $\mathscr{D}$ 关于这个相对内射余生成子是极大子范畴$\}$的一一对应。

参考文献:

[1] AUSLANDER M, REITEN I. Applications of contravariantly finite subcategories[J]. Adv Math, 1991, 86:111-152.

[2] WEI Jiaqun, XI Changchang. Auslander-Reiten correspondence for tilting pairs[J]. J Pure Applied Algebra, 2008, 212:411-422.

[3] 雷雪萍. W-C-倾斜模[J]. 山大大学学报: 理学版, 2008, 43(10):27-30.

[4] WEI Jiaqun, XI Changchang. A characterization of the tilting pair[J]. J Algebra, 2007, 317:376-391.

[5] WAKAMATSU T. On modules with trivial self-extensions[J]. J Algebra, 1988, 114:106-114.

(编辑:李晓红)