第 44 卷 第 12 期 Vol.44 No.12
山 东 大 学 学 报 (理 学 版) Journal of Shandong University(Natural Science)
2009 年 12 月 Dec. 2009

文章编号:1671-9352(2009)12-0025-05

若干倍图的 Smarandachely 邻点边染色

朱恩强[1],王治文[2],张忠辅[1]
(1. 兰州交通大学应用数学研究所, 甘肃 兰州 730070; 2. 宁夏大学数学与计算机学院, 宁夏 银川 750021)

摘要: 图 $G(V,E)$的 Smarandachely 邻点边色数是满足条件 $\forall uv\in E(G)$, $|C(u)\setminus C(v)|\geqslant 1$ 并且 $|C(v)\setminus C(u)|\geqslant 1$ 的一个正常边染色的最小边色数,其中 $C(u)=\{f(uv)\mid \forall uv\in E(G)\}$。给出了路、圈、星、扇图的倍图的 Smarandachely 邻点边色数。

关键词: 倍图; Smarandachely 邻点边染色; k-正常边染色

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A

On the Smarandachely-adjacent-vertex edge coloring of some double graphs

ZHU En-qiang[1], WANG Zhi-wen[2], ZHANG Zhong-fu[1]
(1. Institute of Applied Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China;
2. College of Mathematics and Computer, Ningxia University, Yinchuan 750021, Ningxia, China)

Abstract: The Smarandachely-adjacent-vertex edge chromatic number of graph G is the smallest k for which G has a proper edge k-coloring. For any pair of adjacent vertices, the set of colors appearing at either vertex's incident edges is not a subset of the set of colors appearing at the other vertex's incident edges. The smarandachely adjacent vertex edge chromatic number of some double graphs are obtained.

Key words: double graph; the Smarandachely-adjacent-vertex edge coloring of a graph; proper edge k-coloring

0 引言

图染色是图论的重要研究内容之一。计算机科学、信息科学、光波传播等产生了一系列新的染色问题,例如点可区别边染色[1],邻点可区别边染色[2-3],邻点可区别全染色[4],点可区别全染色[5],一般邻点可区别全染色[6],一般点可区别全染色[7]以及正则图的邻强边色数与全色数之间的关系[8]。本文在此基础上提出了图的 Smarandachely 染色,而图的 Smarandachely 邻点边染色是其中的一种,给出了路、圈、星、扇倍图的 Smarandachely 邻点边色数。

定义 1[2-3] 对于图 $G(V,E)$,如果 f 是 $G(V,E)$的一个 k-正常边染色并且满足: $\forall uv\in E(G)$, $C(u)\neq C(v)$,其中 $C(u)=\{f(uv)\mid \forall uv\in E(G)\}$,那么称 f 为 G 的一个 k-邻强边染色,简记作为 k-ASEC,而

$$\chi'_{as}(G)=\min\{k\mid G\text{ 有 }k\text{-ASEC}\}$$

称为图 G 的邻强边色数。显然, $\forall uv\in E(G)$, $|C(u)\setminus C(v)|\geqslant 1$ 或 $|C(v)\setminus C(u)|\geqslant 1$,此时定义: $\bar{C}(u)=\{1,2,\cdots,k\}\setminus C(u)$。

猜想 1.1[2] 设 G 是一个简单图,若 G 无孤立边且 $G\neq C_5$,则有

收稿日期: 2009-01-08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771091);兰州交通大学学生科研创新立项(DXS 2008-028)1114);陕西省自然科学基础研究计划资助项目(SJ08A20)
作者简介: 朱恩强(1983-),男,硕士研究生,研究方向为图论及组合优化. Email: zhuenqiang@163.com

$$\chi'_{av}(G)\leqslant\Delta(G)+2,$$

其中 $\Delta(G)$表示图 G 的最大度。

定义 2[10] 图 G 的 Smarandachely 邻点边染色是图 G 的一个 k-正常边染色,并且满足:$\forall\, uv\in E(G)$, $|C(u)\setminus C(v)|\geqslant1$且$|C(v)\setminus C(u)|\geqslant1$,简记作为 k-SEC。而

$$\chi'_{sa}(G)=\min\{k\mid G\text{ 有 }k\text{-SEC}\}$$

称为图 G 的 Smarandachely 邻点边色数。显然,当 $\delta(G)\geqslant2$ 时,$\chi'_{sa}(G)$存在,其中 $\delta(G)$表示 G 的最小度。

定义 3[11] 设 G 是一个简单图,如果 $V(D(G))=V(G)\cup V(G')$,$E(D(G))=E(G)\cup E(G')\cup\{u_iv_j\mid u_i\in V(G),v_j\in V(G')\text{且 }u_iv_j\in E(G)\}$,则称 $D(G)$为 G 的倍图,G'为图 G 的一个拷贝。

文中,定义 $l\cdot n(\mathrm{mod}\ n)=n$,$l=1,2,3\cdots$,未加说明的术语和记号可参见文献[9]。

1 主要结果

引理 1[10] 对简单图 G,若 $\delta(G)\geqslant2$,则

$$\chi'_{sa}(G)\geqslant\Delta(G)+1,$$

其中,$\delta(G)$,$\Delta(G)$分别表示图的最小度和最大度。

定理 1 设 $n(n\geqslant3)$阶路 $P_n=u_1u_2\cdots u_n$,P_n 的拷贝为 $v_1v_2\cdots v_{n-1}v_n$,则

$$\chi'_{sa}(D(P_n))=\begin{cases}8, & n=3,\\ 6, & n\geqslant4。\end{cases}$$

证明 当 $n=3$ 时,$\Delta(D(P_3))=4$。因为 u_2,v_2 的度都为4,那么不失一般性,可设 $C(u_2)=\{1,2,3,4\}$,则 $D(P_3)$中除去点 u_2 关联的4条边外的其它4条边都不能用色1,2,3,4染,否则 $D(P_3)$中至少有一对相邻的点,其中一点的关联边色集合是另一点关联边色集合的子集,这与定义2矛盾,又因为剩下的4条边都与 v_2 关联,需要异于1,2,3,4的另外4种色来染与 v_2 关联的4条边,因此 $\chi'_{sa}(D(P_3))=8$。

当 $n\geqslant4$ 时,$\Delta(D(P_n))=4$,由引理1可知 $\chi'_{sa}(D(P_n))\geqslant5$。如果 $\chi'_{sa}(D(P_n))=5$,那么不失一般性,可设 $\bar{C}(u_2)=\{5\}$,那么 $C(u_1)$,$C(v_1)$必定都含色5,因此边 u_1v_2,v_1v_2 都得用色5染,这与定义2矛盾,故 $\chi'_{sa}(D(P_n))\geqslant6$,为证 $\chi'_{sa}(D(P_n))=6$,只需定义 $D(P_n)$的一个6-SEC f 即可。

(1) 当 $n=4,5,6,7$ 时,容易给出 P_n 的一个6-SEC,证明略。

(2) 当 $n\geqslant8$ 时,令 f 为

$$f(u_1v_2)=f(u_nv_{n-1})=1;f(u_2v_1)=f(u_{n-1}v_n)=2;$$
$$f(u_1u_2)=f(v_{n-1}v_n)=3;f(v_1v_2)=f(u_{n-1}u_n)=4;$$
$$f(u_2v_3)=f(u_3v_2)=f(u_{n-1}v_{n-2})=f(u_{n-2}v_{n-1})=5;$$
$$f(u_2u_3)=f(v_2v_3)=f(u_{n-2}u_{n-1})=f(v_{n-2}v_{n-1})=6;$$
$$f(u_3v_4)=f(u_4v_3)=f(u_{n-3}v_{n-2})=f(u_{n-2}v_{n-3})=4;$$

(3) 当 $n-5\neq1(\mathrm{mod}\ 3)$时,$f(u_iu_{i+1})=f(v_iv_{i+1})=(i-1)(\mathrm{mod}\ 3\text{ 若 }i-1>3)$,$i=3,4,\cdots,n-3$;

(4) 当 $n-5\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)$时,$f(u_iu_{i+1})=f(v_iv_{i+1})=(i-1)(\mathrm{mod}\ 3\text{ 若 }i-1>3)$,$i=3,4,\cdots,n-4$,且 $f(u_{n-3}u_{n-2})=f(v_{n-3}v_{n-2})=3$;

$$f(u_iv_{i+1})=f(u_{i+1}v_i)=\begin{cases}5, & i\equiv0(\mathrm{mod}\ 2),\\ 6, & i\equiv1(\mathrm{mod}\ 2),\end{cases}$$

其中 $i=4,5,\cdots,n-4$。对 f 有

$$C(u_1)=\{1,3\},C(u_2)=\{2,3,5,6\},C(u_{n-1})=\{2,4,5,6\},C(u_n)=\{1,4\};$$
$$C(v_1)=\{2,4\},C(v_2)=\{1,4,5,6\},C(v_{n-1})=\{1,3,5,6\},C(u_n)=\{2,3\};$$
$$C(u_3)=C(v_3)=\{2,4,5,6\},C(u_4)=C(v_4)=\{2,3,4,5\};$$

$$C(u_{n-3})=C(v_{n-3})=\begin{cases}\{4,5,(n-4)(\text{mod }3),(n-5)(\text{mod }3)\},n\equiv 0(\text{mod }2)且(n-5)\not\equiv 1(\text{mod }3),\\ \{4,6,(n-4)(\text{mod }3),(n-5)(\text{mod }3)\},n\equiv 1(\text{mod }2)且(n-5)\not\equiv 1(\text{mod }3),\\ \{3,4,5,(n-5)(\text{mod }3)\},n\equiv 0(\text{mod }2)且(n-5)\equiv 1(\text{mod }3),\\ \{3,4,6,(n-5)(\text{mod }3)\},n\equiv 1(\text{mod }2)且(n-5)\equiv 1(\text{mod }3)。\end{cases}$$

$$C(u_{n-2})=C(v_{n-2})=\begin{cases}\{3,4,5,6\},(n-5)\equiv 1(\text{mod }3),\\ \{(n-4)(\text{mod }3),4,5,6\},(n-5)\not\equiv 1(\text{mod }3)。\end{cases}$$

$$C(u_i)=C(v_i)=\{(i-1)(\text{mod }3若\ i-1>3),(i-2)(\text{mod }3若\ i-2>3),5,6\},i=5,6,\cdots,n-4。$$

故 f 是 $D(P_n)$ 的一个 6-SEC。

定理 2　设 $n(n\geqslant 3)$ 阶圈 $C_n=u_1u_2\cdots u_{n-1}u_nu_1$，$C_n$ 的拷贝为 $v_1v_2\cdots v_{n-1}v_nv_1$，若 $n\equiv 0(\text{mod }3)$ 或 $n\equiv 2(\text{mod }3)$ 或 $n\equiv 1(\text{mod }3)$ 且 $n\equiv 0(\text{mod }5)$，则

$$\chi'_{sa}(D(C_n))=5。$$

证明　$\Delta(D(C_n))=4$，由引理 1 可知 $\chi'_{sa}(D(C_n))\geqslant 5$。为证 $\chi'_{sa}(D(C_n))=5$，只需定义 $D(C_n)$ 的一个 5-SEC f 即可。下面分三种情形来证明结论：

情形 1　当 $n\equiv 0(\text{mod }3)$ 时，设 f 为

$$f(u_iu_{i+1})=f(v_iv_{i+1})=\begin{cases}3,i\equiv 1(\text{mod }3),i=1,2,\cdots,n-1,\\ 4,i\equiv 2(\text{mod }3),\ i=1,2,\cdots,n-1,\\ 5,其他,\end{cases}$$

$$f(u_nu_1)=f(v_nv_1)=5,f(u_nv_1)=f(u_iv_{i+1})=1,i=1,2,\cdots,n-1,f(u_1v_n)=f(u_iv_{i-1})=2,i=2,3,\cdots,n。$$

对 f 有

$$\bar{C}(u_i)=\bar{C}(v_i)=\begin{cases}4,i\equiv 1(\text{mod }3),\\ 5,i\equiv 2(\text{mod }3),\\ 3,其他,\end{cases}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$。显然，f 是 $D(C_n)$ 的一个 5-SEC。

情形 2　当 $n\equiv 2(\text{mod }3)$ 时，设 f 为

$$f(u_iu_{i+1})=f(v_iv_{i+1})=\begin{cases}3,i\equiv 1(\text{mod }3),\ i=1,2,\cdots,n-2,\\ 4,i\equiv 2(\text{mod }3),\ i=1,2,\cdots,n-2,\\ 5,其他。\end{cases}$$

$$f(u_{n-1}u_n)=f(v_{n-1}v_n)=1,f(u_nu_1)=f(v_nv_1)=5;$$

$$f(u_iv_{i+1})=f(u_{i+1}v_i)=\begin{cases}1,i\equiv 1(\text{mod }2),\ i=1,2,\cdots,n-3,\\ 2,i\equiv 0(\text{mod }2),i=1,2,\cdots,n-3;\end{cases}$$

$$f(u_{n-2}v_{n-1})=f(u_{n-1}v_{n-2})=3,f(u_{n-1}v_n)=f(u_nv_{n-1})=2,f(u_nv_1)=f(u_1v_n)=4。$$

对 f 有

$$\bar{C}(u_i)=\bar{C}(v_i)=\begin{cases}4,i\equiv 1(\text{mod }3),\\ 5,i\equiv 2(\text{mod }3),\\ 3,其他,\end{cases}\qquad \bar{C}(u_{n-2})=\bar{C}(v_{n-2})=\begin{cases}1,i\equiv 1(\text{mod }2),\\ 2,i\equiv 0(\text{mod }2);\end{cases}$$

$$\bar{C}(u_1)=\bar{C}(v_1)=\{2\},\bar{C}(u_2)=\bar{C}(v_2)=\{5\},\bar{C}(u_{n-1})=\bar{C}(v_{n-1})=\{4\},\bar{C}(u_n)=\bar{C}(v_n)=\{3\}。$$

其中 $i=3,4,\cdots,n-3$，显然，f 是 $D(C_n)$ 的一个 5-SEC。

情形 3　当 $n\equiv 1(\text{mod }3)$ 且 $n\equiv 0(\text{mod }5)$ 时，设 f 为

$$f(u_iu_{i+1})=f(v_iv_{i+1})=\begin{cases}1,\ i\equiv 1(\text{mod }5),\\ 2,\ i\equiv 2(\text{mod }5),\\ 3,\ i\equiv 3(\text{mod }5),\\ 4,\ i\equiv 4(\text{mod }5),\\ 5,其他,\end{cases}f(u_iv_{i+1})=f(v_iu_{i+1})=\begin{cases}3,i\equiv 1(\text{mod }5),\\ 4,\ i\equiv 2(\text{mod }5),\\ 5,\ i\equiv 3(\text{mod }5),\\ 1,\ i\equiv 4(\text{mod }5),\\ 2,其他,\end{cases}$$

$$f(u_nu_1)=f(v_nv_1)=5,f(u_nv_1)=f(v_nu_1)=2。$$

其中 $i=1,2,\cdots,n-1$；对 f 有

$$\bar{C}(u_i)=\bar{C}(v_i)=\begin{cases}4,\ i\equiv 1(\bmod 5),\\5,\ i\equiv 2(\bmod 5),\\1,\ i\equiv 3(\bmod 5),\\2,\ i\equiv 4(\bmod 5),\\3,\text{其他},\end{cases}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$。显然，f 是 $D(C_n)$的一个 5-SEC。该定理证明完毕。

定理 3　设 S_n 是 $n+1(n\geqslant 2)$阶星，$V(S_n)=\{u_0,u_1,\cdots,u_n\}$，$E(S_n)=\{u_0u_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$，则

$$\chi'_{sa}(D(S_n))=4n。$$

证明　因为点 u_0,v_0 的度都为最大度 $2n$，那么不妨用色 $1,2,\cdots,n,n+1,n+2,\cdots,2n$ 来染与点 u_0 关联的 $2n$ 条边，即 $C(u_0)=\{1,2,\cdots,n,n+1,n+2,\cdots,2n\}$。这样，与 v_0 关联的 $2n$ 条边中一定都不能用$\{1,2,\cdots,n,n+1,n+2,\cdots,2n\}$中的任一色来染，否则，当 i 从 1 取到 n 时，至少出现一个 $C(u_i)$或 $C(v_i)$是$C(u_0)$的子集，这与定义 2 矛盾。因此，$\chi'_{sa}(D(S_n))\geqslant 4n$。因为 $D(S_n)$共有 $4n$ 条边，因此 $4n$ 种色只需每种色染一条边即可，故得 $\chi'_{sa}(D(S_n))=4n$。

定理 4　设 F_n 为 $n+1(n\geqslant 3)$阶扇，则

$$\chi'_{sa}(D(F_n))=\begin{cases}2n+1,\ n\equiv 0(\bmod 2),\\2n+2,\ n\equiv 1(\bmod 2)。\end{cases}$$

证明　设 $V(F_n)=\{u_0,u_1,\cdots,u_n\}$，$E(F_n)=\{u_0u_i\mid i=1,2,\cdots,n\}\cup\{u_iu_{i+1}\mid i=1,2,\cdots,n-1\}$。因为 $\Delta(D(F_n))=2n$，故由引理 1 知，$\chi'_{sa}(D(F_n))\geqslant 2n+1$。下面分两种情况来证明结论。

情况 1　当 $n\equiv 0(\bmod 2)$时，为证明 $\chi'_{sa}(D(F_n))=2n+1$，只需给出 $D(F_n)$的一个$(2n+1)$-SEC f 即可，设 f 为

$$f(u_0v_i)=f(v_0u_i)=i,i=1,2,\cdots,n,\ f(u_0u_i)=f(v_0v_i)=i+n,i=1,2,\cdots,n;$$

$$f(u_iv_{i+1})=f(u_{i+1}v_i)=i+2,i=1,2,\cdots,n-1;$$

$$f(u_iu_{i+1})=f(v_iv_{i+1})=\begin{cases}2n+1,\ i\equiv 1(\bmod 2),i=1,2,\cdots,n-1,\\1,\quad i\equiv 0(\bmod 2),\ i=1,2,\cdots,n-1。\end{cases}$$

对 f 有

$\bar{C}(u_0)=\bar{C}(v_0)=\{2n+1\}$，$C(u_1)=C(v_1)=\{1,3,n+1,2n+1\}$，$C(u_n)=C(v_n)=\{n,n+1,2n,2n+1\}$；

$C(u_i)=C(v_i)=\{1,i,i+1,i+2,n+i,2n+1\}$，$i=2,3,\cdots,n-1$。

显然，f 是 $D(F_n)$的一个$(2n+1)$-SEC。

情况 2　当 $n\equiv 1(\bmod 2)$时，若 $\chi'_{sa}(D(F_n))=2n+1$，那么不失一般性，设 $\bar{C}(u_0)=\{1\}$，则 $C(u_i)$和 $C(v_i)(i=1,2,\cdots,n)$中必须都含色 1，否则 $C(u_i)$和 $C(v_i)(i=1,2,\cdots,n)$中至少有一个为 $C(u_0)$的子集。这样，一方面，$C(v_0)$中一定不含 1，因为 $D(F_n)$去掉点 u_0 后还剩 $2n+1$ 个点，而奇数个点不可能有一个完美匹配；另一方面，即使 $1\notin C(v_0)$，由 n 是奇数和倍图的定义，也很容易知 $D(F_n)\setminus\{u_0,v_0\}$没有完美匹配，故 $C(u_i)$和 $C(v_i)(i=1,2,\cdots,n)$中不可能都含色 1，这与上面矛盾，因此可得 $\chi'_{sa}(D(F_n))\geqslant 2n+2$。为证明 $\chi'_{sa}(D(F_n))=2n+2$，只需给出 $D(F_n)$的一个$(2n+2)$-SEC f 即可，设 f 为

$$f(u_0v_i)=f(v_0u_i)=i,i=1,2,\cdots,n;\quad f(v_0v_i)=f(u_0u_i)=n+i,i=1,2,\cdots,n;$$

$$f(u_iv_{i+1})=f(v_iu_{i+1})=i+2,i=1,2,\cdots,n-1;$$

$$f(u_iu_{i+1})=f(v_iv_{i+1})=\begin{cases}2n+1,\quad i\equiv 1(\bmod 2),\ i=1,2,\cdots,n-1,\\2n+2,\quad i\equiv 0(\bmod 2)。i=1,2,\cdots,n-1。\end{cases}$$

对 f 有

$$\bar{C}(u_0)=\bar{C}(v_0)=\{2n+1,2n+2\};C(u_1)=C(v_1)=\{1,3,n+1,2n+1\};$$
$$C(u_n)=C(v_n)=\{n,n+1,2n,2n+2\};$$
$$C(u_i)=C(v_i)=\{i,i+1,i+2,n+i,2n+1,2n+2\},i=2,3,\cdots,n-1。$$

显然,f 是 $D(F_n)$的一个$(2n+2)$-SEC。该定理证明完毕。

参考文献:

[1] BURRIS A C, SCHELP R H. Vertex-distinguishing proper edge-colorings[J]. J Graph Theory, 1997, 26(2):73-82.

[2] ZHANG Zhongfu, LIU Linzhong, Wang Jianfang. Adjacent strong edge coloring of graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15: 623-626.

[3] HATAMI Hamed. $\Delta+300$ is a bound on the adjacent vertex distinguishing edge chromatic number[J]. Journal of Combinatorial Theory: Series B, 2005, 95:246-256.

[4] ZHANG Zhongfu, CHEN Xiangen, LI Jingwen, et al. On adjacent-vertex-distinguishing total coloring of graphs[J]. China Science: Series A, 2005, 48(3):289-299.

[5] ZHANG Zhongfu, QIU Pengxiang, XU Baogen, et al. Vertex-distinguishing total coloring of graphs[J]. Ars Combinatorial, 2008, 87:33-45.

[6] 张忠辅. 图的一般邻点可区别全染色[R].兰州: 兰州交通大学,2008,1:1-12.

[7] 张忠辅. 图的一般点可区别全染色[R].兰州: 兰州交通大学,2008,2:1-16.

[8] ZHANG Zhongfu, DOUGLAS R W, YAO Bing, et al. Adjacent strong edge colorings and total colorings of regular graphs[J]. China Science: Series A, 2008, 38(11):1313-1320.

[9] BONDY J A, MURTY U S R. Graph throry with applications[J]. London: Macmillan Press, 1976.

[10] 张忠辅.图的 Smarandachely 邻点边染色[M].兰州: 兰州交通大学, 2009,1:1-13.

[11] ZHANG Zhongfu, QIU Pengxiang, ZHANG Donghan, et al. The double graph and the completment double graph of a graph[J]. J Advances in Mathematics, 2008, 37(3):303-310.

(编辑:陈丽萍)