第44卷 第2期 山 东 大 学 学 报 (理 学 版) 2009年2月
Vol.44 No.2 Journal of Shandong University(Natural Science) Feb. 2009

文章编号:1671-9352(2009)02-0079-05

g-期望的一种 Kolmogorov 不等式

付静[1],郝涛[2*]

(1. 山东师范大学数科院,山东 济南 250014; 2. 山东中医药大学理工学院,山东 济南 250355)

摘要:借助于当生成元 g 满足限制条件时的 g-方差比较定理,得到了 g-期望的一种 Kolmogorov 不等式表达形式。结果表明它类似于古典 Kolmogorov 不等式的形式,推广了古典 Kolmogorov 不等式。

关键词:倒向随机微分方程;g-期望;g-方差;Kolmogorov 不等式

中图分类号:O211.63; O211.6 **文献标志码:**A

A Kolmogorov's inequality for g-expectation

FU Jing[1], HAO Tao[2*]

(1. College of Mathematics and Science, Shandong, Normal University, Jinan 250014, Shandong, China;
2. School of Science and Technology, Shandong University of Traditional Chinese Medicine Shandong, Jinan 250355, Shandong, China)

Abstract: With the comparison theorem for g-variance of restricted conditions on operator g, a Kolmogorov's inequality for g-expectation was obtained. The result showed that this inequality is similar to the classical Kolmogorov's inequality, and can extend the classical Kolmogorov's inequality.

Key words: backward stochastic differential equation; g-expectation; g-variance; Kolmogorov's inequality

0 引言

众所周知,1990年 Pardoux 和 Peng[1] 证明了具有下面形式的倒向随机微分方程(简称 BSDE)

$$y_t = \xi + \int_t^T g(s, y_s, z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T z_s \mathrm{d}B_s, \ t \in [0, T],$$

当函数 g 关于 y, z 满足 Lipschitz 条件并且 ξ 和 $g(s,0,0)_{s\in[0,T]}$ 是平方可积的条件下,存在惟一一对平方可积适应解 $(y_t, z_t)_{t\in[0,T]}$。

1997年,Peng[2] 介绍了一类与倒向随机微分方程解有关的期望——g-期望,他将具有标准参数 (ξ, g) 的 BSDE 在 $t=0$ 时刻的解叫做随机变量 ξ 的 g-期望,记成 $E_g[\cdot]$。研究 g-期望最初的动机是现代数理经济中的期望效用理论,g-期望是一种非线性期望,它不再具有线性性。正是由于这一特点,它在经济、金融、数学等很多领域得到广泛的应用。现在很多数学学者正致力于 g-期望理论的研究,像 CKJ[3] 获得了关于 g-期望的 Jensen 不等式,BCHMP[4] 证明了 g-期望的逆比较定理,C[5] 研究了 g-鞅的一般下穿不等式等。

古典的 Kolmogorov 不等式主要说明在概率 P 意义下,事件 $\{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j - E[S_j]| \geqslant \varepsilon\}$ 发生的可能性被 $D[S_n]/\varepsilon^2$ 所控制,其中 S_j 是 n 个随机变量中的任意 j 个的和。这一结果在强大数定律的理论中有很重要的作用。针对上面这一结论,我们提出了一个假设:在 g-期望的理论范围内,上述结果是否成立?即,是否有 $P_g(\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j - E_g[S_j]| \geqslant \varepsilon) \leqslant (D_g[S_n]/\varepsilon^2)$?一般来说,上面的不等式不再成立,但是我们证明了当 g =

收稿日期:2008-05-13

作者简介:付静(1981-),女,助教,硕士,主要从事非线性数学期望与金融数学. Email: fujing-1981@hotmail.com

* **通讯作者:**郝涛(1981-),男,助教,硕士,主要从事非线性数学期望与随机分析. Email: haotao_369@163.com

$\pm\mu|z|$时，g-期望的Kolmogorov不等式仍然具有和古典Kolmogorov不等式类似的形式。即，$P_{-\mu}(\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j+E_{-\mu}[-S_j]|\geqslant\varepsilon)\leqslant D_{\mu}[S_n]/\left(\varepsilon-\sum\limits_{i=1}^{n}E_{\mu}[X_i]\right)^2$。当$\mu=0$(或$g=0$)时，所得到的Kolmogorov不等式就是古典的Kolmogorov不等式。因此我们的结果推广了传统的Kolmogorov不等式，同时也应该注意到它并不是g-概率$P_g(\cdot)$意义下Kolmogorov不等式的一般形式，而是一种特殊形式。

本文组织如下：第一部分中介绍了常用的符号和作出主要假设；第二部分表述了文章的主要结果。

1 基本假设、定义与引理

1.1 基本假设

设(Ω,F,P)是一个概率空间，$(B_t)_{t\geqslant0}$是此空间上的一个d-维标准Brown运动并且$B_0=0$。设$(F_t)_{t\geqslant0}$是由该Brown运动产生的完备的、右连续的自然σ域流：

$$F_t:=\sigma\{B_s,s\in[0,t]\}\vee\mathcal{N},\ t\in[0,T],$$

这里T是一个给定的正数，$\mathcal{N}$表示所有的P零测集组成的集合。本文限定在概率空间(Ω,F_T,P)上研究问题，仅考虑参数t取值于区间$[0,T]$的过程。对正整数n，向量$z\in\mathbf{R}^n$，$|z|$表示z的Euclid范数。

定义如下常用的过程空间：

$S_F^2(0,T;\mathbf{R}):=\{\varphi$是$(F_t)$-循序可测的；$E(\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|\varphi(t)|^2)<\infty\}$；

$H_F^2(0,T;\mathbf{R}^n):=\left\{\varphi\text{是}(F_t)\text{-循序可测的；}\|\varphi\|_2^2:=E\left[\int_0^T|\varphi_t|^2\mathrm{d}t\right]<\infty\right\}$。

对每个$t\in[0,T]$，$L^2(\Omega,F_t,P)$表示关于F_t可测的平方可积的随机变量的集合。

简单回顾一下倒向随机微分方程(简记为BSDE)理论。设$\xi\in L^2(\Omega,F_T,P)$，考虑如下形式的BSDE：

$$y_t=\xi+\int_t^T g(s,y_s,z_s)\mathrm{d}s-\int_t^T z_s\mathrm{d}B_s,\ t\in[0,T]。\tag{1}$$

设函数$g(\omega,t,y,z):\Omega\times[0,T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$满足如下(A1)与(A2)：

(A1) 存在常数$\mu\geqslant0$，使得P-a.s.，有：$\forall t\in[0,T]$，$\forall y_1,y_2\in\mathbf{R}$，$z_1,z_2\in\mathbf{R}^d$，

$$|g(\omega,t,y_1,z_1)-g(\omega,t,y_2,z_2)|\leqslant\mu(|y_1-y_2|+|z_1-z_2|)。$$

(A2) 对$\forall(y,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$，$(g(t,y,z))_{t\in[0,T]}$是$(F_t)$-循序可测的，并且$P$-a.s.，

$$\forall(t,y)\in[0,T]\times\mathbf{R},.\ g(t,y,0)\equiv0,$$

那么对任意给定的$\xi\in L^2(\Omega,F_T,P)$，由著名的Pardoux-Peng[1]可知BSDE(1)有惟一一对平方可积适应解，记之为$(y^{(\xi,g)}(t),z^{(\xi,g)}(t))_{t\in[0,T]}$(有时简记为$(y_t,z_t)$)，其中$y^{(\xi,g)}(\cdot)\in S_F^2(0,T;\mathbf{R})$，$z^{(\xi,g)}(\cdot)\in H_F^2(0,T;\mathbf{R}^d)$。

1.2 基本定义与引理

为了读者的方便，回顾一下g-期望、条件g-期望、g-方差的概念，读者可以在文献[2,4]中参阅相关的更详细的结果。在以下关于g-期望的讨论中总是假设g满足假设条件(A1)与(A2)。

定义1.1 (g-期望) g-期望$E_g[\cdot]:L^2(\Omega,F_T,P)\to\mathbf{R}$定义为

$$E_g(\xi):=y^{(\xi,g)}(0)。$$

定义1.2 (条件g-期望) ξ关于σ域F_t的条件g-期望

$$E_g[\xi|F_t]:=y^{(\xi,g)}(t)。$$

注：ⅰ) 当$g=\mu|z|$(或$g=-\mu|z|$)时，g-期望、条件g-期望可分别记作$E_\mu[\cdot]$和$E_\mu[\cdot|F_t]$(或$E_{-\mu}[\cdot]$和$E_{-\mu}[\cdot|F_t]$)。

ⅱ) 假设$\xi=I_A$，其中I_A表示事件A的示性函数，则事件A的g-概率$P_g(A):=E_g[I_A]$。

性质1.1[4] 如果g不依赖于y，即g事实上是定义在$\Omega\times[0,T]\times\mathbf{R}^d$上的函数，则

$$E_g[X+\eta|F_t]=E_g[X|F_t]+\eta,\forall\eta\in L^2(\Omega,F_t,P),X\in L^2(\Omega,F_T,P)。$$

定义1.3 (g-方差) 设$\xi\in L^4(\Omega,F_T,P)$，称$E_g[(\xi-E_g[\xi])^2]$为随机变量的g-方差，记作$D_g[\xi]$。

引理 1.1[5]　对任何 $\xi \in L^2(\Omega, F_T, P)$,有

$$E_{-\mu}[\xi] = \inf_{Q\in\Theta} E_Q[\xi], E_{\mu}[\xi] = \sup_{Q\in\Theta} E_Q[\xi],$$

其中　$\Theta = \{\frac{\mathrm{d}Q^v}{\mathrm{d}P} = \exp\left\{\int_0^T v_s \mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^T v_s^2 \mathrm{d}s\right\}, |v_s| \leqslant \mu\}$ μ 为 Lipschtz 常数。

2　主要结果

引理 2.1　对任意 $\xi \in L^2(\Omega, F_T, P)$,有 $E_{-\mu}[-\xi] = -E_{\mu}[\xi]$。

证明　设 $Y_t = E_{-\mu}[-\xi | F_t]$,由 BSDE 的惟 一性定理知,存在一适应过程$\{Z_t\} \in H_F^2(0,T;\mathbf{R}^d)$使得$(Y_t, Z_t)$是下面 BSDE 的解:

$$Y_t = -\xi + \int_t^T -\mu |Z_s| \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}B_s, t \in [0,T]。$$

容易验证$(-Y_t, -Z_t)$是下面 BSDE 在 t 时刻的解:

$$Y_t = \xi + \int_t^T \mu |Z_s| \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}B_s, t \in [0,T]。$$

由 BSDE 的惟一性定理知:$-E_{-\mu}[-\xi | F_t] = E_{\mu}[\xi | F_t]$。特别地,当 $t = 0$ 时,

$$-E_{-\mu}[-\xi] = E_{\mu}[\xi]。$$

下面的引理说明当生成元 g 满足某些限制条件时,g-方差的比较定理仍然成立。

引理 2.2　设 $g_i, i = 1,2$ 满足条件(A1)与(A2)且 $g_i, i = 1,2$ 是凸函数和关于 z 是一致正齐的。如果 $\forall (t,y,z) \in [0,T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d, g_1(t,y,z) \geqslant g_2(t,y,z)$, P-a.s., 则对任意的 $\xi \in L^4(\Omega, F_T, P)$ 有 $D_{g_1}[\xi] \geqslant D_{g_2}[\xi]$。

证明　因为 $g_i, i = 1,2$ 是凸函数,则 $g_i, i = 1,2$ 与 y 无关(参见[4]引理 4.5)。仅考虑

$$g_i: \Omega \times [0,T] \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}。$$

因为 $g_i, i = 1,2$ 是凸函数且在 $\mathbf{R}^d$ 上一致正齐的,根据可测最大值原理[6]知,存在一个凸闭子集 D 表示为:

$$D = \{b_t \in \mathbf{R}^d : b_t \cdot z \leqslant g(t,z), \forall t \in [0,T], z \in \mathbf{R}^d\},$$

满足

(Bi) $g(t,z) = \sup_{b_t\in D} b_t \cdot z \quad \forall t \in [0,T], z \in \mathbf{R}^d$;

(Bii) 对每个 $t \in [0,T], z \in \mathbf{R}^d$, 存在 $b_t(z) \in D$,使得 $b_t(z) \cdot z = g(t,z)$。

这里 $b_t(z)$是有界的。因为由(A1)和(A2)可知 $|g(t,z)| \leqslant \mu |z|$,这就暗含着 $|b_t(z) \cdot z| \leqslant \mu |z|$,因此 $|b_t(z)| \leqslant \mu$。

对 $\xi \in L^4(\Omega, F_T, P)$,令 $\eta = \xi - E_{g_2}[\xi]$,因此 $D_{g_2}[\xi] = E_{g_2}[\eta^2]$。

假设 $Y_t = E_{g_2}[\eta^2 | F_t]$,则存在一适应过程$\{Z_t\} \in H_F^2(0,T;\mathbf{R}^d)$使得$(Y_t, Z_t)$是下面 BSDE 的解:

$$Y_t = \eta^2 + \int_t^T g_2(s, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}B_s, t \in [0,T]。\tag{2}$$

上面的 BSDE 可以写成

$$Y_t = \eta^2 + \int_t^T b_s(Z_s) \cdot Z_s \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}B_s, t \in [0,T],$$

其中

$$b_s(Z_s) = \begin{cases} \dfrac{g_2(s, Z_s)}{Z_s} & 当 Z_s \neq 0; \\ 0 & 当 Z_s = 0。\end{cases}$$

根据 Girsanov's 定理知,存在 $Q \in \Theta$ 使得 $\tilde{B}_s = B_s - \int_0^s b_r(Z_r)\mathrm{d}r$ 是 Q 下的布朗运动。

因此,$E_{g_2}[\eta^2] = E_Q[\eta^2]$。

给定 $b_t(Z_t)$ 和概率测度 Q，对任意的 $\zeta \in L^2(\Omega, F_T, P)$，考虑 $\bar{Y}_t = E_Q[\zeta \mid F_t]$，根据倒向随机微分方程解的存在惟一性定理知，存在 $\{\bar{Z}_t\} \in H_F^2(0,T;\mathbf{R}^d)$ 使得 $\{\bar{Y}_t, \bar{Z}_t\}$ 是下面 BSDE 的解：

$$\bar{Y}_t = \zeta + \int_t^T b_s(Z_s)\cdot \bar{Z}_s \mathrm{d}s - \int_t^T \bar{Z}_s \mathrm{d}B_s,\ t \in [0,T]。 \tag{3}$$

同时考虑

$$\bar{Y}_t = \zeta + \int_t^T g_2(s,\bar{Z}_s)\cdot \mathrm{d}s - \int_t^T \bar{Z}_s \mathrm{d}B_s,\ t \in [0,T]。 \tag{4}$$

注意到(Bi) $g_2(s,\bar{Z}_s) \geqslant b_s(Z_s)\cdot \bar{Z}_s, \forall s \in [0,T], Z \in \mathbf{R}^d$，比较(3),(4)，根据倒向随机微分方程的比较定理[7]可得

$$E_{g_2}[\zeta] \geqslant E_Q[\zeta],\ \forall \zeta \in L^2(\Omega, F_T, P)。$$

取 $\zeta = \xi$ 和 $\zeta = (\eta - E_{g_1}[\eta])^2$ 则有

$$E_{g_2}[\xi] \geqslant E_Q[\xi] \tag{5}$$

和

$$E_{g_2}[(\eta - E_{g_1}[\eta])^2] \geqslant E_Q[(\eta - E_{g_1}[\eta])^2], \tag{6}$$

由假设 P-a.s., $g_1(t,y,z) \geqslant g_2(t,y,z), (t,y,z) \in [0,T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$，根据 BSDE 的比较定理和性质 1.1 知

$$E_{g_1}[\eta] = E_{g_1}[\xi] - E_{g_2}[\xi] \geqslant 0 \tag{7}$$

和

$$E_{g_1}[(\eta - E_{g_1}[\eta])^2] \geqslant E_{g_2}[(\eta - E_{g_1}[\eta])^2]。 \tag{8}$$

注意到

$$E_Q[(\eta - E_{g_1}[\eta])^2] = E_Q[\eta^2] + (E_{g_1}[\eta])^2 - 2E_Q[\eta]E_{g_1}[\eta],$$

(5) 暗示着 $E_Q[\eta] \leqslant 0$，结合(7) 不难知道 $E_Q[\eta]E_{g_1}[\eta] \leqslant 0$。因此

$$E_Q[(\eta - E_{g_1}[\eta])^2] \geqslant E_Q[\eta^2]。$$

根据(6),(8) 和利用 g- 期望的性质 1.1 知

$$D_{g_2}[\xi] = E_{g_2}[\eta^2] = E_Q[\eta^2] \leqslant E_Q[(\eta - E_{g_1}[\eta])^2] \leqslant E_{g_1}[(\eta - E_{g_1}[\eta])^2] = D_{g_1}[\eta] = D_{g_1}[\xi]。$$

下面将要给出 g- 期望的 Kolmogorov 不等式的一种特殊形式。

Kolmogorov 不等式 设 $X_1, X_2, \cdots X_n \in L^4(\Omega, F_T, P)$ 且关于 P 独立，记 $S_j = X_1 + X_2 + \cdots + X_j, j = 1,2,\cdots n$ 和 $a = \sum_{i=1}^n E_\mu[X_i]$，则对于任意大于 a 的数 ε，有

$$P_{-\mu}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} | S_j + E_{-\mu}[-S_j] | \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D_\mu[S_n]}{(\varepsilon - a)^2}。$$

证明 不失一般性，在下面的证明中仅考虑 $E[X_i] = 0, i = 1,2,\cdots n$。由 BSDE 比较定理知

$$E_\mu[X_i] \geqslant 0, i = 1,2,\cdots n。$$

分三步证明。

步骤 1 先证

$$P_{-\mu}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} | S_j - E_\mu[S_j] | \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{(\varepsilon - a)^2},$$

其中 $\mathrm{Var}[S_n] = E[(S_n - E[S_n])^2]$。由

$$\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} | S_j - E_\mu[S_j] | \geqslant \varepsilon\} \subset \{(\max_{1\leqslant j\leqslant n} | S_j | + \max_{1\leqslant j\leqslant n} | E_\mu[S_j] |) \geqslant \varepsilon\}$$

知

$$P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} | S_j - E_\mu[S_j] | \geqslant \varepsilon) \leqslant P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} | S_j | \geqslant (\varepsilon - \max_{1\leqslant j\leqslant n} | E_\mu[S_j] |))。 \tag{9}$$

而根据 $E_\mu[S_j] \geqslant E[S_j] = 0, j = 1,2,\cdots n$，可以得到

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} | E_\mu[S_j] | = \max_{1\leqslant j\leqslant n} E_\mu[S_j] \leqslant E_\mu[X_1] + E_\mu[X_2] + \cdots E_\mu[X_n] = a。$$

由假设 $\varepsilon > a$ 不难得到 $(\varepsilon - \max_{1\leqslant j\leqslant n} | E_\mu[S_j] |) > 0$。根据古典 Kolmogorov 不等式[8] 可得到

$$P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} | S_j | \geqslant (\varepsilon - \max_{1\leqslant j\leqslant n} | E_\mu[S_j] |)) \leqslant \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{(\varepsilon - \max_{1\leqslant j\leqslant n} | E_\mu[S_j] |)^2},$$

由$(\varepsilon - \max_{1\leqslant j\leqslant n} |E_\mu[S_j]|) \geqslant (\varepsilon - a) > 0$,可以得到

$$P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j| \geqslant (\varepsilon - \max_{1\leqslant j\leqslant n} |E_\mu[S_j]|)) \leqslant \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{(\varepsilon - a)^2},$$

由引理 1.1 和式(9) 得 $$P_{-\mu}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j - E_\mu[S_j]| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{(\varepsilon - a)^2}。$$

步骤 2　由于 $g = \mu|z|, \mu > 0$ 是凸函数且为正齐次的,由引理 2.2 知 $\mathrm{Var}[S_n] \leqslant D_\mu[S_n]$,

这暗示着 $$P_{-\mu}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j - E_\mu[S_j]| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D_\mu[S_n]}{(\varepsilon - a)^2}。$$

步骤 3　由引理 2.1 可知

$$P_{-\mu}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j - E_\mu[S_j]| \geqslant \varepsilon) = P_{-\mu}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j + E_{-\mu}[-S_j]| \geqslant \varepsilon),$$

因此可得

$$P_{-\mu}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j + E_{-\mu}[-S_j]| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D_\mu[S_n]}{(\varepsilon - a)^2}。$$

上面的表达式说明在 g- 概率 $P_{-\mu}(\cdot)$ 意义下,事件$\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j + E_{-\mu}[-S_j]| \geqslant \varepsilon\}$ 发生的可能性仍然被 S_n 的 g- 方差 $D_\mu[S_n]$ 的倍数所控制。

显然,当 $\mu = 0$ 时,上面 Kolmogorov 不等式就是一般概率测度 P 下的形式,即

$$P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j - E[S_j]| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D[S_n]}{\varepsilon^2}。$$

按照上面的证明步骤可得下面的推论:

推论　设 $g_i, i = 1,2$ 满足条件(A1)与(A2)且 $g_i, i = 1,2$ 是凸函数和关于 z 是一致正齐的。若 $X_1, X_2, \cdots X_n, S_j$ 满足上面命题中的所有假设并记 $b = \sum_{i=1}^{n} E_{g_1}[X_i]$,若 P-a.s., $g_1(t,y,z) \geqslant 0 \geqslant g_2(t,y,z)$,$(t,y,z) \in [0,T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$,则

$$P_{g_2}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j - E_{g_1}[S_j]| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D_{g_1}[S_n]}{(\varepsilon - b)^2}。$$

参考文献:

[1] PARDOUX E, PENG S. Adapted solution of a backward stochasti c differential equation[J]. Systems Control Letters, 1990, 14(1):55-61.

[2] PENG S. BSDE and related g-expectations[M]// N El Karoui, L Mazliak Pitman. Research Notes in Mathematics Series, Backward Stochastic Differential Equation. Harlow: AddisonWelsey Longman, 1997: 141-159.

[3] CHEN Z, KULPERGER R, JIANG L. Jensen's inequality for g-expectation: part 1[J]. C P Acad Sci Paris: S'erie I, 2003, 337(11): 725-730.

[4] BRIAND P, COQUET F, HU Y, et al. A converse comparison theorem for BSDEs and related properties of g-expectation[J]. Electon Comm Probab, 2000, 5:101-117.

[5] CHEN Z. A general downcrossing inequality for g-martingales[J]. Statistics and Probability Letters, 2000, 46:169-175.

[6] REVUZ D, YOR M. Continuous martingales and brownian motion[M]. 1st edition. Berlin: Springer-Verlag, 1999: 257-258.

[7] EL KAROUI N, PENG S, QUENEZ M C. Backward stochastic differential equation in finance[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(1): 1-71.

[8] ASH B. Real analysis and probability[M]. 1st edition. New York: Academic Press, 1972: 271-275.

(编辑:李晓红)