第 44 卷 第 2 期 山 东 大 学 学 报 (理 学 版) 2009 年 2 月
Vol.44 No.2 Journal of Shandong University(Natural Science) Feb. 2009

文章编号:1671-9352(2009)02-0028-05

一类含位势 Sobolev-Hardy 极值函数的估计

何少通,姚仰新
(华南理工大学理学院数学系, 广东 广州 510640)

摘要:研究了一类含位势 Sobolev-Hardy 极值函数, 这类函数是相应的最佳位势 Sobolev-Hardy 常数的达到函数。运用巧妙细致的分析方法, 对这一类极值函数进行了截断误差估计, 这些估计结果对于研究带有含 Sobolev-Hardy 临界项的椭圆方程解的存在性具有重要意义。

关键词:位势 Sobolev-Hardy 极值函数; 截断; Caffalelli-Kohn-Nirenberg 不等式
中图分类号:O175.25 **文献标志码:**A

Estimates on the extremal weighted Sobolev-Hardy functions

HE Shao-tong, YAO Yang-xin
(School of Mathematical Sciences, South China University of Technology, Guangzhou 510640, Guangdong, China)

Abstract: A kind of extremal weighted Sobolev-Hardy functions by which the best Sobolev-Hardy constants can be achieved was discussed. By delicate analytic methods, the cutting-off error estimates were obtained. They play an important role in the study of elliptic problems with critical Sobolev-Hardy exponents.

Key words: extremal weighted Sobolev-Hardy functions; cut-off; Caffalelli-Kohn-Nirenberg inequality

0 引言

设区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^N\ (N\geqslant 3)$是包含原点的有界光滑区域, 考虑如下的椭圆方程

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{-2a}\nabla u)-\mu\dfrac{u}{|x|^{2(a+1)}}=\dfrac{|u|^{p-2}}{|x|^{bp}}u+f(x,u), & x\in\Omega\setminus\{0\}, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

其中 $0\leqslant\mu<(\sqrt{\bar{\mu}}-a)^2, \bar{\mu}=\left(\dfrac{N-2}{2}\right)^2$, $0\leqslant a<\sqrt{\bar{\mu}}$, $a\leqslant b<a+1$, $\lambda>0$, $p=p(a,b)=\dfrac{2N}{N-2d}$, $d=1+a-b\in(0,1]$。特别地, $p(0,0)=\dfrac{2N}{N-2}$是临界 Sobolev 指数。

对于任意的 $\mu\in[0,(\sqrt{\bar{\mu}}-a)^2)$, 将空间 $H_0^1(\Omega,|x|^{-2a})$按下列范数

$$\|u\|=\left(\int_\Omega\left(|x|^{-2a}|\nabla u|^2-\mu\frac{|u|^2}{|x|^{2(a+1)}}\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

完备, 并记完备后的空间为 H。与方程(0.1) 的研究有密切关联的是著名的 Caffalelli-Kohn-Nirenberg 不等式[1],

收稿日期:2008-11-01
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771074)
作者简介:何少通(1984-),女,硕士,研究方向为非线性椭圆型方程.Email:he.shaotong@mail.scut.edu.cn

$$\left(\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{-bp}|u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}}\leqslant C_{a,b}\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{-2a}|\nabla u|^2\mathrm{d}x,\ \forall u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N),\tag{0.2}$$

这里 $C_{a,b}>0$，若在(0.2)式中取 $b=1+a$，$p=2$，则有下面的位势 Hardy 不等式：

$$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|u|^2}{|x|^{2(1+a)}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{(\sqrt{\mu}-a)^2}\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{-2a}|\nabla u|^2\mathrm{d}x,\ \forall u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N),\tag{0.3}$$

于是由式(0.3)，知道范数 $\|u\|$ 与空间 $H_0^1(\Omega,|x|^{-2a})$ 通常的范数 $\left(\int_\Omega|x|^{-2a}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 等价。

定义最佳常数

$$S=\inf_{u\in H\setminus\{0\}}\frac{\|u\|^2}{\left(\int_\Omega\frac{|u|^p}{|x|^{bp}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}}},$$

最近，Yang Minbo 等[2] 找到 S 的达到函数

$$y_\varepsilon(x)=\frac{k_\varepsilon}{|x|^{\gamma'}(\varepsilon^2+|x|^{(p-2)\beta})^{\frac{2}{p-2}}},$$

这里 $\varepsilon>0$，$k_\varepsilon=(2\varepsilon^2p\beta^2)^{\frac{1}{p-2}}$，$\beta=\sqrt{(\sqrt{\mu}-a)^2-\mu}$，$\gamma'=\sqrt{\mu}-a-\beta$。$y_\varepsilon(x)$ 是方程

$$-\mathrm{div}(|x|^{-2a}\nabla u)-\mu\frac{u}{|x|^{2(a+1)}}=\frac{|u|^{p-2}}{|x|^{bp}}u,\ x\in\mathbf{R}^N\setminus\{0\}$$

的解，并且满足

$$\int_{\mathbf{R}^N}\left(|x|^{-2a}|\nabla y_\varepsilon|^2-\mu\frac{|y_\varepsilon|^2}{|x|^{2(a+1)}}\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|y_\varepsilon|^p}{|x|^{bp}}\mathrm{d}x=S^{\frac{p}{p-2}},\tag{0.4}$$

进一步，他们验证了 S 与区域 Ω 无关。

本文，将对极值函数 $y_\varepsilon(x)$ 进行截取估计，这些估计结果对于研究方程(0.1)有着重要的意义，而与方程(0.1)相关的研究结果请参见文献[3]与[4]。

1　定理及证明

设 $U_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{|x|^{\gamma'}(\varepsilon^2+|x|^{(p-2)\beta})^{\frac{2}{p-2}}}$，$\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 是一个截断函数，定义如下：

$$\varphi(x)=\begin{cases}1,\ |x|\leqslant R,\\0,\ |x|\geqslant 2R,\\0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1。\end{cases}$$

其中 $R>0$，$B_{2R}(0)\subset\Omega$。设 $u_\varepsilon(x)=\varphi(x)U_\varepsilon(x)$，$\nu_\varepsilon(x)=\dfrac{u_\varepsilon(x)}{\left(\int_\Omega\frac{|u_\varepsilon|^p}{|x|^{bp}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}}$，显然 $\int_\Omega\dfrac{|\nu_\varepsilon|^p}{|x|^{bp}}\mathrm{d}x=1$。

定理 1　对于 $\nu_\varepsilon(x)$，有下面的估计：

(1) $\|\nu_\varepsilon\|^2=S+O(\varepsilon^{\frac{4}{p-2}})$；

(2) $\int_\Omega|\nabla\nu_\varepsilon|\mathrm{d}x=O(\varepsilon^{\frac{2}{p-2}})$；

(3)

$$\int_\Omega|\nu_\varepsilon|^r\mathrm{d}x=\begin{cases}O(\varepsilon^{\frac{2r}{p-2}}), & 1\leqslant r<\dfrac{N}{\beta+(\sqrt{\mu}-a)},\\O(\varepsilon^{\frac{2r}{p-2}}|\ln\varepsilon|), & r=\dfrac{N}{\beta+(\sqrt{\mu}-a)},\\O(\varepsilon^{\frac{2}{(p-2)\beta}(N-r(\sqrt{\mu}-a))}), & \dfrac{N}{\beta+(\sqrt{\mu}-a)}<r<2^*;\end{cases}$$

(4) 对于 $1 \leqslant q < p = \dfrac{2N}{N-2d}, 0 \leqslant t < (1+a)q + n(1-\dfrac{q}{2})$，有

$$\int_\Omega \frac{|\nu_\varepsilon|^q}{|x|^t}\mathrm{d}x = \begin{cases} O(\varepsilon^{\frac{2q}{p-2}}), & 1 \leqslant q < \dfrac{N-t}{\beta+(\sqrt{\bar\mu}-a)}, \\ O(\varepsilon^{\frac{2q}{p-2}}|\ln\varepsilon|), & q = \dfrac{N-t}{\beta+(\sqrt{\bar\mu}-a)}, \\ O(\varepsilon^{\frac{2}{(p-2)\beta}(N-t-q(\sqrt{\bar\mu}-a))}), & \dfrac{N-t}{\beta+(\sqrt{\bar\mu}-a)} < q < p = \dfrac{2N}{N-2d}; \end{cases}$$

(5)

$$\int_\Omega \frac{|\nu_\varepsilon|^q}{|x|^{bp}}\mathrm{d}x = \begin{cases} O(\varepsilon^{\frac{2q}{p-2}}), & 1 \leqslant q < \dfrac{N-bp}{\beta+(\sqrt{\bar\mu}-a)}, \\ O(\varepsilon^{\frac{2q}{p-2}}|\ln\varepsilon|), & q = \dfrac{N-bp}{\beta+(\sqrt{\bar\mu}-a)}, \\ O(\varepsilon^{\frac{2}{(p-2)\beta}(N-bp-q(\sqrt{\bar\mu}-a))}), & \dfrac{N-bp}{\beta+(\sqrt{\bar\mu}-a)} < q < p = \dfrac{2N}{N-2d}。 \end{cases}$$

证明 (1) 根据式(0.4)，可得

$$\|y_\varepsilon\|^2 = S^{\frac{p}{p-2}} = k_\varepsilon^2 \|U_\varepsilon\|^2,$$

$$\int_{\mathbf{R}^N} \frac{|y_\varepsilon|^p}{|x|^{bp}}\mathrm{d}x = S^{\frac{p}{p-2}} = k_\varepsilon^p \int_{\mathbf{R}^N} \frac{|U_\varepsilon|^p}{|x|^{bp}}\mathrm{d}x,$$

直接计算有

$$\nabla u_\varepsilon = \nabla(U_\varepsilon\varphi) = U_\varepsilon \nabla\varphi + \varphi\nabla U_\varepsilon。$$

所以当 $|x| \leqslant R$ 时，$\nabla u_\varepsilon = \nabla U_\varepsilon$，当 $|x| \geqslant 2R$ 时，$\nabla u_\varepsilon = 0$。因此可以得到

$$\int_\Omega\left(|x|^{-2a}|\nabla u_\varepsilon|^2 - \mu\frac{|u_\varepsilon|^2}{|x|^{2(a+1)}}\right)\mathrm{d}x =$$

$$O(1) + \int_{|x|\leqslant R}\left(|x|^{-2a}|\nabla U_\varepsilon|^2 - \mu\frac{|U_\varepsilon|^2}{|x|^{2(a+1)}}\right)\mathrm{d}x =$$

$$O(1) + \int_{\mathbf{R}^N}\left(|x|^{-2a}|\nabla U_\varepsilon|^2 - \mu\frac{|U_\varepsilon|^2}{|x|^{2(a+1)}}\right)\mathrm{d}x = O(1) + \|U_\varepsilon\|^2。$$

另外，

$$\int_\Omega \frac{|u_\varepsilon|^p}{|x|^{bp}}\mathrm{d}x = O(1) + k_\varepsilon^{-p}\int_{\mathbf{R}^N}\frac{|y_\varepsilon|^p}{|x|^{bp}}\mathrm{d}x = O(1) + k_\varepsilon^{-p}S^{\frac{p}{p-2}},$$

故有

$$\|\nu_\varepsilon\|^2 = \frac{\|u_\varepsilon\|^2}{\left(\int_\Omega \frac{|u_\varepsilon|^p}{|x|^{bp}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}}} = \frac{O(1) + \|U_\varepsilon\|^2}{\left(\int_\Omega \frac{|u_\varepsilon|^p}{|x|^{bp}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}}} =$$

$$\frac{O(1) + k_\varepsilon^{-2}S^{\frac{p}{p-2}}}{O(1) + k_\varepsilon^{-2}S^{\frac{2}{p-2}}} = S + O(k_\varepsilon^2) = S + O(\varepsilon^{\frac{4}{p-2}}),$$

这样(1)就得以证明。

(2) 当 $|x| \leqslant R$ 时，$\nabla u_\varepsilon = \nabla U_\varepsilon$，直接计算得：$\nabla U_\varepsilon = |x|^{-r'-1}(\varepsilon^2 + |x|^{(p-2)\beta})^{\frac{p}{2-p}}\{[\beta - (\sqrt{\bar\mu} - a)]\varepsilon^2 - [\beta + (\sqrt{\bar\mu} - a)]|x|^{(p-2)\beta}\}$，所以

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|\mathrm{d}x =$$

$$O(1) + \int_{|x|\leqslant R}|x|^{-r'-1}(\varepsilon^2 + |x|^{(p-2)\beta})^{\frac{p}{2-p}}|[-\beta + (\sqrt{\bar\mu} - a)]\varepsilon^2 + [\beta + (\sqrt{\bar\mu} - a)]|x|^{(p-2)\beta}|\mathrm{d}x =$$

$$O(1) + \omega_N\int_0^R \rho^{\alpha+\beta+\sqrt{\bar\mu}}(\varepsilon^2 + \rho^{(p-2)\beta})^{\frac{p}{2-p}}|[-\beta + (\sqrt{\bar\mu} - a)]\varepsilon^2 + [\beta + (\sqrt{\bar\mu} - a)]\rho^{(p-2)\beta}|\mathrm{d}\rho \leqslant$$

$$O(1)+C\int_0^R \rho^{a+\sqrt{\mu}-\beta}\mathrm{d}\rho。$$

因为 $a+\sqrt{\mu}-\beta>0$，所以$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|\mathrm{d}x=O(1)$，于是

$$\int_\Omega |\nabla \nu_\varepsilon|\mathrm{d}x=\frac{\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega \frac{|u_\varepsilon|^p}{|x|^{bp}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}}=\frac{O(1)}{O(1)+k_\varepsilon^{-1}S^{\frac{1}{p-2}}}=O(\varepsilon^{\frac{2}{p-2}}),$$

这样(2) 得以证明。

(3) 下面用 ω_N 表示 $\mathbf{R}_N$ 中单位球的表面积，则可得

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^r\mathrm{d}x=O(1)+\omega_N\int_0^R \rho^{N-1-rr'}(\varepsilon^2+\rho^{(p-2)\beta})^{-\frac{2}{p-2}r}\mathrm{d}\rho=$$

$$O(1)+\omega_N\varepsilon^{-\frac{4r}{p-2}+\frac{2}{(p-2)\beta}(N-rr')}\int_0^{R\varepsilon^{-\frac{2}{(p-2)\beta}}}\rho^{N-1-rr'}(1+\rho^{(p-2)\beta})^{-\frac{2}{p-2}r}\mathrm{d}\rho。$$

（ⅰ）如果 $r=\dfrac{N}{\beta+(\sqrt{\mu}-a)}$，则

$$-\frac{4r}{p-2}+\frac{2}{(p-2)\beta}(N-rr')=0,$$

$$-2\beta r+N-1-rr'=N-1-r[\beta+(\sqrt{\mu}-a)]=-1,$$

于是

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^r\mathrm{d}x=O(1)+\omega_N\int_0^{R\varepsilon^{-\frac{2}{(p-2)\beta}}}\rho^{N-1-rr'}(1+\rho^{(p-2)\beta})^{-\frac{2}{p-2}r}\mathrm{d}\rho\leqslant$$

$$O(1)+\omega_N\int_1^{R\varepsilon^{-\frac{2}{(p-2)\beta}}}\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\rho=O(1)+O(|\ln\varepsilon|),$$

进一步有$\int_\Omega |\nu_\varepsilon|^r\mathrm{d}x=O(\varepsilon^{\frac{2r}{p-2}}|\ln\varepsilon|)$。

（ⅱ）如果 $1\leqslant r<\dfrac{N}{\beta+(\sqrt{\mu}-a)}$，则有

$$-2\beta r+N-1-rr'>-1,$$

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^r\mathrm{d}x=O(1)+\omega_N\int_0^R \rho^{N-1-rr'}(\varepsilon^2+\rho^{(p-2)\beta})^{-\frac{2}{p-2}r}\mathrm{d}\rho\leqslant$$

$$O(1)+\omega_N\int_0^R \rho^{-2\beta r+N-1-rr'}\mathrm{d}\rho=O(1),$$

于是就有$\int_\Omega |\nu_\varepsilon|^r\mathrm{d}x=O(\varepsilon^{\frac{2r}{p-2}})$。

（ⅲ）如果$\dfrac{N}{\beta+(\sqrt{\mu}-a)}<r<2^*$，可得

$$-\frac{4r}{p-2}+\frac{2}{(p-2)\beta}(N-rr')<0,$$

$$-2\beta r+N-1-rr'<-1。$$

此时

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^r\mathrm{d}x=O(1)+\omega_N\varepsilon^{-\frac{4r}{p-2}+\frac{2}{(p-2)\beta}(N-rr')}\int_1^\infty \rho^{N-1-rr'}(1+\rho^{(p-2)\beta})^{-\frac{2}{p-2}r}\mathrm{d}\rho=O(\varepsilon^{-\frac{4r}{p-2}+\frac{2(N-rr')}{(p-2)\beta}}),$$

于是就有$\int_\Omega |\nu_\varepsilon|^r\mathrm{d}x=O(\varepsilon^{\frac{2r}{p-2}-\frac{4r}{p-2}+\frac{2(N-rr')}{(p-2)\beta}})=O(\varepsilon^{\frac{2}{(p-2)\beta}(N-r(\sqrt{\mu}-a))})$，这样(3) 得以证明。

(4) 对于 $1\leqslant q<p=\dfrac{2N}{N-2d}$，$0\leqslant t<(1+a)q+n\left(1-\dfrac{q}{2}\right)$，

$$\int_\Omega \frac{|u_\varepsilon|^q}{|x|^t}\mathrm{d}x=O(1)+\omega_N\int_0^R \rho^{N-1-t-qr'}(\varepsilon^2+\rho^{(p-2)\beta})^{-\frac{2}{p-2}q}\mathrm{d}\rho=$$

$$O(1)+\omega_N\varepsilon^{-\frac{4q}{p-2}+\frac{2}{(p-2)\beta}(N-t-qr')}\int_0^{R\varepsilon^{-\frac{2}{(p-2)\beta}}}\rho^{N-1-t-qr'}(1+\rho^{(p-2)\beta})^{-\frac{2}{p-2}q}\mathrm{d}\rho。$$

（ⅰ）若 $q=\dfrac{N-t}{\beta+(\sqrt{\mu}-a)}$，则 $-\dfrac{4q}{p-2}+\dfrac{2}{(p-2)\beta}(N-t-qr')=0$ 且

$$-2\beta q+N-1-t-qr'=N-t-1-q[\beta+(\sqrt{\mu}-a)]=-1,$$

所以

$$\int_\Omega\frac{|u_\varepsilon|^q}{|x|^t}\mathrm{d}x=O(1)+\omega_N\int_0^{R\varepsilon^{-\frac{2}{(p-2)\beta}}}\rho^{N-1-t-qr'}(1+\rho^{(p-2)\beta})^{-\frac{2}{p-2}q}\mathrm{d}\rho\leqslant$$

$$O(1)+\omega_N\int_1^{R\varepsilon^{-\frac{2}{(p-2)\beta}}}\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\rho=O(1)+O(|\ln\varepsilon|),$$

因而$\displaystyle\int_\Omega\frac{|\nu_\varepsilon|^q}{|x|^t}\mathrm{d}x=O(\varepsilon^{\frac{2q}{p-2}}|\ln\varepsilon|)$。

（ⅱ）若 $1\leqslant q<\dfrac{N-t}{\beta+(\sqrt{\mu}-a)}$，则

$$-2\beta q+N-1-t-qr'>-1,$$

$$\int_\Omega\frac{|u_\varepsilon|^q}{|x|^t}\mathrm{d}x=O(1)+\omega_N\int_0^R\rho^{N-1-t-qr'}(\varepsilon^2+\rho^{(p-2)\beta})^{-\frac{2}{p-2}q}\mathrm{d}\rho\leqslant$$

$$O(1)+\omega_N\int_0^R\rho^{-2\beta q+N-1-t-qr'}\mathrm{d}\rho=O(1),$$

故有$\displaystyle\int_\Omega\frac{|\nu_\varepsilon|^q}{|x|^t}\mathrm{d}x=O(\varepsilon^{\frac{2q}{p-2}})$。

（ⅲ）若$\dfrac{N-t}{\beta+(\sqrt{\mu}-a)}<q<p$，这里 $p=\dfrac{2N}{N-2d}$，则 $-\dfrac{4q}{p-2}+\dfrac{2}{(p-2)\beta}(N-t-qr')<0$ 且

$$-2\beta q+N-1-t-qr'<-1,$$

于是

$$\int_\Omega\frac{|u_\varepsilon|^q}{|x|^t}\mathrm{d}x=O(1)+\omega_N\varepsilon^{-\frac{4q}{p-2}+\frac{2}{(p-2)\beta}(N-t-qr')}\int_1^\infty\rho^{N-1-t-qr'}(1+\rho^{(p-2)\beta})^{-\frac{2}{p-2}q}\mathrm{d}\rho=$$

$$O(1)+O(\varepsilon^{-\frac{4q}{p-2}+\frac{2}{(p-2)\beta}(N-t-qr')}),$$

故有

$$\int_\Omega\frac{|\nu_\varepsilon|^q}{|x|^t}\mathrm{d}x=O(\varepsilon^{\frac{2}{(p-2)\beta}(N-t-q(\sqrt{\mu}-a))})。$$

这样(4)得以证明。

(5)的证明与(4)类似。

参考文献：

[1] CAFFARELLI L, KOHN R, NIRENBERG L. First order interpolation inequality with weights[J]. Compositio Math, 1984(53):259-275.

[2] YANG Minbo, SHEN Zifei. The effect of domain topology on the number of positive solutions for singular elliptic problems involving the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities[J]. J Math Anal Appl, 2007(334):273-288.

[3] DONGSHENG Kang. On the elliptic problems with critical weighted Sobolev-Hardy exponents[J]. Nonlinear Analysis, 2007(66):1037-1050.

[4] BENJIN Xuan. The solvability of quasilinear Brezis-Nirenberg-type problems with singular weights[J]. Nonlinear Analysis, 2005(62):703-725.

（编辑：陈丽萍）