第 44 卷 第 2 期 Vol.44 No.2
山 东 大 学 学 报 (理 学 版) Journal of Shandong University(Natural Science)
2009 年 2 月 Feb. 2009

文章编号:1671-9352(2009)02-0091-06

完全二部图 $K_{5,n}$ 的点可区别 IE-全染色

何文玉, 陈祥恩*
(西北师范大学数学与信息科学学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要:设 G 是简单图, 图 G 的一个 k-点可区别 IE-全染色(简记为 k-VDIET 染色) f 是指一个从 $V(G)\cup E(G)$ 到 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的映射, 且满足: $\forall uv\in E(G)$,有 $f(u)\neq f(v)$; $\forall u,v\in V(G)$, $u\neq v$, 有 $C(u)\neq C(v)$, 其中 $C(u)=\{f(u)\}\cup\{f(uv)\mid uv\in E(G)\}$。数 $\min\{k\mid G$ 有一个 k-VDIET 染色$\}$称为图 G 的点可区别 IE-全色数,记为 $\chi_{vt}^{ie}(G)$。本文给出了完全二部图 $K_{5,n}(n\geqslant 6)$的点可区别 IE-全色数。

关键词: 图; 点可区别 IE-全染色; 点可区别 IE-全色数; 完全二部图
中图分类号:O157.5　　**文献标志码**:A

Vertex distinguishing IE-total chromatic numbers of complete bipartite graph $K_{5,n}$

HE Wen-yu, CHENG Xiang-en*
(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: Let G be a simple graph. An IE-total coloring f of G refers to a coloring of the vertices and edges of G so that no two adjacent vertices receive the same color. Let $C(u)$ be the set of colors of vertex u and edges incident to u under f. For an IE-total coloring f of G using k colors, if $C(u)\neq C(v)$ for any two different vertices u and v of $V(G)$, then f is called a k-vertex-distinguishing IE-total-coloring of G, or a k-VDIET coloring of G for short. The minimum number of colors required for a VDIET coloring of G is denoted by $\chi_{vt}^{ie}(G)$, and it is called the VDIET chromatic number of G. VDIET chromatic numbers for the complete bipartite graph $K_{5,n}(n\geqslant 6)$ were given.

Key words: graphs; vertex-distinguishing IE-total coloring; vertex-distinguishing IE-total chromatic number; complete bipartite graph

在文献[1,2]中, 点可区别正常全染色已被研究过。本文将讨论一种非正常的点可区别全染色。图 G 的一个全染色叫做图 G 的正常全染色,如果以下三个条件被满足,条件(v): 相邻的两个顶点不能染相同的颜色; 条件(e): 相邻的两条边不能染相同的颜色; 条件(i): 任意的点和与之关联的边不能染相同的颜色。如果图 G 的全染色只满足条件(v), 这样的全染色称为图 G 的 IE-全染色。如果 f 是图 G 的使用了 k 种颜色的 IE-全染色, 且对任意 $u,v\in V(G)$, $u\neq v$, 有 $C(u)\neq C(v)$, 那么 f 称为图 G 的 k-点可区别 IE-全染色, 或 k-VDIET 染色。数 $\min\{k\mid G$ 有一个 k-VDIET 染色$\}$称为图 G 的点可区别 IE-全色数, 记为 $\chi_{vt}^{ie}(G)$。

对图 G, 令 n_i 表示度为 i 的顶点个数,$\delta\leqslant i\leqslant\Delta$。设

$$\xi(G)=\min\{k\mid\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\cdots+\binom{k}{i+s}+\binom{k}{i+s+1}\geqslant n_i+n_{i+1}+\cdots+n_{i+s},\ \delta\leqslant i\leqslant i+s\leqslant\Delta, s\geqslant 0\}。$$

收稿日期:2008-09-26
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771091)
作者简介:何文玉(1983-),男,硕士,研究方向为图论及其应用.Email: hewenyu518518@163.com
* 通讯作者:陈祥恩(1965-),男,硕士,教授,硕士研究生导师,研究方向为图的染色理论与图的代数理论.Email: chenxe@nwnu.edu.cn

显然有 $\chi_{vt}^{ie}(G)\geqslant\xi(G)$。

关于完全二部图 $K_{1,n}$, $K_{2,n}$, $K_{3,n}$, $K_{4,n}$ 和 $K_{n,n}(5\leqslant n\leqslant 21)$ 的点可区别 IE-全色数有另文讨论。本文将考虑完全二部图 $K_{5,n}(n\geqslant 6)$ 的 VDIET 染色。本文用 2^A 表示 A 的幂集,即 A 的全体子集构成的集合。

引理 1 若 $6\leqslant n\leqslant 21$, 则 $K_{5,n}$ 有 5-VDIET 染色。

证明 先给出 $2^{\{1,2,3,4,5\}}-\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,4,5\}, \{1,2,3,5\}\}$ 中所有子集的一个排序, 使得前 4 项分别为 $\{5\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$,记所得序列为 S_1。显然 S_1 有 21 项(每一项都是一个子集)。下面给出一个使用 1,2,3,4,5 的 5-VDIET 染色。

让 u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 染色 1。让 $C(v_j)$ 是 S_1 的第 j 项, $j=1,2,\cdots,n$。

让色 5 染 v_1 以及与之关联的所有边。

让 2,1,2,1,2 和 2 分别染 $u_1v_2,u_2v_2,u_3v_2,u_4v_2,u_5v_2$ 和 v_2。

让 3,3,1,1,3 和 3 分别染 $u_1v_3,u_2v_3,u_3v_3,u_4v_3,u_5v_3$ 和 v_3。

让 4,4,4,4,1 和 4 分别染 $u_1v_4,u_2v_4,u_3v_4,u_4v_4,u_5v_4$ 和 v_4。

当 $j\geqslant 5$,若 $C(v_j)=\{1,5\}$,则 5 染 v_j,1 染 $u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j,u_5v_j$。

若 $C(v_j)=\{2,b\}$, $b=4$ 或 5,2 染 v_j, b 染 $u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j$,2 染 u_5v_j。

若 $C(v_j)=\{3,b\}$,$3<b$,3 染 v_j, b 染 $u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j$,3 染 u_5v_j。

若 $C(v_j)=\{4,5\}$,4 染 v_j,5 染 $u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j,u_5v_j$。

若 $C(v_j)=\{1,a,b\}$,$1<a<b$, a 染 v_j, b 染 u_1v_j, 1 染 $u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j,u_5v_j$。

若 $C(v_j)=\{2,a,b,\}$, $2<a<b$, a 染 u_1v_j, 2 染 u_5v_j, v_j, b 染 u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j。

若 $C(v_j)=\{3,4,5\}$, 3 染 u_1v_j, 4 染 v_j, 5 染 $u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j,u_5v_j$。

若 $C(v_j)=\{a,b,c,d\}$, $a<b<c<d$, b 染 u_1v_j, c 染 u_2v_j, a 染 u_5v_j, d 染 v_j, u_3v_j,u_4v_j。

很容易验证对上述染色来说 v_j 的色集合恰好是 S_1 的第 j 项,$j=1,2,\cdots,n$,并且 $C(u_1)=\{1,2,3,4,5\}$, $C(u_2)=\{1,3,4,5\}$, $C(u_3)=\{1,2,4,5\}$, $C(u_4)=\{1,4,5\}$, $C(u_5)=\{1,2,3,5\}$。因此当 $6\leqslant n\leqslant 21$ 时,上述染色是 $K_{5,n}$ 的 5-VDIET 染色。

引理 2 若 $22\leqslant n\leqslant 53$, 则 $K_{5,n}$ 有 6-VDIET 染色。

证明 先给出 $2^{\{1,2,3,4,5,6\}}-\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\} \{2,3\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{1,3,4,5,6\}, \{1,2,4,5,6\}, \{1,4,5,6\}, \{1,2,3,5,6\}\}$ 中所有子集的一个排序,使得前 5 项分别为 $\{5\}$, $\{6\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$。记所得序列为 S_2。显然 S_2 有 53 项(每一项都是一个子集)。下面将给出 $K_{5,n}$ 的一个使用了 1,2,3,4,5,6 的 6-VDIET 染色。

让 u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 染 1。让 $C(v_j)$ 是 S_2 的第 j 项,$j=1,2,\cdots,n$。

让 $j+4$ 染 v_j 和它关联的所有边, $j=1,2$。

2,1,2,1,2 和 2 分别染 $u_1v_3,u_2v_3,u_3v_3,u_4v_3,u_5v_3$ 和 v_3。

3,3,1,1,3 和 3 分别染 $u_1v_4,u_2v_4,u_3v_4,u_4v_4,u_5v_4$ 和 v_4。

4,4,4,4,1 和 4 分别染 $u_1v_5,u_2v_5,u_3v_5,u_4v_5,u_5v_5$ 和 v_5。

当 $j\geqslant 6$,若 $C(v_j)=\{1,b\}$,b 染 v_j,1 染 $u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j,u_5v_j$。

若 $C(v_j)=\{2,b\}$, $b=4$ 或 5 或 6,2 染 v_j,b 染 $u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j$,2 染 u_5v_j。

若 $C(v_j)=\{3,b\}$, $3<b$,3 染 v_j, b 染 $u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j$, 3 染 u_5v_j。

若 $C(v_j)=\{a,b\}$,$4\leqslant a<b$, a 染 v_j, b 染 u_1v_j, $u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j,u_5v_j$。

若 $C(v_j)=\{1,a,b\}$, $1<a<b$, a 染 v_j,b 染 u_1v_j, 1 染 $u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j,u_5v_j$。

若 $C(v_j)=\{2,a,b,\}$, $2<a<b$, a 染 u_1v_j, 2 染 u_5v_j, v_j, b 染 u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j。

若 $C(v_j)=\{a,b,c\}$, $3\leqslant a<b<c$, a 染 u_1v_j, b 染 v_j, c 染 $u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j,u_5v_j$。

若 $C(v_j)=\{a,b,c,d\}$, $a<b<c<d$, b 染 u_1v_j, c 染 u_2v_j, a 染 u_5v_j, d 染 v_j, u_3v_j,u_4v_j。

若 $C(v_j)=\{a,b,c,d,e\}$, $a<b<c<d<e$, b 染 u_1v_j,c 染 u_2v_j, a 染 u_5v_j, d 染 v_j, u_3v_j, e 染 u_4v_j。

很容易验证对上述染色来说 v_j 的色集合恰好是 S_2 的第 j 项，$j=1,2,\cdots,n$，并且 $C(u_1)=\{1,2,3,4,5,6\}$，$C(u_2)=\{1,3,4,5,6\}$，$C(u_3)=\{1,2,4,5,6\}$，$C(u_4)=\{1,4,5,6\}$，$C(u_5)=\{1,2,3,5,6\}$。因此当 $22\leqslant n\leqslant 53$ 时，上述染色是 $K_{5,n}$ 的 6-VDIET 染色。

引理 3　若 $54\leqslant n\leqslant 113$，则 $K_{5,n}$ 有 7-VDIET 染色。若 $\binom{k-1}{1}+\binom{k-1}{2}+\cdots+\binom{k-1}{6}-5<n\leqslant\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\cdots+\binom{k}{6}-5$，$k\geqslant 8$，则 $K_{5,n}$ 有 k-VDIET 染色。

证明　将集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 所有 1-子集，2-子集，3-子集，4-子集，5-子集，6-子集，除 $\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{2,3\}$ 以外，排成一个序列，使得前 $k-1$ 项分别为 $\{5\}$，$\{6\}$，$\cdots$，$\{k\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{1,4\}$，所得到的序列记为 S_3，S_3 有 $\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\binom{k}{4}+\binom{k}{5}+\binom{k}{6}-5$ 个项（每一项都是一个子集）。注意 $k\geqslant 8$ 或当 $54\leqslant n\leqslant 113$，$k=7$。下面将给出 $K_{5,n}$ 的一个使用了 $1,2,\cdots,k$ 的 k-VDIET 染色。

让 u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 染 1。让 $C(v_j)$ 是 S_3 的第 j 项，$j=1,2,\cdots,n$。

让 $j+4$ 染 v_j 和它关联的所有边，$j=1,2,\cdots,k-4$。

让 2,1,2,1,2 和 2 分别染 $u_1v_{k-3},u_2v_{k-3},u_3v_{k-3},u_4v_{k-3},u_5v_{k-3}$ 和 v_{k-3}。

让 3,3,1,1,3 和 3 分别染 $u_1v_{k-2},u_2v_{k-2},u_3v_{k-2},u_4v_{k-2},u_5v_{k-2}$ 和 v_{k-2}。

让 4,4,4,4,1 和 4 分别染 $u_1v_{k-1},u_2v_{k-1},u_3v_{k-1},u_4v_{k-1},u_5v_{k-1}$ 和 v_{k-1}。

当 $j\geqslant k$，若 $C(v_j)=\{1,b\}$，b 染 v_j，1 染 $u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j,u_5v_j$。

若 $C(v_j)=\{2,b\}$，$3<b$，2 染 v_j，b 染 u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j，u_4v_j，2 染 u_5v_j。

若 $C(v_j)=\{3,b\}$，$3<b$，3 染 v_j，b 染 u_1v_j,u_2v_j,u_3v_j，u_4v_j，3 染 u_5v_j。

若 $C(v_j)=\{a,b\}$，$4\leqslant a<b$，a 染 v_j，b 染 u_1v_j，$u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j,u_5v_j$。

若 $C(v_j)=\{1,a,b\}$，$1<a<b$，a 染 v_j，b 染 u_1v_j，1 染 u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j，u_5v_j。

若 $C(v_j)=\{2,a,b\}$，$2<a<b$，a 染 u_1v_j，2 染 u_5v_j，b 染 v_j，u_2v_j,u_3v_j，u_4v_j。

若 $C(v_j)=\{a,b,c\}$，$3\leqslant a<b<c$，a 染 u_1v_j，b 染 v_j，c 染 $u_2v_j,u_3v_j,u_4v_j,u_5v_j$。

若 $C(v_j)=\{a,b,c,d\}$，$a<b<c<d$；

（1）$a\leqslant 3$，b 染 u_1v_j，d 染 v_j，u_3v_j，u_4v_j，c 染 u_2v_j，a 染 u_5v_j；

（2）$a\geqslant 4$，a 染 u_1v_j，b 染 u_2v_j，c 染 u_3v_j，d 染 u_4v_j，u_5v_j，v_j。

若 $C(v_j)=\{a,b,c,d,e\}$，$a<b<c<d<e$，

（1）$a\leqslant 3$，b 染 u_1v_j，d 染 v_j，u_3v_j，c 染 u_2v_j，a 染 u_5v_j，e 染 u_4v_j；

（2）$a\geqslant 4$，a 染 u_1v_j，b 染 u_2v_j，c 染 u_3v_j，d 染 u_4v_j，e 染 u_5v_j，v_j。

若 $C(v_j)=\{a,b,c,d,e,f\}$，$a<b<c<d<e<f$，

（1）$a\leqslant 3$，b 染 u_1v_j，c 染 u_2v_j，d 染 u_3v_j，e 染 u_4v_j，a 染 u_5v_j，f 染 v_j；

（2）$a\geqslant 4$，b 染 u_1v_j，c 染 u_2v_j，d 染 u_3v_j，a 染 u_4v_j，e 染 u_5v_j，f 染 v_j。

容易验证对上述染色来说是 v_j 的色集合恰好是 S_3 的第 j 项，$j=1,2,\cdots,n$，并且 $C(u_1)=\{1,2,\cdots,k\}$，$C(u_2)=C(u_1)-\{2\}$，$C(u_3)=C(u_1)-\{3\}$，$C(u_4)=C(u_1)-\{2,3\}$，$C(u_5)=C(u_1)-\{4\}$。易证上述染色是 $K_{5,n}$ 的一个 k-VDIET 染色。

定理 1

$$\chi_{vt}^{ie}(K_{5,n})=\begin{cases}5, & n=6,7,\cdots,21,\\ 6, & n=22,23,\cdots,53,\\ 7, & n=54,55,56,57,58。\end{cases}$$

证明　**情形 1**　当 $6\leqslant n\leqslant 10$ 时，易知 $\chi_{vt}^{ie}(K_{5,n})\geqslant\xi(K_{5,n})=4$。假设 $K_{5,n}$ 有使用了 1，2，3，4 的 4-VDIET 染色 g。

情形 1.1　u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 的颜色相同，不妨设 $g(u_i)=1$，$i=1,2,3,4,5$。则 $C(v_j)\neq\{1\}$。显然

$|C(u_i)|\geqslant 2$, $i=1,2,3,4,5$。(否则每个点的色集合都含1, 但是在集合$\{1,2,3,4\}$中含1的色集合只有8个。8个色集合不能区分11个顶点,这是一个矛盾。) 这时存在 $l,t,p\in\{2,3,4\}$, 使得 $l<t<p$, $C(v_j)\neq\{l\},\neq\{t\},\neq\{p\}$, $j=1,2,\cdots,n$, 否则在 $C(u_1),C(u_2),C(u_3),C(u_4),C(u_5)$有两个色集合相同。这时 $C(u_i),i=1,2,\cdots,5$, 是以下7个集合之一: $\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\}$, $\{1,2,4\},\{1,2\}$, $\{1,3\},\{1,4\}$。故2-子集$\{3,4\}$(或$\{2,4\}$或$\{2,3\}$)不是任何点的色集合。因此最多有集合$\{1,2,3,4\}$的 $2^4-6=10$ 个子集可用。这是一个矛盾。

情形1.2 在$\{g(u_1),g(u_2),g(u_3),g(u_4)\},g(u_5)\}$中恰有两个元素不同, 不妨设 $g(u_1)=1$, $g(u_1)=2,g(u_3),g(u_4),g(u_5)\in\{1,2\}$,则

(ⅰ) $C(v_j)\neq\{1\},\{2\},\{1,2\},j=1,2,\cdots,n$。

(ⅱ) 显然 $C(u_i)\neq\{3\},\{4\},\{3,4\},i=1,2,\cdots,5$。

(ⅲ) $|C(v_j)|\geqslant 2$, $j=1,2,\cdots,n$。

否则,若有$|C(v_{j_0})|=1$, 不妨设 $C(v_{j_0})=\{3\}$, 则 $C(u_i),i=1,2,\cdots,5$, 是以下6个集合之一: $\{1,3\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\},\{2,3\},\{2,3,4\}$。在这6个子集中有5个子集,使 $C(v_j)$, $j=1,2,\cdots,n$ 不可能是这5个子集, 也不可能是这5个子集的补集。因此最多有集合$\{1,2,3,4\}$的 $2^4-10-1=5$ 个子集可作为顶点 v_j 的色集合, 矛盾。

(ⅳ) $|C(u_i)|\geqslant 2$, $i=1,2,\cdots,5$。

否则,若有 $C(u_{i_0})=\{1\}$, 则集合$\{3,4\}$的3个非空子集不是任何点的色集合。这时 $C(u_i)\neq\{2\}$, $i=1,2,\cdots,5$。(否则每个 $C(v_j)\supseteq\{1,2\}$。集合$\{1,2,3,4\}$既含1又含2的子集共有4个, 而有 $n(\geqslant 6)$个顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$。) 除了 Ø,$\{2\}$和集合$\{3,4\}$的3个非空子集外, 集合$\{1,2,3,4\}$还有11个子集。当 $n=7,8,9,10$,可以立即得到矛盾。

当 $n=6$,则$\{C(v_1),C(v_2),C(v_3),C(v_4),C(v_5),C(v_6)\}=\{\{1,3\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\},\{1,4\},\{1,2,4\}\}$, $\{C(u_1),C(u_2),C(u_3),C(u_4),C(u_5)\}=\{\{1\},\{1,2\},\{2,4\},\{2,3\},\{2,3,4\}\}$。这时存在$i_1\in\{1,2,3,4,5\}$, $j_1\in\{1,2,3,4,5,6\}$,使得 $C(u_{i_1})\cap C(v_{j_1})=\varnothing$,矛盾。

(ⅴ) $C(u_i)\neq\{1,2\}$, $1\leqslant i\leqslant n$。否则若有 $C(u_{i_0})=\{1,2\}$, 则$\{3,4\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, Ø,$\{1\}$,$\{2\}$不是任何点的色集合。因此只剩余$\{1,2,3,4,\}$的10个子集是可用的,矛盾。

由(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ),(ⅳ),(ⅴ), 知 Ø,$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\}$不是任何点的色集合。最多有集合$\{1,2,3,4\}$的 $2^4-6=10$ 子集可用。这是一个矛盾。

情形1.3 在$\{g(u_1),g(u_2),g(u_3),g(u_4),g(u_5)\}$仅有三个元素不同, 不妨设 $g(u_i)=i$, $i=1,2,3$, $g(u_4),g(u_5)\in\{1,2,3\}$。

如果任意$C(v_j)\neq\{4\}$, 则 $C(v_j)$, $j=1,2,\cdots,n$, 是以下6个集合之一: $\{1,4\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,3,4\}$; 当 $n=8,9,10$,可以立即得到矛盾。

当 $n=7$ 时, $C(u_i)$既不可能是上述的7个子集也不可能是上述7个子集的补集。因此最多有集合$\{1,2,3,4\}$的 $2^4-14=2$ 个子集可作为顶点 $u_i,i=1,2,\cdots,5$ 的色集合,矛盾。

当 $n=6$ 时,在上述7个子集中有6个子集,使 $C(u_i)$既不可能是这6个子集,也不可能是这6个子集的补集。因此最多有集合$\{1,2,3,4\}$的 $2^4-12=4$ 个子集可作为顶点 $u_i,i=1,2,\cdots,5$ 的色集合,矛盾。

如果存在 $j_0\in\{1,2,\cdots,n\}$,使 $C(v_{j_0})=4$, 则 Ø,$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ $\{1,2,3\}$不是任何点的色集合。这是一个矛盾。

情形1.4 u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 的颜色当中有4个互不相同。不失一般性, 设 $g(u_i)=i$, $i=1,2,3,4$, $g(u_5)\in\{1,2,3,4\}$。点 v_1 所染得颜色必在$\{g(u_1),g(u_2),\cdots,g(u_5)\}$中。这是一个矛盾。

因此 $K_{5,n}$不存在4-VDIET 染色。所以 $\chi_{vt}^{ie}(K_{5,n})\geqslant 5$。由引理1知, 若 $n=6,7,\cdots,10$,则 $\chi_{vt}^{ie}(K_{5,n})=5$。

情形2 当 $11\leqslant n\leqslant 21$ 时, 由引理1知, $\chi_{vt}^{ie}(K_{5,n})\geqslant\xi(K_{5,n})=5$。

情形3 当 $n=22,23,\cdots,26$ 时, 易知 $\chi_{vt}^{ie}(K_{5,n})\geqslant\xi(K_{5,n})=5$。假设 $K_{5,n}$有一个使用了1,2,3,4,5的5-

VDIET 染色。显然 $|C(u_i)|\geqslant 2$，$i=1,2,\cdots,5$。

情形 3.1　u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 均染相同的颜色，不妨设 $g(u_i)=1$，$i=1,2,3,4,5$，则 $C(v_j)\neq\{1\}$。至少存在 3 种不同的颜色 $l,t,p\in\{2,3,4,5\}$，使得 $l<t<p$，$C(v_j)\neq\{l\},C(v_j)\neq\{t\},C(v_j)\neq\{p\}$，$j=1,2,\cdots,n$，否则在 $C(u_1),C(u_2),C(u_3),C(u_4),C(u_5)$ 中有两个相同集合。

如果$\{q\}$是某个 v_j 的色集合，$q\in\{1,2,3,4,5\}-\{1,t,l,p\}$，则 $C(u_i)\supseteq\{1,q\}$，因而$\{C(u_1),C(u_2),C(u_3),C(u_4),C(u_5)\}\subset\{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5\}-\{l\},\{1,2,3,4,5\}-\{t\},\{1,2,3,4,5\}-\{p\},\{1,2,3,4,5\}-\{l,p\},\{1,2,3,4,5\}-\{l,t\},\{1,2,3,4,5\}-\{t,p\},\{1,2,3,4,5\}-\{l,t,p\}\}$。故 2-子集 $\{l,p\}$(或$\{l,t\}$或$\{t,p\}$)不是任何点的色集合或 3-子集$\{l,t,p\}$不是任何点的色集合。因此最多有集合$\{1,2,3,4,5\}$的 $2^5-6=26$ 个子集合可用。这是一个矛盾。如果存在 $q\in\{1,2,\cdots,5\}-\{1,l,t,p\}$，使得 $C(v_j)\neq\{q\}$，则 $\emptyset$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$不是任何点的色集合。这是一个矛盾。

情形 3.2　在$\{g(u_1),g(u_2),g(u_3),g(u_4)\},g(u_5)\}$仅有两个元素不同，不妨设 $g(u_1)=1,g(u_1)=2$，$g(u_3),g(u_4),g(u_5)\in\{1,2\}$，则 $C(u_i)\neq\{1\},\{2\},i=1,2,3,4,5$；$C(v_j)\neq\{1\},\{2\},\{1,2\},j=1,2,\cdots,n$。显然最多有两种色 $l,t\in\{3,4,5\}$，使得 $C(v_j)=\{l\},\{t\}$，$j=1,2,\cdots,n$。

如果恰有两种色 $l,t\in\{3,4,5\}$，使得 $C(v_j)=\{l\},\{t\},j=1,2,\cdots,n$。不妨设 $l=3,t=4$，则$\{3,4\}\in C(u_i),i=1,2,3,4,5$。每个$C(u_i)$，$i=1,2,\cdots,5$，是以下 6 个集合之一：$\{1,2,3,4\},\{1,3,4,5\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5\}$。这时 2-子集 $\{1,5\}$(or $\{2,5\}$) 不是任何点的色集合。所以在 $\emptyset,\{1\},\{2\},\{5\},\{1,5\},\{2,5\},\{1,2\}$中，至少有 6 个子集不是任何点的色集合。可用的子集有 $2^5-6=26$ 个，不可能区别 $n+5(\geqslant 27)$个顶点。这是一个矛盾。如果恰有一种色 $l\in\{3,4,5\}$，使得 $C(v_j)=\{l\}$，$j=1,2,\cdots,n$。不妨设 $l=3$。所以 $\emptyset,\{1\},\{2\},\{4\},\{5\},\{1,2\}$ 不是任何点的色集合。这也是一个矛盾。如果任意 $C(v_j)\neq\{3\},\{4\},\{5\}$，则 $\emptyset,\{l\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}$不是任何点的色集合。这也是一个矛盾。

情形 3.3　在$\{g(u_1),g(u_2),g(u_3),g(u_4),g(u_5)\}$恰有三个元素不同，不妨设 $g(u_i)=i$，$i=1,2,3$，$g(u_4),g(u_5)\in\{1,2,3\}$。

如果任意$C(v_j)\neq\{4\},\{5\}$，$j=1,2,\cdots,n$，则 $\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}$ 不是任何点的色集合。这是一个矛盾。如果任意的 $C(v_j)\neq\{4\}$ 且某 $C(v_{j_1})=\{5\}$，或 $C(v_j)\neq\{5\}$且某 $C(v_{j_2})=\{4\}$，则 $\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$不是任何点的色集合。这是一个矛盾。如果某 $C(v_{j_1})=\{5\}$，且某 $C(v_{j_2})=\{4\}$，$j_1,j_2\in 1,2,\cdots,n$，则 $\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$不是任何点的色集合。这是一个矛盾。

情形 3.4　u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 的颜色有 4 种不同。不失一般性，设 $g(u_i)=i$，$i=1,2,3,4$，$g(u_5)\in\{1,2,3,4\}$。

如果任意 $C(v_j)\neq\{5\},j=1,2,\cdots,n$，则 $\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}$不是任何点的色集合。这是一个矛盾。如果存在某个 $j_0\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $C(v_{j_0})=\{5\}$则 $\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}$不是任何点的色集合。这是一个矛盾。

情形 3.5　u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 染互不同的颜色。不失一般性，设 $g(u_i)=i$，$i=1,2,3,4,5$。这时顶点 v_1 所染得颜色必在$\{g(u_1),g(u_2),\cdots,g(u_5)\}$中。这是一个矛盾。

因此 $\chi_{vt}^{ie}(K_{5,n})\geqslant 6$，由引理 2 知，$\chi_{vt}^{ie}(K_{5,n})=6$。

情形 4　当 $27\leqslant n\leqslant 53$ 时，由引理 2 知，$\chi_{vt}^{ie}(K_{5,n})\geqslant\xi(K_{5,n})=6$。

情形 5　当 $n=54,55,56,57,58$。易知 $\chi_{vt}^{ie}(K_{5,n})\geqslant\xi(K_{5,n})=6$。证明过程完全类似于“当 $22\leqslant n\leqslant 26$ 时，$K_{5,n}$不存在 5-VDIET 染色”的证明，可证得当 $n=54,55,56,57,58$ 时，$K_{5,n}$ 不存在 6-VDIET 染色。所以 $\chi_{vt}^{ie}(K_{5,n})\geqslant 7$。由引理 3 知，$\chi_{vt}^{ie}(K_{5,n})=7$。

证明完毕。

定理 2　如果 $\binom{k-1}{1}+\binom{k-1}{2}+\cdots+\binom{k-1}{6}-5<n\leqslant\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\cdots+\binom{k}{6}-5$，$k\geqslant 7$，则

$\chi_{vt}^{ie}(K_{5,n})=k$。

证明 假设 $K_{5,n}$有$(k-1)$-VDIET染色 g。

情形1 u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 均染相同的颜色，不妨设 $g(u_i)=1$，$i=1,2,3,4,5$,则 $C(v_j)\neq\{1\}$。那么至少存在3种不同的颜色 $l,t,p\in\{2,3,\cdots,k-1\}$，使得 $C(v_j)\neq\{l\},\{t\},\{p\}$，$j=1,2,\cdots,n$。(否则在$\{2,3,\cdots,k-1\}$中最多存在两种不同的颜色，不妨设2，3,使得$\{2\}\neq C(v_j)\neq\{3\}$,则$C(u_i)\supseteq\{1,4,\cdots,k-1\}$，$i=1,2,3,4,5$。在 $C(u_1),C(u_2),C(u_3),C(u_4),C(u_5)$有两个相同的集合。这是一个矛盾。)

不失一般性，设 $C(v_j)\neq\{2\},\{3\},\{4\}$。

(ⅰ) $\{5\}$，$\{6\}$，$\cdots$，$\{k-1\}$不是任意点 v_j 的色集合，则 $C(u_i)\supseteq\{1,4,5,\cdots,k-1\}$,且$\{C(u_1),C(u_2),C(u_3),C(u_4),C(u_5)\}\subset\{\{1,5,6,\cdots,k-1\},\{1,2,5,6,\cdots,k-1\},\{1,3,5,6,\cdots,k-1\},\{1,4,5,6,\cdots,k-1\},\{1,2,3,5,6,\cdots,k-1\},\{1,2,4,5,6,\cdots,k-1\},\{1,3,4,5,6,\cdots,k-1\},\{1,2,3,4,5,6,\cdots,k-1\}$。所以2-子集$\{2,3\}$(或$\{3,4\}$，或$\{2,4\}$)不是任何点 v_j 的色集合或3-子集$\{2,3,4\}$不是任何点 v_j 的色集合。故 $\binom{k-1}{1}+\binom{k-1}{2}+\cdots+\binom{k-1}{6}-5(<n)$子集不能区分 n 个顶点。

(ⅱ) 存在 $r\in\{5,6,\cdots,k-1\}$，使得 $C(v_j)\neq\{r\}$，则$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{r\}$不是任何点 v_j 的色集合。这也是一个矛盾。

情形2 在$\{g(u_1),g(u_2),g(u_3),g(u_4),g(u_5)\}$中，仅有两种不同的颜色，不失一般性,设 $g(u_1)=1,g(u_2)=2$，$g(u_3),g(u_4),g(u_5)\in\{1,2\}$。

如果对每个 $r\in\{3,4,\cdots,k-1\}$，$\{r\}$不是任何点 v_j 的集合，则 $C(u_i)\supseteq\{3,4,\cdots,k-1\}$。因此 $C(u_i)$，$i=1,2,3,4,5$，是以下3个集合之一：$\{1,3,4,\cdots,k-1\}$，$\{2,3,4,\cdots,k-1\}$，$\{1,2,3,4,\cdots,k-1\}$。3个集合不能区分5个顶点 u_1,u_2,u_3,u_4,u_5。这是一个矛盾。如果存在 $r\in\{3,4\cdots,k-1\}$，不妨设 $r=3$，使得$\{3\}$不是任何点 v_j 的色集合，则$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$，$\{3\}$不是任何点 v_j 的色集合。于是 $C(u_i)\supseteq\{4,5,\cdots,k-1\}$，$\{C(u_1),C(u_2),C(u_3),C(u_4),C(u_5)\}\subset\{\{1,4,5,\cdots k-1\},\{2,4,5,\cdots,k-1\},\{1,2,4,5,\cdots,k-1\},\{1,3,4,5,\cdots,k-1\},\{2,3,4,5,\cdots,k-1\},\{1,2,3,4,5,\cdots,k-1\}\}$。故2-子集$\{1,3\}$(或$\{2,3\}$)不是任何点 v_j 的色集合。

最多有$\binom{k-1}{1}+\binom{k-1}{2}+\cdots+\binom{k-1}{6}-5$个子集可作为 v_j 的色集合。但有 n 个顶点$v_1,v_2,\cdots,v_n$。这是一个矛盾。

如果存在 $r,t\in\{3,4,\cdots,k-1\}$，使得$\{r\}$，$\{t\}$不是任何点 v_j 的色集合，$j=1,2,\cdots,n$，则$\{1\}$，$\{2\}$，$\{r\}$，$\{t\}$，$\{1,2\}$不是任何点 v_j 的色集合。这也是一个矛盾。

情形3 在$\{g(u_1),g(u_2),g(u_3),g(u_4),g(u_5)\}$，至少有3种不同颜色。不失一般性,设 $g(u_i)=i$，$i=1,2,3$,则$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$不是任何点 v_j 的色集合$(1\leqslant j\leqslant n)$。所以 $\binom{k-1}{1}+\binom{k-1}{2}+\cdots+\binom{k-1}{6}-7<\binom{k-1}{1}+\binom{k-1}{2}+\cdots+\binom{k-1}{6}-5<n$。这是一个矛盾。

因此 $K_{5,n}$不存在使用$(k-1)$中颜色的VDIET染色，即 $\chi_{vt}^{ie}(K_{5,n})\geqslant k$，再结合引理3可知，$\chi_{vt}^{ie}(K_{5,n})=k$。

证明完毕。

参考文献：

[1] 陈祥恩. n-方体的点可区别全色数的渐近性态[J]. 西北师范大学学报:自然科学版，2005,41(5):1-3.

[2] ZHANG Zhongfu, QIU Pengxiang, XU Baogen, et al. Vertex-distinguishing total colorings of graphs[J]. Ars Combinatoria, 2008, 87: 33-45.

(编辑:陈丽萍)