文章编号:1671-9352(2009)02-0065-08

扭双指标代数的零关系 Ringel 对偶

吕晓静[1],潘晓萍[2]

(1. 天津工程师范学院数理与信息科学系, 天津 300222; 2. 杭州广播电视大学基础部, 浙江 杭州 310012)

摘要:部分解决了惠昌常提出的一个公开问题,给出了广义 V-型偏序集的对偶扩张代数的 Ringel 对偶代数的定义理想的生成元集, 证明了该类代数仍是零关系代数.

关键词:拟遗传代数;Ringel 对偶代数; 扭双指标代数;广义 V-型偏序集

中图分类号:O153.3 **文献标志码:**A

On Ringel duality of dual extension algebras of posets

LÜ Xiao-jing[1], PAN Xiao-ping[2]

(1. Department of Mathematics and Physics, Tianjin University of Technology and Eduation, Tianjin 300222, China;
2. Department of Basic Course, Hangzhou Radio & TV University, Hangzhou 310012, Zhejiang, China)

Abstract: One open question raised by Changchang Xi was partially solved. The Ringel dual algebras of dual extension algebra of generalized V-type posets were determined by giving their minimal generator-sets. It turns out that the Ringel dual algebras of this kind of posets remain monomial.

Key words: quasi-hereditary algebra; Ringel dual algebra; twisted double incidence algebra; poset of generalized V-type

0 引言

拟遗传代数的 Ringel 对偶代数仍是一个拟遗传代数,熟知的典型例子是 Schur 代数,作为拟遗传代数,其 Ringel 对偶代数仍然是自身(这类代数称为自对偶的)。然而, 由于拟遗传代数固有的复杂性, 对任意拟遗传代数,要给出计算其 Ringel 对偶代数的统一方案极为困难, 迄今为止对该问题的研究进展甚缓。另一种自对偶代数来自偏序集的双扭指标代数[1], 这类代数是对 Schur 代数的一种很好的逼近[2], 它起源于 M.Dyer,随后被 B.M.Deng(邓邦明)与 C.C.Xi(惠昌常)等人所研究[3-9]。邓与惠证明了偏序集的双扭指标代数是拟遗传代数,并确定了两类特殊双扭指标代数的 Ringel 对偶代数的通常箭图。惠昌常最近在[3]中提出了下述公开问题:设 C 是直向代数,能否计算其对偶扩张代数的 Ringel 对偶之生成关系? 张跃辉在[6]中就所有树型偏序集,确定了其上双扭指标代数的 Ringel 对偶代数的通常箭图的形状,并在[7]中就具有最大元的树型偏序集的情形,给出了其标签矩阵 $\boldsymbol{M}=0$ 时的 Ringel 对偶代数的定义理想的生成关系,从而部分地解决了该问题,因为这时的双扭指标代数恰好是该偏序集的指标代数的对偶扩张代数。此类代数的 Ringel 对偶代数仍是零关系代数,即此时 Ringel 对偶保持零关系。因此,一个有趣而自然的问题就是:是否 Ringel 对偶永远保持零关系? 换言之,是否所有的零关系拟遗传代数的 Ringel 对偶代数仍是零关系代数? 答案是否定的,见[8]。是否存在一类拟遗传代数使得其 Ringel 对偶代数是零关系代数? 本文将就偏序集的对偶扩张代数解决该问题。我们将计算出广义 V-型偏序集的对偶扩张代数的 Ringel 对偶代数的定义理想的一组生成元,

收稿日期:2008-10-29
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10601036)
作者简介:吕晓静(1977-),女,讲师,硕士,研究方向为代数表示论.Email:lvxiaojing2006@126.com

进而证明该类代数仍是零关系代数。由于扩展 V-型偏序集有任意有限多个 极大元，从而本文的结果拓展了[7]与[8]的工作并就一大类代数，解决了[3]中的公开问题。

本文所涉及的代数均指代数闭域 k 上的有限维代数(结合，有单位元)，所涉及的模均指有限生成(有限维)右模。设 A 是代数，mod$A$ 表示有限生成右 A-模之范畴。映射的合成均从左至右，即 fg 表示先 f，后 g。

为节省篇幅，本文将自由使用通用的拟遗传代数和 BGG-代数的基本术语和基础性质，参见[9-11]。

1 预备知识

设$(A,\leqslant)$是拟遗传代数，Λ 是其权偏序集。对 $\lambda\in\Lambda$，$E(\lambda)$，$P(\lambda)$，$Q(\lambda)$，$\Delta(\lambda)$与 $\nabla(\lambda)$分别表示 A 的相应于权 λ 的单模、不可分解投射模、不可分解内射模、Weyl 模与余 Weyl 模。

设 Δ 是 mod$A$ 的由所有 Weyl 模 $\Delta(\lambda)(\lambda\in\Lambda)$形成的满子范畴。记 $\mathscr{F}(\Delta)$是所有好 A-模的满子范畴。(A-模 M 称为好模，如果它具有下述子模链

$$0=M_t\subset M_{t-1}\subset\cdots\subset M_1\subset M_0=M,$$

使得每个商模 M_{i-1}/M_i 均同构于某 Weyl 模，$1\leqslant i\leqslant t$。)

对偶地定义 $\nabla(\lambda)$与子范畴 ∇和 $\mathscr{F}(\nabla)$。

定义 1.1 代数 A 称为是以$(\Lambda,\leqslant)$为权偏序集的拟遗传代数(记为(A,Λ))，如果对每个 $\lambda\in\Lambda$，有

(1) $\mathrm{End}_A(\Delta(\lambda))\simeq k$；

(2) $P(\lambda)\in\mathscr{F}(\Delta)$。

设(A,Λ)是拟遗传代数，则有

(1) $\mathscr{F}(\Delta)\cap\mathscr{F}(\nabla)$恰包含$|\Lambda|$(即 Λ 的势)个不可分解模，分别记为 $T(\lambda)(\lambda\in\Lambda)$，满足下列 A-模的短正合列：

$$0\to\Delta(\lambda)\to T(\lambda)\to X(\lambda)\to 0 \tag{1}$$

与

$$0\to Y(\lambda)\to T(\lambda)\to\nabla(y)\to 0, \tag{2}$$

其中 $X(\lambda)\in\mathscr{F}(\{\Delta(\mu)\mid\mu<\lambda\})$，$Y(\lambda)\in\mathscr{F}(\{\nabla(\mu)\mid\mu<\lambda\})$。特别地，$T(\lambda)$的所有单合成因子具有形式 $E(\mu)$，$\mu\leqslant\lambda$ 且恰有一个因子 $E(\lambda)$。模 $T(\lambda)$称为权 λ 的典范模(canonical module)。

(2) 令 $T:=\oplus_{\lambda\in X}T(\lambda)$，模 T 称为 A 的特征模。代数 $\Gamma=\mathscr{R}(A)=\mathrm{End}_A(T)$称为 A 的 Ringel 对偶代数或 Ringel 对偶。熟知(Γ,X^{op}) 也是拟遗传代数，其标准模为 $\Delta_\Gamma(x)=\mathrm{Hom}_A(T,\nabla(x))$，$x\in X$。

(3)

$$\mathrm{Ext}_A^n(\Delta(\lambda),\nabla(\mu))=\begin{cases}k,\ \text{如果}\ n=0,\lambda=\mu,\\ 0,\text{其他}。\end{cases}$$

2 偏序集的 M-双扭指标代数的基础性质

首先回顾偏序集的 M-双扭指标代数的概念[4]。因为对任何偏序集 X，其指标代数 $I(X)$总是目标代数与其 Ringel 对偶代数的子代数，从而 $I(X)$的任何交换关系将使得欲研究的 Ringel 对偶代数不是零关系代数。因此，本文总设 $I(X)$是零关系代数，这种情况仅发生在 $I(X)$是遗传代数的情形，而此等价于 X 是树型偏序集。因此以下总设 Λ 是连通的有限树型偏序集，$I(\Lambda)$是其指标代数，即以 Λ 的 Hasse 图 Q 为通常箭图的遗传代数，其中 Q 的箭向 $x\to y$ 由 $x>y$(称此 x 为 y 的覆盖，即 $x>y$ 且无 $z\in\Lambda$ 使 $x>z>y$)定义。

Λ 的一个网格(mesh)$(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;x)$是 X 的一个子集，使得 $y_i>x$ 且无其他 $y\in\Lambda$ 满足 $y>x$。如果无 $y\in\Lambda$ 满足 $y>x$，则称网格$(x;y_1,\cdots,y_n;x)$是空的。如果存在 $w\in\Lambda$ 使得 $x>w$，则称$(w;x;y_1,\cdots,y_n;x)$是一个扩展网格。一个扩展网格的标签是对每个 y_i 定义的一组数 $a_{y_i}(w)$。如果对 Λ 的每个扩展网格都选定了一个标签，则称 Λ 有一个标签矩阵 $\boldsymbol{M}$，即全体标签的集合。在不致混淆的情况下总将 $a_{y_i}(w)$简记为 $a(w)$(在树的情形这一符号没有任何不确定性)。

对 Λ 的 Hasse 图 Q,定义新箭图 Q' 如下:Q' 的顶点集与 Q 相同(Λ);而对 Q 中的每个箭向 $\alpha: x \to y$,Q' 恰含两箭 $\alpha: x \to y$ 与 $\alpha': y \to x$。

定义 2.1　设 Λ 是偏序集。Λ 的对偶扩张代数是由约束箭图给出的代数

$$\mathscr{A}(\Lambda) = KQ'/I,$$

其中 Q' 如上,I 是由$\{\alpha\beta' \mid \alpha, \beta \in Q\}$所生成的路代数 KQ' 的理想。

因为 Λ 是树,标签矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中的每一个数均可选为 1 或 0。本文剩余部分除特别指明,均将采用这种标签。如果 $\boldsymbol{M}$ 中的所有数字均为 1,则 $\boldsymbol{M}$ 称为可逆的;如果 $\boldsymbol{M}$ 中的所有数字均为 0,则 $\boldsymbol{M}$ 称为 0。如果 $\boldsymbol{M}=0$,则 Λ 的 $\boldsymbol{M}$-双扭指标代数 $\mathscr{A}(\Lambda,\boldsymbol{M})$称为是 Λ 的对偶扩张代数,记为 $\mathscr{A}(\Lambda)$。

定理 A[3]　设 $A=\mathscr{A}(\Lambda,\boldsymbol{M})$是偏序集 Λ 的 $\boldsymbol{M}$-双扭指标代数,则 A 是拟遗传代数,其标准模恰为不可分解投射 $I(\Lambda)$-模,且有 $\mathrm{prj.dim.}\,\Delta(x) \leqslant 1$ 与 $\mathrm{inj.dim.}\,\nabla(x) \leqslant 1$,对所有 $x \in \Lambda$;$\dim_k Ext_A^1(\Delta(x),\Delta(y))=1$ 当且仅当 $x<y$,其余情形此维数均为 0。

文献[4]中还证明,代数 $\mathscr{A}(\Lambda,\boldsymbol{M})$是 BGG 代数,且当 $\boldsymbol{M}$ 可逆时,其 Ringel 对偶代数同构于代数 $\mathscr{A}(\Lambda^{op},\boldsymbol{M})$。这就完全确定了此类拟遗传代数的 Ringel 对偶代数。

为了描述 $\boldsymbol{M}=0$ 即偶扩张代数的相应情形,我们将具体构造出对偶扩张代数上的 Weyl 模、典范模和特征模。

由定理 A,偏序集 Λ 的对偶扩张代数 $A=\mathscr{A}(\Lambda)$是拟遗传代数且存在模范畴 mod$A$ 上的一个对偶函子 ε,它固定所有单模,典范模以及特征模,并使 Weyl 模 $\Delta(\lambda)$与余 Weyl 模 $\nabla(\lambda)$互换。

现在给出典范模 $T(\mu)$等的具体构造[6]。我们将使用箭图的表示理论与语言(参见[12])。设 $\widetilde{Q}$ 是 A 的通常箭图。设 $x<y\in\Lambda$。设 $x=x_1<x_2<\cdots<x_n=y$ 是 x 与 y 之间的惟一链,记 $l_{xy}=l_{yx}=n-1$ 是该链的长度,则对每个 $\mu\in X$,模 $T(\mu)$可如下构造:作为 k-向量空间,$T(\mu)=\oplus_{u\in\Lambda}V_u$,其中 $V_u=0$ 如果 $u \nleqslant \mu$;而若 $u\leqslant\mu$,则 V_u 由下述归纳法定义:$V_\mu=k$ 是 1 维向量空间,其典型基为$\{\mu^0\}$;对 $u<\mu$,则 $V_u=V_\mu\oplus V_\mu=k\oplus k$,典型基$\{u^-,u^+\}$;从 V_μ 到 V_u 的线性映射 $\phi_{\mu u}$定义为 $\phi_{\mu u}(\mu^0)=u^+$,而从 V_u 到 V_μ 的线性映射 $\phi'_{u\mu}$定义为 $\phi'_{u\mu}(u_-)=\mu^0$,$\phi'_{u\mu}(u^+)=0$。使用矩阵的语言,$\phi_{\mu u}=(0,\boldsymbol{I}_{V_\mu})$而 $\phi'_{u\mu}=(\boldsymbol{I}_{V_\mu},0)^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{I}_{V_\mu}$ 代表对应于 V_μ 的单位变换的 $\dim_k V_\mu$ 阶单位矩阵,$()^{\mathrm{T}}$ 表示转置矩阵。

现设 $x=x_1<x_2\leqslant\mu$。令 $V_{x_1}=V_{x_2}\oplus V_{x_2}$。归纳地,设 V_{x_2} 的典型基为 $\{x_2^{\sigma_i}\}_{i=1}^{d_2}$(其中 $d_2=\dim_k V_{x_2}$),则 V_{x_1} 的典型基选为$\{x_1^{\sigma_i -}, x_1^{\sigma_i +}\}_{i=1}^{d_2}$;从 V_{x_2} 到 V_{x_1} 的线性映射 $\phi_{x_2x_1}$ 定义为 $\phi_{x_2x_1}(x_2^{\sigma_i})=x_1^{\sigma_i +}$,而从 V_{x_1} 到 V_{x_2} 的线性映射 $\phi'_{x_1x_2}$ 定义为 $\phi'_{x_1x_2}(x_1^{\sigma_i -})=x_2^{\sigma_i}$,$\phi'_{x_1x_2}(x_1^{\sigma_i +})=0$。再一次利用矩阵的语言,有 $\phi_{x_2x_1}=(0,\boldsymbol{I}_{V_{x_2}})$ 以及 $\phi'_{x_1x_2}=(\boldsymbol{I}_{V_{x_2}},0)^{\mathrm{T}}$。

接下来构造 Weyl 模 $\Delta(y)$与余 Weyl 模 $\nabla(y)$,对所有 $y\in X$。

设 $y\in X$,则 $\Delta(y)$是下述表示:

$$V_x=\begin{cases} kx, & x\leqslant y,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

此处 kx 是 1 维向量空间,典型基为$\{x\}$。所有映射 $\phi_{x_2x_1}=1$(单位映射),而 $\phi'_{x_1x_2}=0$。

对偶地,余 Weyl 模 $\nabla(y)$为

$$V_x=\begin{cases} kx, & x\leqslant y,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

而所有的映射 $\phi_{x_2x_1}=0$,$\phi_{x_1x_2}=1$。

对 $\mu\in X$,设 $y<z\leqslant\mu$,$\sigma=(-)^{l_{z\mu}-1}$(即有 $l_{z\mu}-1$ 个"$-$")。令 M_y 是由 $y^{\sigma+}$ 生成的 T_μ 的子向量空间,记$\{x^{(\sigma+)w} \mid x<y, w \text{ arbitrary}\}$,则 M_y 是 T_μ 的子模。进一步,映射 $\theta_y: x^{\sigma+w}\mapsto x^w$ 给出了 M_y 与 T_y 之间的一个 A-模同构,因此 $M_y \overset{\theta_y}{\simeq} T_y$。

记 $T_0=\oplus_{y<\mu}T_y$,置 $M=\oplus_{y<\mu}M_y$,则 $T_0\overset{\theta}{\simeq}M_y$,其中 $\theta=\mathrm{diag}(\theta_y^{-1})$。记 $\iota: M\to T_\mu$ 是包含映射,令 $h_\mu=\theta\iota$,

则 h_μ 是从 T_0 到 T_μ 的单同态。

设 $\pi_\mu: T_\mu \to \nabla(\mu)$ 是

$$x^\sigma = \begin{cases} x, \text{若 } \sigma = - - \cdots -, \\ 0, \text{其他}, \end{cases}$$

则 π_μ 是一个 A-模的满同态。

上述数据间的相互关系由下面的定理 B 与定理 C 给出，这两个定理在本文的剩余部分将重复使用多次。

定理 B[6]　设 $A = \mathscr{A}(\Lambda)$是偏序集 Λ 的对偶扩张代数，则对 $y \in \Lambda$，有 $\mathrm{mod}\, A$ 中如下的典范正合列：

$$0 \longrightarrow \oplus \Delta(\mu) \xrightarrow{i_\mu} T(\mu) \xrightarrow{p_\mu = (p_{\mu x})^t} \oplus_{x < \mu} T(x) \longrightarrow 0 \tag{3}$$

与

$$0 \longrightarrow \oplus_{x < \mu} T(x) \xrightarrow{h_\mu = (h_{x\mu})} T(\mu) \xrightarrow{\pi_x} \nabla(\mu) \longrightarrow 0\ , \tag{4}$$

其中正则包含映射为 $i_\mu: u \ \mapsto u^{\sigma_u}$，$\sigma_u = (+)^{l_{u\mu}-1}$，正则满射 $p_{\mu x}: T(\mu) \to T(x)$ 为

$$\begin{cases} x^{w-} \ \mapsto x^0, \text{ 若 } w = (+)^{l_{x\mu}-2} -, \\ u^{(w-)\sigma} \ \mapsto u^\sigma, \text{ 若 } w = (+)^{l_{x\mu}-2}, \\ \text{其他 } \mapsto 0, \end{cases}$$

其中映射 h_μ 与 π_μ 同上。

定理 C[6]　设 $x < y < z$，则 $h_{xy} = h_{xz} p_{zy}$，$p_{yx} = h_{yz} p_{zx}$，且 $h_{yz} p_{zy} = 0$。

记 $\mathscr{T} := \mathrm{add}(\oplus_{x \in X} T(x))$。设 $\mathscr{C}$是 $\mathrm{mod}\, A$ 的一个满加法子范畴，$N_i \in \mathscr{C}$，$i = 1, 2$。记

$$\mathrm{Irr}_{\mathscr{C}}(N_1, N_2) := \mathrm{rad}_{\mathscr{C}}(N_1, N_2) / \mathrm{rad}^2_{\mathscr{C}}(N_1, N_2)$$

是由从 N_1 到 N_2 的所有不可约 $\mathscr{C}$-映射构成的 $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(N_1) - \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(N_2)$-双模。

定理 D[6]　对任意 $x, y \in X$，有

$$\dim_k \mathrm{Irr}_{\mathscr{T}}(T(x), T(y)) = \dim_k \mathrm{Irr}_{\mathscr{T}}(T(y), T(x)) = \begin{cases} 1, \text{如果 } x < y \text{ 且 } y \text{ 极大；或对偶情形}, \\ 0, \text{其他}。\end{cases}$$

定理 D 描述了偏序集 X 的对偶扩张代数 $A = \mathscr{A}(X)$的 Ringel 对偶代数 Γ 的通常箭图 $Q = (Q_0, Q_1)$的形状（它们均是双图 bipartite）：顶点集 Q_0 仍然是 X；箭向集 Q_1 如下确定：设 $x, y \in X$，则存在箭 $p_{yx}: y \to x$ 与 $h_{xy}: x \to y$ 当且仅当 y 是极大元，其中 p_{yx}与 h_{xy}就是短正合列(3)中正则满同态 p_y 的第 x 个分量 $p_{yx}: T(y) \to T(x)$，与短正合列(4)中正则包含映射 h_y 的第 x 个分量 $h_{xy}: T(x) \to T(y)$。

3　零关系 Ringel 对偶代数的生成理想

定义 3.1　设 X 是偏序集合。称 X 是 V-型的如果 X 有最小元素 λ 且 $X \setminus \{\lambda\}$恰好分解为 两个不交极大连通全序子集的并。

显然，V-型偏序集是除线性序集外的最简单的偏序集。本文剩余部分，总设 Λ 是典型 V-型偏序集 $\Lambda = \{x = x_{m+1} > x_m > \cdots > x_1 = \lambda = y_1 < y_2 < \cdots < y_n < y_{n+1} = y\}$，$m \geqslant 1$，$n \geqslant 1$，其对偶扩张代数的 Ringel 对偶的通常箭图的形状由图 1 中箭图 Q 所描述。

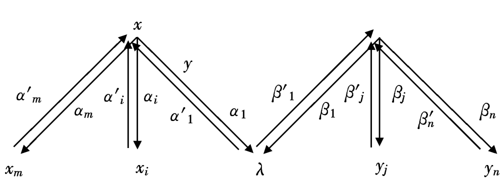


图 1
Fig.1

为了计算所需要的生成关系，将符号 Λ 的对偶扩张代数 $\mathscr{A}(\Lambda)$与其 Ringel 对偶代数 $\mathscr{R}(\Lambda)$分别简记为 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{R}$。此时，定理 D 具有下述形式：

引理 3.1　设 Λ 同上，则 $\mathscr{R}$ 的通常箭图具有如图 1所示的形状，其中 $\alpha_i, \alpha'_i, \beta_j, \beta'_j$是由定理 B 中的映射 α_i, α'_i 所诱导的关系，即 α_i 是定理 B 中正合列(3)的正则满射 p_x 的第 i 个分量：$T(x) \to T(x_i)$，而 α'_i 是

定理 B 中正合列(4)的正则包含 l_x 的第 i 个分量:$T(x_i)\to T(x)$。对所有 i,α_i 是满射而 α'_i 是单射。

为了计算代数 $\mathscr{R}$ 的生成关系,将定理 B 与定理 C 改为下述易于应用的形式:

引理 3.2　设 Λ 同上,则有 mod$\mathscr{A}(\Lambda)$中的下述正合列:

$$0\longrightarrow\Delta(x_r)\longrightarrow T(x_r)\xrightarrow{p_{x_r}=(\alpha_{x_{ri}})^T}\oplus_{i=1}^{r-1}T(x_i)\longrightarrow 0,\tag{5}$$

$$0\longrightarrow\oplus_{i=1}^{r-1}T(x_i)\xrightarrow{l_{x_r}=(\alpha'_{x_{ir}})}T(x_r)\longrightarrow\nabla(x_r)\longrightarrow 0,\tag{6}$$

$$0\longrightarrow\Delta(y_s)\longrightarrow T(y_s)\xrightarrow{p_{y_s}=(\beta_{y_{sj}})^T}\oplus_{j=1}^{s-1}T(y_j)\longrightarrow 0,\tag{7}$$

$$0\longrightarrow\oplus_{j=1}^{s-1}T(y_j)\xrightarrow{l_{y_s}=(\beta'_{y_{js}})}T(y_s)\longrightarrow\nabla(y_s)\longrightarrow 0,\tag{8}$$

其中映射 α_{ri},α'_{ir}满足条件

$\alpha'_{ir}=\alpha'_{i,r+1}\alpha_{r+1,i}$;$\alpha_{ri}=\alpha'_{r,r+1}\alpha_{r+1,i}$;$\alpha'_{p,r+1}\alpha_{r+1,q}=0$,对所有 $p<r,q<r$。

对诸 β 有类似的关系。

以下将以较为简单的符号 α_i,α'_i与β_j,β'_j 分别代替引理 3.1 中对应于 $x=x_{m+1}$与 $y=y_{n+1}$的映射 $\alpha_{m+1,i}$,$\alpha'_{i,m+1}$与 $\beta_{n+1,j}$,$\beta'_{j,n+1}$。

考虑(无约束箭图)Q 中的下述路径。令 $\alpha_m\alpha'_m=\delta$,$\alpha_r\alpha'_r=\tilde{r}$;$\beta_n\beta'_n=\sigma$,$\beta_s\beta'_s=\bar{s}$。以符号 $F_i(i\leqslant m)$与 $G_s(s\leqslant n)$分别记 Q 中的路径

$$\alpha'_i\delta\,\widetilde{m-1}\delta\,\widetilde{m-2}\delta\cdots\widetilde{i+1}\delta\,\widetilde{m-1}\delta\,\widetilde{m-2}\delta\cdots\widetilde{m-1}\delta$$

与

$$\beta'_s\sigma\,\overline{n-1}\sigma\,\overline{n-2}\sigma\cdots\overline{s+1}\sigma\,\overline{n-1}\sigma\,\overline{n-2}\sigma\cdots\overline{n-1}\sigma。$$

称 F_i 与 G_s 是 Q 的迷径。路径 α 中所包含的顶点数记为$|\alpha|$(该数等于 α 的长度加 1)。

由于 Q 中从任意顶点到其它任何顶点的箭向至多为 1,故 Q 中的所有路径由其所含顶点及其顺序惟一确定,因此,可以用迷径所包含 的自起点到终点的有序顶点列来描述它们。这种方式较之用箭向描述的办法简便得多。于是,路径 F_{m+1}是 0-路径 x_{m+1}。一般地,对任意 $1\leqslant i\leqslant m$,路径 F_i 是下述有序顶点列:第一个顶点(=起点)为 x_i;其余顶点如下确定:对所有 $i\leqslant r\leqslant m,t\geqslant 1$,第 $2t$-个顶点总是 x_{m+1},而第$(2^{m-r+1}t-2^{m-r}+1)$-个顶点总是x_r。类似地,G_s 是下述路径:对所有 $i\leqslant r\leqslant m,t\geqslant 1$,第一个顶点为 y_s,第 $2t$-个顶点总是 y_{n+1},而第$(2^{n-w+1}t-2^{n-w}+1)$-个顶点总是y_w。

例如,如果 $n=9$,则路径 F_3 是(下面数字 r 代表顶点 x_r)

3989798969897989598979896989798949897989698979895989798969897989,

而 F_4 为

49897989698979895989798969897989。

以下是关于迷径长度的一个简单计算公式,其证明可由定义直接导出。

引理 3.3　$|F_i|=2^{m+1-i}$,$1\leqslant i\leqslant m+1$;$|G_j|=2^{n+1-j}$,$1\leqslant j\leqslant n+1$。

引理 3.4　(1) 对所有 r,$F_r\alpha_i\neq 0$ 当且仅当 $i<r$。此时有 $F_r\alpha_i=\alpha_{ri}\in\mathrm{Hom}_A(T(x_r),T(x_i))$,其中 α_{ri}是相应于引理 3.1 正合列(5)中 映射 α_r 的第 i-个分量。

(2) 对所有 s,$G_s\alpha_j\neq 0$ 当且仅当 $j<s$。

证明　对 r 从 m 到 1 使用归纳法。如果 $r=m$,则 $F_r=\alpha'_m$且$\alpha'_m\alpha_i=0$ 当且仅当 $i=m$。由定理 C,对所有 $i<m$,$\alpha'_m\alpha_i=\alpha'_{m,m+1}\alpha_{m+1,i}=\alpha_{m,i}$,这是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(x_m),T(x_i))$中的满射。因此引理正确。假设对一切 $r>l+1$,引理成立。考虑 $F_r\alpha_i$ 的由后一半箭向组成的子路径f,即 f 是始于顶点 x_{i+1}的,或等价地,f 的第一个箭向是α'_{r+1}。由 F_r 的 定义,f 恰恰是路径 $F_{r+1}\alpha_i$,而由归纳假设它恰是路径 $\alpha_{r+1,i}$。同理,设 F_r 的前一半箭向组成的子路径 g,并考虑 $g\alpha_{m,r+1}$。重复使用定理 C 可知,$g\alpha_{m,r+1}=\alpha'_{r,r+1}\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(x_r,T(x_{r+1})))$恰好是正则包含映射。结合由归纳法的结论,知 $F_r\alpha_i=gf=\alpha'_{r,r+1}\alpha_{r+1,i}=\alpha_{r,i}$,而此映射恰好是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(x_r,$

$T(x_i)))$中的正则满射。证毕。

由引理3.4可知,代数 A 的 Ringel 对偶代数 R 的定义理想完全取决于(无约束)通常箭图 Q 中的这些特殊路径,即迷径。注意引理3.4等价于:对所有 r,$F_r\alpha_i=0$ 当且仅当 $i\geqslant r$,将 Q 中由所有路径 $F_r\alpha_i$,$r\geqslant 1$,$i\geqslant r$ 与 $G_s\alpha_j$,$s\geqslant 1$,$j\geqslant s$ 生成的 R 的理想记为 I,称为迷径理想。

定理 3.1 设 Λ 同上,$\mathscr{A}$ 是 Λ 的对偶扩张代数,$\mathscr{R}$ 是 Λ 的 Ringel 对偶代数,Q 是 $\mathscr{R}$ 的(无约束)通常箭图,I 是路代数 kQ 迷径理想。则有下列 k-代数同构:

$$\mathscr{R}\cong kQ/I,$$

换言之,迷径理想 I 恰好是 $\mathscr{R}$ 的生成理想。

证明 由引理3.4,迷径理想 I 是 $\mathscr{R}$ 的生成理想的子理想,因此存在 k-代数的满同态:$kQ/I\to\mathscr{R}$。因此有

$$\dim_k KQ/I\geqslant\dim_k\mathscr{R}。\tag{9}$$

记 $B:=kQ/I$。为证明公式(9)中的等号成立,只需证明涉及的两个代数作为 k-向量空间的维数相等,只需证明相应的不可分解 投射模的 k-维数相等。对任意 $x_i\in\Lambda$,$i\neq 1$,考虑不可分解投射模 $P_B(i)=x_iB$ 的子模 F_iB 与下述 B-模的短正合列(其中 $M(x_i)$表示商模 x_iB/F_iB):

$$0\to F_iB\to x_iB\to M(x_i)\to 0。\tag{10}$$

由引理3.4,F_iB 恰好是模 $\sum_{r<i}\oplus P_B(r)$,而模 $M(x_i)$恰好是对应于路径 F_i 的单列模,确切地说,模 $M(x_i)$的惟一合成列的单模因子是以路径 F_i 所包含的顶点为权的单模。由引理3.3,F_i 的长度为 2^{m+1-i},因此 $\dim_k M(x_i)=2^{m+1-i}$,对任意 $2\leqslant i\leqslant m+1$。对 $x_1=\lambda$,首先注意每个终点为 λ 的非零路径对应一个满同态,这是因为 $T(\lambda)$是一个单模。其次,由 F_1,G_1 的定义并结合引理3.4,$P_B(\lambda)=\lambda B$ 由 F_1 与 G_1 按下述方式完全确定:其根可分解为两个不可分解模 U 与 V 的直和,其中 U 与 V 均是单列模并且它们的惟一合成列分别对应与路径 F_1 与 G_1 的顶点序列(即将顶点视为相应的单模)。因此 $\dim_k=2^m+2^n-1$。由归纳法,可以从正合列(10)中递推出所有 B-模 x_iB 与 y_iB 的 k-维数:$\dim_k x_iB=2^{m+1-i}+\sum_{j=1}^{i-1}\dim_k x_jB=2^{m+1-i}+2^{n+i-2}+2^{i-2}+\sum_{j=0}^{i-1}2^{m-i+2j}=2^{m+1-i}+2^{n+i-2}-2^{i-2}+(2^{m+i}-2^{m-i})/3$。

现来计算不可分解投射 $\mathscr{R}$-模 $P_{\mathscr{R}}(x_i)=x_i\mathscr{R}$ 的 k-维数。因为 $\mathscr{R}=\mathrm{End}_{\mathscr{A}}(T)$,$T=\oplus_{x\in\Lambda}T(x)$,故 $P_{\mathscr{R}}(x_i)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T,T(x_i))\simeq\oplus_{z\in\Lambda}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(z),T(x_i))$。考虑 mod$\mathscr{A}$ 中的下述短正合列:

$$0\to\oplus_{j=1}^{i-1}T(x_j)\to T(x_i)\to\nabla(x_i)\to 0,\tag{11}$$

对正合列(11)作用左正合函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T,-)$,可得 mod$\mathscr{R}$ 中的下述正合列:

$$0\to\oplus_{j=1}^{i-1}(T,T(x_j))\to(T,T(x_i))\to(T,\nabla(x_i))\to\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(T,\oplus_{j=1}^{i-1}T(x_j)),\tag{12}$$

其中$(-,-)$表示模 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-,-)$。因为对所有 $t\neq 1$,有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(y_t),T(x_i))=0$,另外 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(T,T)=0$ 导致 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(T,\oplus_{j=1}^{i-1}T(x_j))=0$,故正合列(12)实际上是下述正合列:

$$0\to\oplus_{j=1}^{i-1}P_{\mathscr{R}}(x_j)\to P_{\mathscr{R}}(x_i)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T,\nabla(x_i))\to 0。\tag{13}$$

由于 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(z),\nabla(x_i))\simeq\Delta_{\mathscr{R}}(x_i)$且对所有 $z\ngeqslant x_i$,有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(z),\nabla(x_i))=0$,故知 $\Delta_{\mathscr{R}}(x_i)=\oplus_{r=i}^{m+1}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(x_r),\nabla(x_i))$。由[3],命题2.5(或通过直接计算),有

$$\dim_k\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(x_r),\nabla(x_i))=2^{r-i-1},(r>i),\dim_k\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(x_i),\nabla(x_i))=1。$$

所以,

$$\dim_k\Delta_{\mathscr{R}}(x_i)=\sum_{r=i}^{m+1}\dim_k\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(x_r),\nabla(x_i))=1+\sum_{r=i+1}^{m+1}2^{r-i-1}=2^{m+1-i}。$$

特别地,

$$\dim_k\lambda\mathscr{R}=\dim_k\mathrm{Hom}_{\mathrm{cal}\mathscr{A}}(T(\lambda),\nabla(\lambda))+\sum_{i=2}^{m+1}\dim_k\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(x_i),\nabla(\lambda))+\sum_{j=2}^{n+1}\mathrm{Hom}_{\mathscr{R}}(T(y_i),\nabla(\lambda))=2^m+2^n-1。$$

至此,由正合列(11)可以得到计算模 $P_{\mathscr{R}}(x_i)$ 的 k-维数的递推公式,我们看到这个递推公式与初始条件与计算 B-模 x_iB 与 y_iB 的 k-维数的相应公式完全相同。因此不等式(9)中的等式成立,所以代数 B 与 $\mathscr{R}$ 具有相同的 k-维数,故它们是同构的 k-代数。证毕。

由于定理 3.1 中给出的代数 $\mathscr{R}$ 的定义关系均为 k-代数 kQ 的路径,所以立即可得定理 3.2 成立。

定理 3.2　V-型偏序集的对偶扩张代数的 Ringel 对偶代数是零关系代数。

定义 3.2　偏序集 X 称为是广义 V 型的如果 X 有最小元素 λ 且 connected subsets of $X\setminus\{\lambda\}$ 的每个极大连通子集是线性序集。

显而易见,V-型偏序集是广义 V-型的。

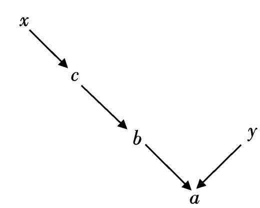
定理 3.3　设 X 是广义 V-型偏序集。则 X 的对偶扩张代数的 Ringel 对偶代数 $\mathscr{R}(X)$ 是零关系代数。

证明　由定理 3.2,如果 X 是 V-型偏序集,则 X 的 Ringel 对偶代数是零关系代数。现若 X 是广义 V-型偏序集而不是 V-型偏序集,则 X 的任何两个极大元连同小于二者之一的所有元素形成 X 的一个真 V-型子集,因此定理 3.1 的证明方法可以照 搬到此处,即起点为该真子集中任何元素的生成关系均是路径。由于任何两个这样的子集合,如果仅有最小元素是共同的,则它们之间 没有非平凡的映射,从而 Ringel 对偶代数 $\mathscr{R}(X)$ 的定义关系均为路径,故 Ringel 对偶代数 $\mathscr{R}(X)$ 是零关系代数。

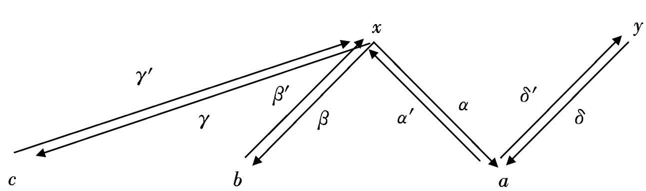
注 1　定理 3.3 可以看成[7]中定理 2 的部分逆。该定理表明有最大元素的树型偏序集的对偶扩张代数的 Ringel 对偶 代数是零关系代数。这两个定理各给出一类偏序集,使得其对偶扩张代数的 Ringel 对偶代数是零关系代数。由于零关系 Ringel 对偶代数的原始底图显然是树型偏序集,上述两个定理可以激发我们探索一个更具吸引力和挑战性的问题:找出所有具有零关系 Ringel 对偶代数的偏序集(当然是树型的)。

注 2　容易看出,本文限定的偏序集的对偶扩张代数实际上可以扩展到偏序集的 M-双扭指标代数上去。换言之,如果 M-双扭指标代数的 Ringel 对偶代数是零关系代数,则必有 $M=0$,从而 M-双扭指标代数就是对偶扩张代数。这是因为,若 $M\neq 0$,则 M-双扭指标代数的生成理想中必存在某种类型的广义交换关系,该关系在 Ringel 对偶下不会消失,也不会转变为零关系。

例 3.1　设 $\Lambda=\{x>c>b>a<y\}$,即其 Hasse 图为



则 Λ 的 Ringel 对偶代数 $\mathscr{R}(\Lambda)$ 的通常箭图为



定义关系为:

$$\alpha'\alpha=0,\beta'\beta=0,\gamma'\gamma=0,\delta'\delta=0;\alpha'\gamma\gamma'\alpha=0,\beta'\gamma\gamma'\beta=0;\alpha'\gamma\gamma'\beta\beta'\gamma\gamma'\alpha=0。$$

使用投射模的语言,可以如下描述代数 $\mathscr{R}(\Lambda)$:

$P(a)$ 具有 top $E(a)$,其根是两个单列模 U 与 $V=E(y)$ 的直和,其中 U 的惟一合成列为 $[x,c,x,b,x,c,x]$(此处以顶点代替相应的单模,且从左至右为 top 到 socle);$P(b)$ 的根是一个 top 为 $E(x)$ 的局部模,其根平方的 top 与 $E(c)$ 同构,其根立方的 top 同构于 $E(x)$ 而根的四次方为 $P(a)$;$P(c)$ 的根是 top 为 $E(x)$ 的局部模而其根平方同构于 $P(a)\oplus P(b)$;$P(x)$ 的根同构于 $P(a)\oplus P(b)\oplus P(c)$;$P(y)$ 的根为 $P(a)$。

参考文献:

[1] DYER M. Algebras associated to Bruhat intervals and polyhedral cones[M]// Finite dimensional algebras and topics. Netherlands: Kluw-

er Aca, 1994.
[2] XI C C. On representation types of q-Schur algebras[J]. J Pure Appl Alg, 1993, 84:73-84.
[3] XI C C. Characteristic tilting modules and Ringel duals[J]. Science in China: Series A, 2000, 43:1121-1130.
[4] DENG B M, XI C C. Quasi-hereditary algebras which are twisted double incidence algebras of posets[J]. Contri Alg Geom, 1995, 36: 37-71.
[5] DENG B M, XI C C. Quasi-hereditary algebras which are dual extensions of algebras[J]. Comm Alg, 1994, 22:4717-4736.
[6] 张跃辉. 树型双扭指标代数及其 Ringel 对偶[J]. 数学年刊: A, 1997, 18:771-776.
[7] ZHANG Y H. Ringel duals of dual extension algebras[J]. Chin Sci Bull, 1999, 42:130-132.
[8] 张跃辉. Ringel 对偶代数的三角分解[J]. 数学学报, 1999, 42(5):815-822.
[9] DLAB V, RINGEL C M. Quasi-hereditary algebras[J]. Illinios J Math, 1989, 33(3):280-291.
[10] DLAB V, RINGEL C M. The module theoretical approach to quasi-hereditary algebras[J]. London Math Soc LN Ser, 1992, 168:200-224.
[11] IRVING R. BGG-algebras and BGG reciprocity principle[J]. J Alg, 1990, 135:363-380.
[12] RINGEL C M. Tame algebras and integral quadratic forms: LNM 1099. Berlin-Heidelberg: Springer, 1984.

(编辑:李晓红)