第 44 卷 第 12 期 山 东 大 学 学 报 (理 学 版) 2009 年 12 月
Vol.44 No.12 Journal of Shandong University(Natural Science) Dec. 2009

文章编号:1671-9352(2009)12-0017-05

$D(kS_3)$的不可约表示与 Grothendieck 群的环结构

朱虹,张影
(扬州大学数学科学学院, 江苏 扬州 225002)

摘要:研究了 Hopf 代数 kS_3 的 Drinfeld double $D(kS_3)$的不可约表示与 Grothendieck 群 $G_0(D(kS_3))$的环结构,其中 k 是特征为 2 的域,且含有一个 3 次本原单位根。
关键词: Hopf 代数;Grothendieck 群;单模;Yetter-Drinfeld 模;Drinfeld double
中图分类号:O152.6 **文献标志码:**A

Irreducible representations of $D(kS_3)$ and ring structure of its Grothendieck group

ZHU Hong, ZHANG Ying
(School of Mathematics Science, Yangzhou University, Yangzhou 225002, Jiangsu, China)

Abstract: Let k be a field of characteristic 2 containing a 3-th primitive root of unity, and S_3 be the symmetric group on 3 letters. The irreducible representations of the Drinfeld double $D(kS_3)$ of Hopf algebra kS_3 is discussed. The ring structure of the Grothendieck group $G_0(D(kS_3))$ are also given.
Key words: Hopf algebra; Grothendieck group; simple module; Yetter-Drinfeld module; Drinfeld double

1 预备知识

本文中恒设 k 是特征为 2 的域,并设 k 含有一个 3 次本原单位根 α。此时 $\alpha^2+\alpha+1=0$。用$\otimes$表示$\otimes_k$。文中所有的代数、Hopf 代数、模以及余模都是定义在域 k 上的向量空间。关于代数、余代数的有关符号和性质参见文献[1]。本文中的模均为左模,余模均为右余模。

有限维 Hopf 代数 H 的 Drinfeld double $D(H)$是 Drinfeld 在研究 Yang-Baxter 方程时给出的,$D(H)$是拟三角 Hopf 代数,因此通过 $D(H)$的表示可为 Yang-Baxter 方程提供解(详见文献[2])。Yetter-Drinfeld H-模,简称 YD H-模,是 Yetter 研究 monoidal 范畴时引入的。众所周知,当 H 是有限维 Hopf 代数时,$D(H)$的模范畴同构于 YD H-模范畴(详见文献[1])。

设 H 是一个 Hopf 代数,有双射的反极元 S。一个 YD H-模 M 是(左) H-模 M,同时也是(右)H-余模,且满足下面等价的相容性条件:

(1) $\sum h_1\cdot m_0\otimes h_2m_1=\sum(h_2\cdot m)_0\otimes(h_2\cdot m)_1h_1$,

(2) $\sum(h\cdot m)_0\otimes(h\cdot m)_1=\sum h_2\cdot m_0\otimes h_3m_1S^{-1}(h_1)$,

其中 $h\in H$, $m\in M$。

如果 M 和 N 是两个 YD H-模,则 $M\otimes N$ 也成为 YD H-模,$M\otimes N$ 的 H-模结构和 H-余模结构分别为

收稿日期:2009-08-02
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771183);高等学校博士学科点专项科研基金资助课题(200811170001)
作者简介:朱虹(1983-),女,博士,主要研究方向为群与代数表示. Email:zhuhongazhu@yahoo.com.cn

$$h\cdot(m\otimes n)=\sum h_1\cdot m\otimes h_2\cdot n,\rho(m\otimes n)=\sum m_0\otimes n_0\otimes n_1m_1,$$

其中 $h\in H,m\in M,n\in N$(见[3-4])。用$_H YD^H$ 表示 YD H-模范畴,$_H M$ 表示(左)H-模范畴,M^H 表示(右)H-余模范畴。

命题 1.1[1] 设 H 是有限维 Hopf 代数,则$_H YD^H\cong{}_{D(H)}M$。

现在设 G 是一个有限群,则群代数 kG 是有限维 Hopf 代数。设$(kG)^*$ 为 kG 的对偶 Hopf 代数,则$(kG)^*$ 有 k-基$\{p_g\mid g\in G\}$,其中$\langle p_g,h\rangle=\delta_{g,h},g,h\in G,\delta_{g,h}$为 Kronecker 符号。此时 kG 和$(kG)^{*cop}$是 Drinfeld Double $D(kG)$的 Hopf 子代数。$D(kG)$的 Hopf 代数结构可描述如下:作为 k-向量空间$D(kG)$有一组$\{p_gh\mid g,h\in G\}$,乘法为

$$(p_gh)(p_xy)=(p_gp_{hxh^{-1}})(hy)=\delta_{g,hxh^{-1}}p_ghy,g,h,x,y\in G,$$

余乘法 Δ、余单位 ε 和反极元分别为

$$\Delta(p_gh)=\sum_{yx=g}p_xh\otimes p_yh,\varepsilon(p_gh)=\delta_{g,1},S(p_gh)=p_{h^{-1}g^{-1}h}h^{-1},g,h\in G。$$

拟三角 Hopf 代数的定义也是由 Drinfeld 引入的,若 H 是拟三角的 Hopf 代数,则对于任意的 H-模 M 和 N,有 H-模同构 $M\otimes N\cong N\otimes M$。进一步地,任一个有限维 Hopf 代数 H 的 Drinfeld double $D(H)$总是拟三角的,因此对于任意的 $D(H)$-模 M 和 N,总有 $D(H)$-模同构 $M\otimes N\cong N\otimes M$(详见文献[1-2])。

设 H 是有限维 Hopf 代数,用 $F(H)$表示有限维 H-模的一切同构类的集合,用(M)表示有限维 H-模 M 所在的同构类。设 $C(H)$是基为 $F(H)$的自由 Abel 群(加法群),令 $R(H)$是由所有形如$(M_2)-(M_1)-(M_3)$的元素生成的 $C(H)$的子群,其中 $0\to M_1\to M_2\to M_3\to 0$ 为 H-模短正合列,称商群 $G_0(H)=C(H)/R(H)$是 H 的 Grothendieck 群,其中的元素$(M)+R(H)$记为$[M]$。设$\{V_1,V_2,\cdots,V_m\}$是单 H-模同构类的一个代表系,则 $G_0(H)$是基为$\{[V_1],[V_2],\cdots,[V_m]\}$的自由 Abel 群。此时 $G_0(H)$是一个环,乘法为$[M][N]=[M\otimes N]$,称为 H 的 Grothendieck 环。若 H 是拟三角的 Hopf 代数,则 $G_0(H)$是交换环。特别地,$G_0(D(kG))$是交换环,其中 G 为有限群。

2 $D(kS_3)$-不可约表示

本节讨论 Drinfeld double $D(kS_3)$的不可约表示,给出 $D(kS_3)$上单模的结构及同构分类,其中 S_3 是 3 元对称群。

我们知道,$S_3=\langle a,b\mid a^2=1,b^3=1,(ab)^2=1\rangle$,令 $x_1=1,x_2=a,x_3=b^2a,x_4=ba,x_5=b,x_6=b^2$。简记 $p_i=p_{x_i},1\leqslant i\leqslant 6$,则 Drinfeld double $D(kS_3)$有 k-基$\{p_ix_j\mid 1\leqslant i,j\leqslant 6\}$。作为 k-代数,$D(kS_3)$由$\{p_i,a,b\mid 1\leqslant i\leqslant 6\}$生成。首先构造 $D(kS_3)$上的几个有限维单模。

(1) 一维单模 V_1:$\rho_1=\varepsilon:D(kS_3)\to k,\rho_1(p_ix_j)=\varepsilon(p_ix_j)=\delta_{i,1},1\leqslant i,j\leqslant 6$,是一个代数同态,相应的一维 $D(kS_3)$-单模 V_1 称为平凡 $D(kS_3)$-模。

(2) 三维单模 V_2:存在惟一的代数同态 $\rho_2:D(kS_3)\to M_3(k)$使得

$$\boldsymbol{\rho}_2(a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{\rho}_2(b)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{\rho}_2(p_2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\rho}_2(p_3)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{\rho}_2(p_4)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\rho}_2(p_i)=0,i=1,5,6。$$

记相应的 $D(kS_3)$-模为 V_2。

(3) 二维单模 V_3:存在惟一的代数同态 $\rho_3:D(kS_3)\to M_2(k)$使得

$$\boldsymbol{\rho}_3(a)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{\rho}_3(b)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\rho}_3(p_5)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\rho}_3(p_6)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\rho}_3(p_i)=0,$$

其中 $i=1,2,3,4$。记相应的 $D(kS_3)$-模为 V_3。

(4) 二维单模 V_4:存在惟一的代数同态 $\rho_4:D(kS_3)\to M_2(k)$使得

$$\boldsymbol{\rho}_4(a)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\rho}_4(b)=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\rho}_4(p_1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\rho}_4(p_i)=0,i=2,3,4,5,6。$$

记相应的 $D(kS_3)$-模为 V_4。

(5) 二维单模 V_5:存在惟一的代数同态 $\rho_5:D(kS_3)\to M_2(k)$使得

$$\boldsymbol{\rho}_5(a)=\begin{pmatrix}0&\alpha^2\\\alpha&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\rho}_5(b)=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\alpha^2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\rho}_5(p_5)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\rho}_5(p_6)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\rho}_5(p_i)=0,$$

其中 $i=1,2,3,4$。记相应的 $D(kS_3)$-模为 V_5。

(6) 二维单模 V_6:存在惟一的代数同态 $\rho_6:D(kS_3)\to M_2(k)$使得

$$\boldsymbol{\rho}_6(a)=\begin{pmatrix}0&\alpha\\\alpha^2&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\rho}_6(b)=\begin{pmatrix}\alpha^2&0\\0&\alpha\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\rho}_6(p_5)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\rho}_6(p_6)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\rho}_6(p_i)=0,$$

其中 $i=1,2,3,4$。记相应的 $D(kS_3)$-模为 V_6。

定理 2.1　V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,V_6 是互不同构的 $D(kS_3)$-单模。

证明　易证 V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,V_6 都是单的 $D(kS_3)$-模,剩下仅需证明 V_3,V_4,V_5,V_6 互不同构。因为 $\boldsymbol{\rho}_4(p_1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$和 $\boldsymbol{\rho}_3(p_1)=0$ 是秩分别为 2 和 0 的矩阵,故 V_3,V_4 不可能同构,同理 V_4 与 V_5 不同构,V_4 与 V_6 不同构。显然,$\boldsymbol{\rho}_3(b)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$与 $\boldsymbol{\rho}_5(b)=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\alpha^2\end{pmatrix}$不相似,故 V_3 与 V_5 不同构。同理,V_3 与 V_6 也不同构。最后假设 $V_5\cong V_6$,即存在模同构映射 $F:V_5\to V_6$。设$\{l_1,l_2\}$和$\{t_1,t_2\}$分别是 V_5 和 V_6 的基使得相应的矩阵表示为 ρ_5 和 ρ_6,再设 $F(l_1)=q_1t_1+q_2t_2$,$F(l_2)=q_3t_1+q_4t_2$,则$\begin{pmatrix}q_1&q_2\\q_3&q_4\end{pmatrix}$是 k 上的可逆矩阵。

由于 F 是模同态,所以 $F((p_5b)\cdot l_1)=(p_5b)\cdot F(l_1)$,即 $\alpha q_1t_1+\alpha q_2t_2=\alpha^2q_1t_1$。由于 $\alpha\neq 0$ 且 $\alpha\neq\alpha^2$,所以 $q_1=q_2=0$,这与$\begin{pmatrix}q_1&q_2\\q_3&q_4\end{pmatrix}$是可逆矩阵矛盾,故 V_5 与 V_6 不同构。

引理 2.1[5]　设 H 是 Hopf 代数,且有双射的反极元 S,有

(1) 设 $N\in M^H$,则 $H\otimes N\in M^H$,其中 $\rho(h\otimes n)=\sum(h_2\otimes n_0)\otimes h_3n_1S^{-1}(h_1)$,$\forall h\in H,n\in N$;

(2) 设 $L\in{}_HM$,则 $L\otimes H\in{}_HM$,其中 $h\cdot(l\otimes a)=\sum h_2\cdot l\otimes h_3aS^{-1}(h_1)$,$\forall h,a\in H,l\in L$。

引理 2.2[5]　设 H 是 Hopf 代数,且有双射的反极元 S,$M\in{}_HYD^H$,有

(1) 设 $L\in{}_HM$,则 $L\otimes H\in{}_HYD^H$,其中模作用和余模余作用为

$$h\cdot(l\otimes a)=\sum h_2\cdot l\otimes h_3aS^{-1}(h_1),\rho(l\otimes h)=\sum(l\otimes h_1)\otimes h_2,h,a\in H,l\in L。$$

(2) 设 $L\in{}_HM$,$p:M\to L$ 是H-模同态,则有 YD H-模同态$f:M\to L\otimes H$,$f(m)=\sum p(m_0)\otimes m_1$,$m\in M$,其中 $L\otimes H$ 的结构如(1)中所示。进一步,Ker(f)是包含于 Ker(p)的 M 的最大 YD H-子模,实际上是最大的右 H-子余模。

(3) M 同构于上述某个 $L\otimes H$ 的一个 YD H-子模。

注　设 $M\in{}_HYD^H$(H 有限维)为单的 YD H-模,N 是 M 的非零 H-子余模,则由 N 生成的H-子模 $H\cdot N$ 也是H-子余模,故 $M=H\cdot N$。特别地,当 N 为单子余模时,$M=H\cdot N$ 是有限生成的H-模。这意味着 M 包含一个极大真子模M'。令 $L=M/M'$,$p:M\to L$ 是自然投射,则 L 是单的H-模,$M'=\mathrm{Ker}(p)$不包含 M 的非零 YD H-子模。由上述引理 M 同构于$L\otimes H$ 的一个 YD H-子模,所以 M 是 $L\otimes H$ 的 YD H-子模。故 $M=H\cdot N$,其中 N 为 $L\otimes H$ 的某个单子余模。

下述引理 2.3 是显然的,可以直接验证。

引理 2.3　在同构的意义下,kS_3 有且仅有两个单模,它们的结构如下:

(1) 一维单模 L_1,任取 L_1 的基$\{w\}$,则 L_1 对应于增广代数同态 $\lambda_1: kS_3 \to k$,$\lambda_1(g)=1, g\in S_3$;

(2) 二维单模 L_2,L_2 有基$\{u_1, u_2\}$,相应的代数同态 $\lambda_2: kS_3 \to M_2(k)$由下式给出

$$\boldsymbol{\lambda}_2(a)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\lambda}_2(b)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}。$$

以下记 $H=kS_3$,设 L 是单H-模,则 $L\otimes H$ 的单子余模形如 $N=k(l\otimes g)$,其中 $l\in L, g\in S_3$。把$L\otimes H$的 YD H-子模 $H\cdot N=H\cdot(l\otimes g)$记为 $H(L,l,g)$,则有下面的引理。

引理 2.4 设 L 是单H-模,$0\neq l\in L, g\in S_3$,则 $H(L,l,g)$是单的 YD H-模当且仅当 $kC_{S_3}(g)\cdot l$ 是单 $kC_{S_3}(g)$-模,其中 $C_{S_3}(g)$表示 g 在 S_3 中的中心化子。

证明 设 $C_{S_3}(g)$在 S_3 中左陪集代表元集为$\{h_1=1, h_2, \cdots, h_n\}$,则 $H=\bigoplus\limits_{i=1}^{n} kh_iC_{S_3}(g)$,所以有

$$H(L,l,g)=\bigoplus_{i=1}^{n} kh_iC_{S_3}(g)\cdot(l\otimes g)=\bigoplus_{i=1}^{n} h_i\cdot((kC_{S_3}(g)\cdot l)\otimes g)=\bigoplus_{i=1}^{n}((kh_iC_{S_3}(g)\cdot l)\otimes h_igh_i^{-1})。$$

因此 $H(L,l,g)$的单子余模形如 $k(h_i\cdot l'\otimes h_igh_i^{-1})$,从而 $H(L,l,g)$的单的 YD H-子模形如 $H\cdot(h_i\cdot l'\otimes h_igh_i^{-1})$,其中 $l'\in kC_{S_3}(g)\cdot l$。

若 $kC_{S_3}(g)\cdot l$ 是单$kC_{S_3}(g)$-模,任取 $H(L,l,g)$的单的 YD H-子模$H\cdot(h_i\cdot l'\otimes h_igh_i^{-1})$,其中 $0\neq l'\in kC_{S_3}(g)\cdot l$,则 $kC_{S_3}(g)\cdot l'=kC_{S_3}(g)\cdot l$,所以存在 $r\in kC_{S_3}(g)$使得 $l=r\cdot l'$。而 $rh_i^{-1}\in H$,所以 $rh_i^{-1}\cdot(h_i\cdot l'\otimes h_igh_i^{-1})\in H\cdot(h_i\cdot l'\otimes h_igh_i^{-1})$。然而我们有

$$rh_i^{-1}\cdot(h_i\cdot l'\otimes h_igh_i^{-1})=r\cdot(l'\otimes g)=(r\cdot l')\otimes g=l\otimes g,$$

因此 $l\otimes g\in H\cdot(h_i\cdot l'\otimes h_igh_i^{-1})$,所以 $H\cdot(h_i\cdot l'\otimes h_igh_i^{-1})=H(L,l,g)$,这说明 $H(L,l,g)$是单的 YD H-模。反之,若 $kC_{S_3}(g)\cdot l$ 不是单 $kC_{S_3}(g)$-模,则存在$0\neq l'\in kC_{S_3}(g)\cdot l$ 使得 $l\notin kC_{S_3}(g)\cdot l'$。此时由上面的证明知:$H\cdot(l'\otimes g)$是 $H(L,l,g)$的 YD H-子模且 $l\otimes g\notin H\cdot(l'\otimes g)$。这就证得了 $H(L,l,g)$不是单的 YD H-模。

定理 2.2 设 V 是$D(H)$-单模,则 V 必同构于$V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$ 中之一。

证明 由引理2.1,2.2及其注,可以通过单 H-模L,求出 $L\otimes H$ 的所有单子余模 N,然后利用引理2.4对形如 $M=H\cdot N$ 的 YD H-模验证其是否为单的 YD H-模,从而确定全部单的 YD H-模。

首先考虑$L_1\otimes H$ 的单子余模,共有六个:$N_i=k(w\otimes x_i)$,$1\leqslant i\leqslant 6$。由引理2.4知,$H\cdot N_i=H(L_1,w,x_i)$都是单的 YD H-模。直接验证可知

$$H\cdot N_1\cong V_1, H\cdot N_2=H\cdot N_3=H\cdot N_4\cong V_2, H\cdot N_5=H\cdot N_6\cong V_3。$$

下面考虑$L_2\otimes H$ 的单子余模,任取$L_2\otimes H$ 的单子余模 N,则有 $N=k(u\otimes x_i)$,其中 $0\neq u\in L_2$,$1\leqslant i\leqslant 6$。利用引理2.4验证,得到所有可能的单的 YD H-模 $H\cdot N$ 如下:

$$H\cdot(u\otimes x_1)\cong V_4,$$

$$H\cdot(u_1\otimes x_2)=H\cdot(u_2\otimes x_3)=H\cdot((u_1+u_2)\otimes x_4)\cong V_2,$$

$$H\cdot((u_1+\alpha u_2)\otimes x_5)=H\cdot((\alpha u_1+u_2)\otimes x_6)\cong V_5,$$

$$H\cdot((u_1+\alpha^2u_2)\otimes x_5)=H\cdot((\alpha^2u_1+u_2)\otimes x_6)\cong V_6。$$

这就证得了定理2.2。

3 $D(kS_3)$的 Grothendieck 群的环结构

本节将给出 $D(kS_3)$的 Grothendieck 群的环结构,也就是要具体地给出表达式

$$[V_i][V_j]=[V_i\otimes V_j]=\sum_{1\leqslant t\leqslant 6} n_t[V_t], n_t\in N, 1\leqslant i,j\leqslant 6。$$

定理 3.1　$D(kS_3)$的 Grothendieck 群 $G_0(D(kS_3))$是一个交换环，作为加法交换群 $G_0(D(kS_3))$有一组 Z-基$\{[V_1],[V_2],[V_3],[V_4],[V_5],[V_6]\}$，其乘法结构由下述等式给出：

$$[V_1][V_i]=[V_i],1\leqslant i\leqslant 6;[V_2][V_2]=[V_1]+[V_3]+[V_4]+[V_5]+[V_6];$$
$$[V_2][V_3]=2[V_2];[V_2][V_4]=2[V_2];$$
$$[V_2][V_5]=2[V_2];[V_2][V_6]=2[V_2];$$
$$[V_3][V_3]=2[V_1]+[V_3];[V_3][V_4]=[V_5]+[V_6];$$
$$[V_3][V_5]=[V_4]+[V_6];[V_3][V_6]=[V_4]+[V_5];$$
$$[V_4][V_4]=2[V_1]+[V_4];[V_4][V_5]=[V_3]+[V_6];$$
$$[V_4][V_6]=[V_3]+[V_5];[V_5][V_5]=2[V_1]+[V_5];$$
$$[V_5][V_6]=[V_3]+[V_4];[V_6][V_6]=2[V_1]+[V_6]。$$

证明　由于 $D(kS_3)$是拟三角的 Hopf 代数，所以 $V_i\otimes V_j\cong V_j\otimes V_i$，从而 $G_0(D(kS_3))$是一个交换环。因为 V_1 是平凡 $D(kS_3)$-模，所以 $V_1\otimes V_i\cong V_i$，从而$[V_1][V_i]=[V_1\otimes V_i]=[V_i],1\leqslant i\leqslant 6$。

设$\{d_1,d_2,d_3\}$是 V_2 的 k-基，使得相应的矩阵表示为 $\boldsymbol{\rho}_2$，则$\{v_{ij}=d_i\otimes d_j \mid i,j=1,2,3\}$是$V_2\otimes V_2$的 k-基。直接验证可知$V_2\otimes V_2$有 5 个单子模：

$$k(v_{11}+v_{22}+v_{33})\cong V_1,k(v_{22}+v_{33})+k(v_{11}+v_{33})\cong V_4,k(v_{13}+v_{21}+v_{32})+k(v_{12}+v_{23}+v_{31})\cong V_3,$$
$$k(v_{13}+\alpha^2v_{21}+\alpha v_{32})+k(\alpha^2v_{12}+v_{23}+\alpha v_{31})\cong V_5,k(v_{13}+\alpha v_{21}+\alpha^2v_{32})+k(\alpha v_{12}+v_{23}+\alpha^2v_{31})\cong V_6。$$

因此$V_2\otimes V_2\cong V_1\oplus V_3\oplus V_4\oplus V_5\oplus V_6$，故$[V_2][V_2]=[V_1]+[V_3]+[V_4]+[V_5]+[V_6]$。

再设$\{e_1,e_2\}$是 V_3 的 k-基，使得相应的矩阵表示为 $\boldsymbol{\rho}_3$，则$\{u_{ij}=d_i\otimes e_j \mid 1\leqslant i\leqslant 3,1\leqslant j\leqslant 2\}$是$V_2\otimes V_3$的 k-基。直接验证可知 $\mathrm{soc}(V_2\otimes V_3)=\mathrm{span}\{u_{21}+u_{32},u_{12}+u_{31},u_{11}+u_{22}\}\cong V_2$，且$(V_2\otimes V_3)/\mathrm{soc}(V_2\otimes V_3)\cong V_2$。因此$[V_2][V_3]=[V_2\otimes V_3]=2[V_2]$。同理可证$[V_2][V_4]=2[V_2]$，$[V_2][V_5]=2[V_2]$，$[V_2][V_6]=2[V_2]$。

定理中其它等式可类似地证明(略)。

参考文献：

[1] MONTGOMERY S. Hopf algebras and their actions on rings[M]// CBMS Series in Math: vol.82. Providence:Am Math Soc, 1993.

[2] DRINFELD V G. Quantum groups[M]// Proc Internat Cong Math. New York:Berkeleg, 1986: 798-820.

[3] RADFORD D E, TOWBER J. Yetter-Drinfeld categories associated to an arbitrary bialgebra[J]. J Pure Appl Algebra, 1993, 87:259-279.

[4] YETTER D N. Quantum groups and representations of monoidal categories[J]. Math Proc Cambrige Philos Soc, 1990, 108:261-290.

[5] RADFORD D E. On oriented quantum algebras derived from representations of the quantum double of a finite-dimensional Hopf algebra [J]. J Algebra, 2003, 270:670-695.

（编辑：李晓红）