

基于 Markov 链模型的 MANET 连通性分析

项慧慧, 刘家康, 匡镜明, 王 崇

(北京理工大学电子工程系现代通信实验室, 北京 100081)

摘要: 提出一种基于 Markov 链模型的移动 Ad hoc 网络(MANET)连通性分析方法。建立节点可靠性分析的 Markov 链模型, 使之便于计算节点的可靠性概率。基于此, 建立网络剩余节点数以及故障节点数状态转移的 Markov 链模型, 并推导出计算节点随机网络连通概率的公式。通过 Matlab 仿真实验验证了理论分析的正确性。

关键词: 移动 Ad hoc 网络; 节点随机网络; 连通性; Markov 链模型

Analysis of MANET Connectivity Based on Markov Chain Model

XIANG Hui-hui, LIU Jia-kang, KUANG Jing-ming, WANG Chong

(Advanced Communications Lab, Department of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

【Abstract】 A new technique for analyzing connectivity of Mobile Ad hoc Network(MANET) based on the model of Markov chain model is proposed. A Markov chain model for computing reliability of nodes in the network is established. A Markov chain model of transition of the number of residual nodes and damaged nodes in the network is established, based on which the formulas for computing the probability of connectivity of the node probabilistic networks are proposed. Simulations based on Matlab are used to verify the validity of the analytical formulas.

【Key words】 Mobile Ad hoc Network(MANET); node probabilistic network; connectivity; Markov chain model

对于移动 Ad hoc 网络(Mobile Ad hoc Network, MANET)的连通性分析, 多在认定节点和链路是完全可靠的前提下进行^[1-3], 对于节点或链路不可靠的情况, 一般不作考虑。本文在考虑节点不可靠性的前提下, 将 MANET 建模为随机网络^[4], 运用 Markov 链模型对其连通性进行了分析。

1 网络连通性的相关概念

1.1 网络连通性定义

网络连通性属于网络抗毁性概念范畴。网络抗毁性通过 2 个可靠性的确定测度(粘聚度和连通度)来表示^[4], 本文即基于连通度定义分析 Ad hoc 网络的连通性。连通度指点连通度, 即对于一个连通网络, 定义连通度 ω_{st} 为断开一对节点 (s, t) 之间所有通路所需去掉的最少节点数。对于连通的无向网络, 其连通度定义为断开网络所需去掉的最少节点数, 即 $\omega = \min_{s,t} \{\omega_{st}\}$ 。

1.2 图论相关概念

N 个节点、 M 条边的网络可表示为图模型 $G=(V, E)$, 其中, $V (V=\{1,2,\dots,N\})$ 是网络的节点集合; E 是网络的边集合。

网络中节点 v 的度定义为与该节点直接相连的邻节点数^[1], 记为 $d(v)$ 。网络的最小节点度可表示为

$$d_{\min}(G) = \min_{v \in V} \{d(v)\}$$

1.3 网络模型

对移动 Ad hoc 网络建模, 须考虑 3 个基本方面^[1]: (1)节点的空间分布;(2)节点之间的无线信道模型;(3)节点的移动模型。

对于一个具有 N 个节点的网络, 假设每个节点均匀地分布在二维仿真区域 A 中, 并且各个节点的分布相互独立, 节

点分布密度即为 $\rho = N/A$ 。对无线信道的建模, 设每个节点的传输距离为 r_0 , 其天线是全向天线。在特定环境下, Ad hoc 网络中任何 2 个节点之间的连通性受制于节点的发射功率, 而发射功率直接决定通信覆盖范围。若 2 个节点都在各自的通信覆盖范围之内, 则它们之间可以直接通信, 且每个节点可以在二维仿真区域 A 内按照一定的移动模型自由移动^[5]。

由于在实际网络中节点和链路的可靠性会受到各种随机因素的影响, 这些影响有时并不能被忽略。而且, 一旦节点不存在, 与之相关联的无线信道也就失去存在的意义, 因此可以将链路的影响因素包含在节点的不可靠性中综合考虑。考虑到 MANET 中节点可能会受到的影响, 设每个节点能正常工作的概率为 P , 网络可以进一步表示为 $G=(V, E, P)$, 这样的网络就是节点随机的网络。

2 节点可靠性分析

2.1 节点可靠性参数

假定节点从一次运作直到故障的运转期是随机的, 服从参数 λ 的负指数分布, 其概率密度为 $\lambda e^{-\lambda t}$; 修理一次, 排除故障所需时间也是随机的, 服从参数 μ 的负指数分布, 其概率密度为 $\mu e^{-\mu t}$ 。节点各次运转期相互独立, 各次修复时间也相互独立, 且各次运转期和各次修复时间之间相互独立。对于这样的模型, 可以用连续马尔可夫过程对其进行建模^[6]。

设节点正常工作为状态 1, 正在修理为状态 2, 则由于节

基金项目: 国家部委基金资助项目

作者简介: 项慧慧(1984 -), 女, 博士研究生, 主研方向: MANET 组网技术, 接入协议, 路由协议; 刘家康, 教授、博士; 匡镜明, 教授、博士、博士生导师; 王 崇, 博士研究生

收稿日期: 2009-05-13 **E-mail:** xhh_1984@yahoo.com.cn

点自身设备的不可靠性，由状态 1 转移到状态 2 的概率为

$$p_{12}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda \Delta t} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

同理，由状态 2 转移到状态 1 的概率为

$$p_{21}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} \mu e^{-\mu t} dt = 1 - e^{-\mu \Delta t} = \mu \Delta t + o(\Delta t)$$

状态转移速率为

$$Q_{12} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{12}(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda$$

$$Q_{21} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{21}(\Delta t)}{\Delta t} = \mu$$

由此定义 λ 为失效率， μ 为修复率。节点设备的可靠性一般用平均故障间隔时间 $MTBF$ 或平均故障修复时间 $MTTR$ 来衡量，则有

$$MTBF = 1/\lambda, \quad MTTR = 1/\mu$$

2.2 节点可靠性概率分析

影响节点正常工作的因素可以分为外在因素和内在因素，外在因素包括实际环境中的各种突发情况，内在因素则以节点自身设备为主。外在因素的影响以节点受毁伤概率 P_d 表示，内在因素的影响则以节点的不可靠概率 P_f 表示。由 2.1 节的分析可知，节点自身的可靠概率 P_R 为

$$P_R = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda T}$$

由于系统运行时间远小于 $MTBF$ ，因此可认为系统运行过程中节点的可靠性概率 P_R 保持不变，即

$$P_R = e^{-\lambda T}$$

其中， T 表示系统的起始运行时间。则

$$P_f = 1 - P_R = 1 - e^{-\lambda T}$$

因此，综合考虑内外因素影响的节点可靠性概率分析示意图如图 1 所示。

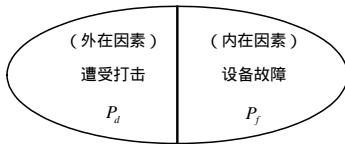


图 1 节点可靠性概率分析示意图

可分为以下 4 种情况：

(1) 节点完全可靠，且不存在任何外在因素的影响，生存(正常工作)概率为

$$P_{s1} = 1 \quad (1)$$

(2) 节点完全可靠，只存在外在因素的影响，生存概率为

$$P_{s2} = 1 - P_d \quad (2)$$

(3) 节点不完全可靠，但不存在任何外在因素的影响，生存概率为

$$P_{s3} = 1 - P_f \quad (3)$$

(4) 节点不完全可靠，同时存在外在因素的影响，生存概率为

$$P_{s4} = (1 - P_f)(1 - P_d) \quad (4)$$

式(1)~式(3)是式(4)的特例，式(4)则是一个概括以上所有情况的更为一般表达式。

2.3 节点可靠性分析的 Markov 链模型

由上文分析可知，节点可能处于 2 种状态：完好(正常工作)状态与故障状态。当节点处于完好状态，可能因为外在打击或节点设备故障向故障状态转移；而当节点处于故障状态，由于进行修复，又使其以一定的概率向完好状态转移。分析

节点生存概率的 Markov 链模型，如图 2 所示。其中，I 表示完好状态；II 表示故障状态； p 表示由 I 向 II 转移的一步转移概率； $(1-p)$ 表示生存概率； q 表示故障节点的修复概率， $(1-q)$ 表示故障节点未修复的概率。由 2.2 节分析可知，节点保持状态 I 的概率为 $p_{11} = (1 - P_f)(1 - P_d)$ ，由 I 向 II 的转移概率为 $p_{12} = 1 - (1 - P_f)(1 - P_d)$ ，由 II 向 I 的转移概率为 $p_{21} = q$ ，保持状态 II 的概率为 $p_{22} = 1 - p_{21} = 1 - q$ 。

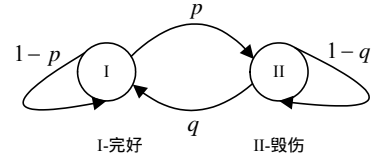


图 2 节点故障与修复过程的 Markov 链概率模型

综合 2 种因素得出的节点可靠性概率 p_{11} 及失效概率 p_{12} 仍服从负指数分布，因此，此时的修复概率也服从负指数分布，则图 2 中由 II 向 I 的转移概率为 $p_{21} = q = 1 - e^{-\mu T}$ 。设此时节点的平均故障时间间隔为 $MTBF'$ ，平均故障修复时间为 $MTTR'$ ，对应的失效率和修复率分别为 λ' 和 μ' ，则有 $\lambda' > \lambda$ ， $\mu' < \mu$ 。

根据柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)向后方程^[6]，当系统处于稳定状态时，节点处于状态 I 的概率 P_I 和状态 II 的概率 P_{II} 分别为

$$P_I = \frac{\mu'}{\lambda' + \mu'} \quad (5)$$

$$P_{II} = \frac{\lambda'}{\lambda' + \mu'} \quad (6)$$

3 Markov 链模型分析

3.1 网络中的 Markov 链模型

根据 2.1 节的定义及泊松分布的性质，网络中失效节点数以及修复节点数都服从泊松分布。根据 2.2 节的分析，单个节点的失效率及修复率分别为 λ' 和 μ' 。设任意时刻网络中剩余节点数为 $N(t)$ ，在任意时间间隔内，发生故障节点数的概率分布为

$$P\{N(t) - N(t + \Delta t) = n\} = e^{-\lambda' \Delta t} \frac{(\lambda' \Delta t)^n}{n!}$$

其中，发生故障节点数服从泊松分布。

修复节点数的概率分布为

$$P\{N(t + \Delta t) - N(t) = n\} = e^{-\mu' \Delta t} \frac{(\mu' \Delta t)^n}{n!}$$

其中，修复节点数服从泊松分布。

由此可得：

$$P\{N(t) - N(t + \Delta t) = 1\} = \lambda' \Delta t \cdot e^{-\lambda' \Delta t}, \quad n = 1 \quad (7)$$

$$P\{N(t) - N(t + \Delta t) = n\} = e^{-\lambda' \Delta t} \frac{(\lambda' \Delta t)^n}{n!}, \quad n = 2 \quad (8)$$

$$P\{N(t + \Delta t) - N(t) = 1\} = \mu' \Delta t \cdot e^{-\mu' \Delta t}, \quad n = 1 \quad (9)$$

$$P\{N(t + \Delta t) - N(t) = n\} = e^{-\mu' \Delta t} \frac{(\mu' \Delta t)^n}{n!}, \quad n = 2 \quad (10)$$

由此可知，一个间隔内有 2 个或 2 个以上节点发生故障或被修复的概率为 Δt 的高阶无穷小，若时间间隔比较小，在分析的时候可以忽略。因此，分析过程中可以认为一个间隔内只会 1 个节点发生故障或被修复。以网络中某一时刻的

剩余节点数或故障节点数为变化状态，可以用马尔可夫链模型对状态变化过程建模。根据抗毁连通度^[4]的定义，设网络 $G=(N, M, P)$ 的连通度为 ω ，则要保持网络连通，至少要剩余 $N-\omega+1$ 个节点，因此，剩余节点数的状态转移 Markov 链模型如图 3 所示。对应的故障节点数的状态转移 Markov 链模型如图 4 所示。

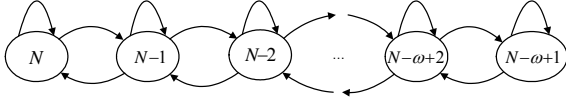


图 3 网络中剩余节点数的状态转移 Markov 链模型

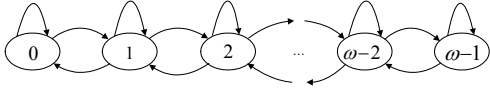


图 4 网络中故障节点数的状态转移 Markov 链模型

若当前网络中有 $i(N-\omega+1 < i < N)$ 个节点，下一状态为 $i-1(i-1 < N-\omega+1)$ 个节点，状态转移概率为 $P_{i,i-1}=P$ (有一条故障，没有链路被修复) = ip 。同理，由状态 $i-1$ 转移到状态 i 的概率为 $P_{i-1,i}=P$ (有一条链路被修复，没有链路发生故障) = $(N-(i-1))q$ 。由 2.3 节的分析，发生故障节点数的状态转移速率为

$$Q_{i,i-1} = i\lambda'$$

$$Q_{i-1,i} = (N-(i-1))\mu'$$

剩余节点数和故障节点数的状态转移速率 Markov 链模型分别如图 5 及图 6 所示。

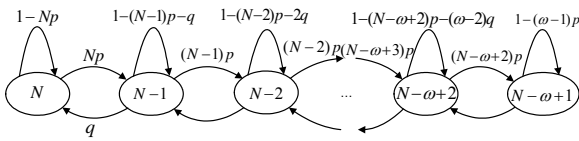


图 5 网络中剩余节点数的状态转移速率 Markov 链模型

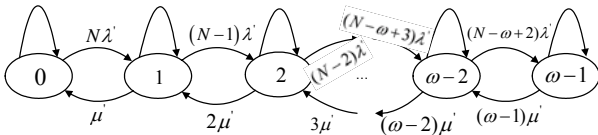


图 6 网络中故障节点数的状态转移速率 Markov 链模型

根据 Markov 生灭过程稳态概率公式推导过程^[6]可得，系统稳态时处于各个状态的概率为

$$\begin{cases} P_0 = \left(\sum_{i=0}^{\omega-1} C_N^i (\lambda'/\mu')^i \right)^{-1} \\ P_k = C_N^k (\lambda'/\mu')^k P_0, k=0,1,\dots,\omega-1 \end{cases} \quad (11)$$

对于实际系统，当系统运行较长时间之后，系统初始状态概率分布的影响将消失。此时，系统状态虽然还是随机变化，但各状态概率不再变换，系统处于稳定状态，此时可用统计平均方法计算网络的连通概率。

3.2 节点随机网络连通概率的计算

设 \overline{CP}_k 为网络中有 k 个节点发生故障后的连通概率，这种情况的连通概率计算为

$$\overline{CP} = \sum_{k=0}^{\omega-1} P_k \overline{CP}_k \quad (12)$$

其中， \overline{CP}_k 的计算为

$$\overline{CP}_k = \sum_{F=1}^{C_N^k} \prod_{j \in D_F} P_{ij} \left(\prod_{i \in [V-D_F]} P_{ij} \right) \times CP_{[V-D_F]} \quad (13)$$

其中， D_F 表示 k 个故障节点的集合，有 C_N^k 种情况； $\prod_{j \in D_F} P_{ij}$ 表示集合中节点故障概率的乘积； $V-D_F$ 表示剩余节点的集合；

$\prod_{i \in [V-D_F]} P_{ij}$ 表示剩余节点可靠性概率的乘积； $CP_{[V-D_F]}$ 表示剩余网络拓扑的连通性，可以根据确定性网络理论^[1]得出。

对于网络连通性，更多地关注 k 连通的概率 (k 连通度)。网络的 k 连通，即任意去掉网络中 $k-1$ 个节点，网络仍能保持连通^[1]。因此， \overline{CP}_k 亦即是对节点随机网络的 $k+1$ 连通度的概率加权平均。以计算网络的 2-连通度为例，如下：

$$\overline{CP}_1 = \sum_{j=1}^N P_{ij} \left(\prod_{i \in [V-j]} P_{ij} \right) CP_{[N-j]} \quad (14)$$

其中， $P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{iN}$ 为各个节点的发生故障概率，由式(6)给出； $\prod_{i \in [V-j]} P_{ij}$ 为网络中除去节点 j 的剩余 $N-1$ 个节点可靠性概率乘积； $CP_{[N-j]}$ 为从网络中去掉节点 j ，剩余网络拓扑的连通概率。要计算 $\overline{CP}_k (k \geq 2)$ ，依式(13)类推即可。

对文献[1]中式(9)和式(17)用本文式(5)和式(6)做修正，可以得到节点随机网络连通概率的理论计算公式：

$$r_0 = \sqrt{\frac{-\ln \left(1 - \left(\frac{\overline{CP}}{P_{i1} P_{i2} \dots P_{iN}} \right)^{1/N} \right)}{\rho \pi}} \quad (15)$$

$$P(k\text{-连通度}) \equiv P(d_{\min} = k) =$$

$$\left(1 - \sum_{k=0}^{k-1} \left(\frac{1}{C_N^k} \sum_{i=1}^{C_N^k} P_{i1} P_{i2} \dots P_{iN} \right) \frac{(\rho \pi r_0^2)^k}{K!} e^{-\rho \pi r_0^2} \right)^N \quad (16)$$

其中， \overline{CP} 表示网络连通概率； $P_{i1} P_{i2} \dots P_{iN}$ 表示网络中任意 K 个节点故障概率的乘积，共有 C_N^k 种情况。

4 仿真结果与分析

设定 λ' 和 μ' 的变化范围，节点故障概率在 (0,0.1) 之间均匀分布。网络中有 500 个节点，仿真 500 次，仿真区域 $A=1000 \times 1000 \text{ m}^2$ 。根据理论分析，设节点传输距离变化范围为 [0,190] (单位: m)，每次增加 10 m，并随机产生网络拓扑，最后计算连通概率。

首先进行理论仿真，采用仿真式(16)，并将此理论仿真结果与文献[1]给出的确定性网络的理论结果比较，见图 7。

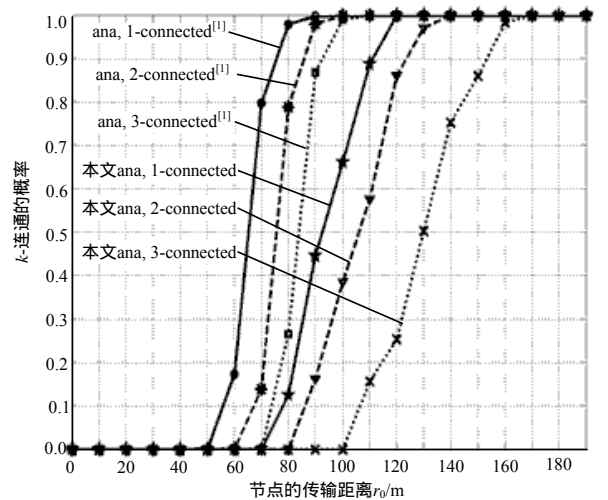


图 7 连通度对比的理论结果

采用仿真式(12)，并将仿真结果与式(16)的理论结果比

较。仿真中基于欧氏距离判断 2 个节点是否直接相连。仿真结果对比如图 8 所示。由于欧氏距离度量不能消除仿真中的边界效应^[1]，导致仿真结果与理论结果有所差异，但变化趋势基本一致。

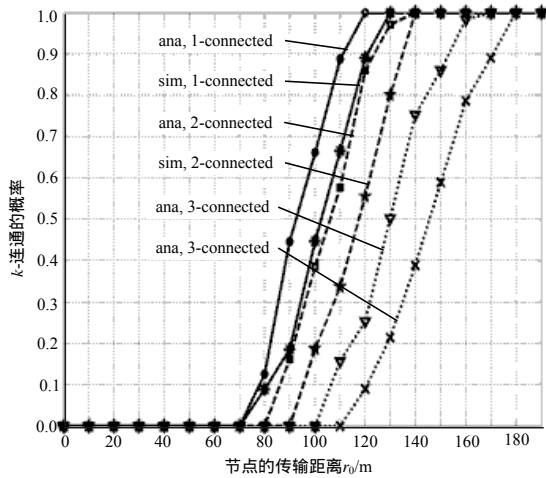


图 8 节点随机网络的理论与仿真结果

基于图论 k 连通定义仿真相同拓扑下确定性网络的 1-连通、2-连通和 3-连通的概率，并与节点随机网络的仿真结果进行比较，如图 9 所示。

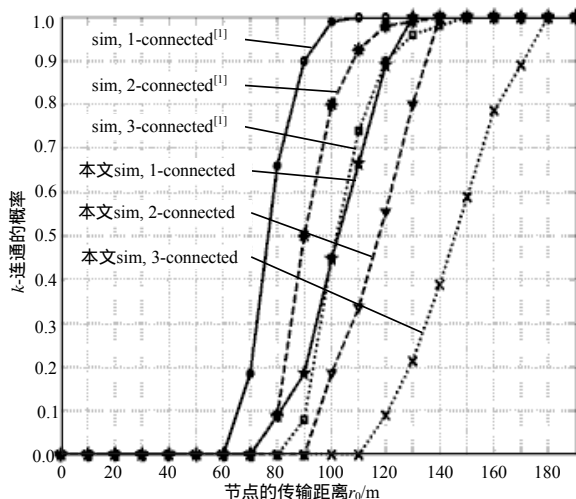


图 9 连通度对比的仿真结果

为了验证节点故障概率对网络连通性的影响，分别设节点故障概率为 0.05 及 0.10，仿真其对网络连通性的影响，结果如图 10 所示。

可以得出仿真结论：在相同连通性要求下，节点随机网络对节点传输距离 r_0 要求明显比确定性网络的要求高，即对节点发射功率的要求提高。因此，对于节点随机的网络，在实际进行网络设计时，需要充分考虑随机因素，选择性能较高的节点，或通过部署更多的节点，增大网络节点或链路的冗余度，以提高网络性能。

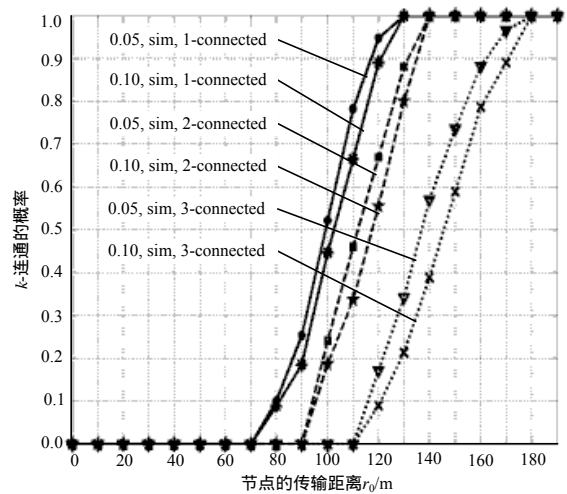


图 10 故障概率分别设为 0.05 及 0.10 时的仿真结果

5 结束语

移动 Ad hoc 网络连通性分析是部署网络的第一步工作。由于移动 Ad hoc 网络的自组织、节点随机移动、节点和链路不可靠性、网络拓扑瞬时变化等特性，对其网络拓扑的建模和分析一直都是该领域研究的难点之一。网络拓扑建模需要考虑网络所处的传输环境、节点的移动模型等较多因素。针对网络拓扑的动态变化和节点的不可靠性，本文利用 Markov 链模型对网络拓扑的动态变化和节点的概率特性进行描述，得出理论计算公式，并通过仿真验证理论分析的正确性。分析得出的参数可以作为网络仿真或实际网络部署的参考值，具有一定的实际意义。

参考文献

- [1] Bettstetter C. On the Minimum Node Degree and Connectivity of a Wireless Multihop Network[C]//Proc. of ACM MobiHoc'02. Lausanne, Switzerland: [s. n.], 2002.
- [2] Santi P, Blough D, Vainstein F. A Probabilistic Analysis for the Range Assignment Problem in Ad hoc Networks[C]//Proc. of ACM MobiHoc'01. Long Beach, CA, USA: [s. n.], 2001.
- [3] Philips K, Panwar S. Connectivity Properties of a Packet Radio Network Model[J]. IEEE Trans. on Information Theory, 1989, 35(5): 1044-1047.
- [4] Howard F, Frisch T. Analysis and Design of Survivable Networks[J]. IEEE Trans. on Communication Technology, 1970, COM-18(5): 501-519.
- [5] Bettstetter C. Mobility Modeling in Wireless Networks: Categorization, Smooth Movement, and Border Effects[J]. ACM Mobile Computing and Comm. Rev., 2001, 5(3): 55-66.
- [6] 叶酉荪, 南庚. 军事通信网分析与系统集成[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.

编辑 顾姣健