近似保积形式的参数曲线拟合

石 茂,叶正麟
SHI Mao,YE Zheng-lin

西北工业大学 应用数学系,西安 710072
Department of Applied Mathematics,Northwestern Polytechnical University,Xi'an 710072,China
E-mail:shimao@china.com.cn

SHI Mao,YE Zheng-lin.Quasi-preserved area fitting by parametric curves.Computer Engineering and Applications,2009,45(35):3-5.

Abstract: In the computer aided design,curves fitting problems with an area constraint are often dealt with.But in practice,except a few cases with simple calculation,the area is obtained by using polynomials interpolation.Using the methods of numerical integration,a quasi-preserved area fitting by n degree parametric curves is given.The method can fitting $2n$ points,and is fairness over small interval.The finally numerical experiment shows it's effective.

Key words: fitting;Bézier curves;particle swarm optimization

摘 要:在计算机辅助设计中,要经常处理带有面积约束的参数曲线的拟合问题。但是在实际应用中,对于面积的计算除了少数简单的情况外,一般都采用传统的多项式函数插值方法实现数值解。利用数值积分这一方法,给出了一种近似保积形式的 n 次参数曲线拟合方法,该方法可以插值拟合于 $2n$ 个点,并且在小的闭区间上具有局部光顺性质;最后的数值实验表明这种方法行之有效,具有误差小等优点。

关键词:拟合;Bézier 曲线;微粒群算法
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2009.35.002 **文章编号:**1002-8331(2009)35-0003-03 **文献标识码:**A **中图分类号:**TP391;O241.3

1 前言

参数曲线的拟合问题是计算机辅助几何设计(cagd)中的一类基本而广泛的问题。在实际应用中不仅要求曲线拟合于某些点,而且拟合的点还要满足一定的约束条件,例如需要知道型值点的切向量或是曲率值等。另外在对船舶设计中设计者往往先确定横剖面面积曲线,再设计线形。因而在横剖面的拟合中就要求各站的横剖面的面积保持不变[1];在飞机设计与制造中,由于容积或面积的要求,飞机的机身和机翼的横截面积的闭曲线所围成的面积必须保持一定的面积率[2],因此一些专家学者对具有固定面积约束的平面曲线构造方法进行了研究。1987 年刘鼎元讨论了 Bézier 曲线和曲面包围的面积和体积算法[3]。1990 年 Nowacki H.等[4]基于面积约束,应用变分方法给出了 Bézier 曲线的光顺拟合。与此同时荣焕宗等[1]给出了在面积一定条件下两端具有四重节点的三次均匀 B 样条曲线的的拟合。1994 年 Nowacki H.等[5]给出了基于面积一定条件下的 Hermit参数曲线的拟合。1996 年邬弘毅等[6]给出了分别适用于平面物体的保面积和空间物体的保体积的 Bézier 曲线曲面的三种逼近算法。1998 年,蒋大为等[2]讨论了没有边界条件下的基于固定面积的三次 B 样条曲线的拟合,都取得了很好的效果。但是,在实际应用中除了少数简单的情况外,一般都采用传统的数值积分方法[3],工程上对被积区域面积的求解也多应用多项式函数插值拟合方法[7]。对参数多项式插值 2007 年 Jaklic G.等[8]证明了如果 n 次平面参数曲线存在,那么其可以插值于 $2n$ 个点。通过对以上文献中所用方法的研究,给出了在给定型值点和其切向量条件下的一种插值拟合方法。

2 问题描述

不失一般性,为了说明问题先讨论连续函数 $f(x)>0,x\in[a,b]$的情况,将其表示成参数形式为:

$$\boldsymbol{q}(t)=(\varphi(t)\quad\psi(t))^{\mathrm{T}},t\in[\alpha,\beta]$$

其中 $\varphi'(t)>0$(或 $\varphi'(t)<0$),在直角坐标系下面积表达式为:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\psi(\varphi^{-1}(x))\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

此时如果能找到一条 n 次参数多项式曲线 $\boldsymbol{p}_n(t)=(x(t)\quad y(t))^{\mathrm{T}}$,其中($x'(t)$与 $\varphi'(t)$同符号)使得 $y(t)x'(t)$在$[\alpha,\beta]$上插值拟合于 $\psi(t)\varphi'(t)$,则 $\int_\alpha^\beta\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t\approx\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\mathrm{d}t$。

基金项目:国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60671063);陕西省自然科学基金(the Natural Science Foundation of Shaanxi Province of China under Grant No.2006A02)。
作者简介:石茂(1972-),男,在读博士,主要研究领域为计算机辅助几何设计;叶正麟(1943-),男,教授,博导,主要研究领域为计算机辅助几何设计。
收稿日期:2009-09-17 **修回日期:**2009-10-27

一般地,基于近似保积形式的参数曲线拟合问题可以描述如下:

假设给定平面上一组点$\{\boldsymbol{l}_i=(l_{x_i},l_{y_i})\}_{i=0}^{2n-1}$,以及相应的切向量$\{\boldsymbol{m}_i=(m_{x_i},m_{y_i})\}_{i=0}^{2n-1}$,其中$m_{x_i}$要么单调递增,要么单调递减。寻找一个次数$\leqslant n$的参数多项式曲线

$$\boldsymbol{p}_n:[\alpha,\beta]\rightarrow\boldsymbol{R}^2$$

使得在点

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_{2n-2}<t_{2n-1}=\beta$$

上有

$$\sum_{i=0}^{2n-1}(y(t_i)x'(t_i)-l_{y_i}m_{x_i})^2=\min \quad (1)$$

其中$x(t)$与$\{m_{x_i}\}_{i=0}^{2n-1}$具有相同的单调性,即$x'(t)>0$或$x'(t)<0$。

近似保积形式的参数曲线拟合有着如下的优点:对于由n次参数多项式曲线形成的被积函数$y(t)x'(t)$的最高次幂为$2n-1$,因此它可以插值拟合于$2n$个点;又因为在区间$[\alpha,\beta]$上要求$x(t)$与$\{m_{x_i}\}_{i=0}^{2n-1}$具有相同的单调性,所以拟合插值曲线没有尖点、二重点或是折点[12]。因此这种拟合具有局部光顺性。

在实际的应用中,有时需要插值于端点,所以选取 Bézier 参数曲线为插值多项式曲线。其定义如下:n次 Bézier 曲线可以表示为

$$\boldsymbol{p}_n(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(t)\boldsymbol{p}_i,t\in[0,1] \quad (2)$$

其中$\boldsymbol{B}_{i,n}(t)=\begin{pmatrix}n\\i\end{pmatrix}t^i(1-t)^{n-i}$是 Bernstein 多项式(可以通过线性变换:$x=t(\beta-\alpha)+\alpha$将$[0,1]\rightarrow[\alpha,\beta]$),$\boldsymbol{p}_i=(x_i,y_i)^{\mathrm{T}}$,$(i=0,1,\cdots,n)$为控制顶点。对式(2)求导有

$$\boldsymbol{p}_n'(t)=\sum_{i=0}^{n-1}B_{i,n}(t)\Delta\boldsymbol{p}_i$$

若要满足在端点处具有G^{-1}连续,则有

$$p_0=l_0,p_n=l_n,p_1=p_0+\delta_0m_0,p_{n-1}=p_n-\delta_1m_n,\delta_0>0,\delta_1>0 \quad (3)$$

为了求出控制顶点,有如下的方法:首先给出在直角坐标系下的被积函数表达式

$$y(t)x'(t)=n(\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(t)y_i)(\sum_{j=0}^{n-1}B_{i,n-1}(t)\Delta x_i)=\sum_{k=0}^{2n-1}a_it^k \quad (4)$$

为一个$2n-1$次的多项式,其中

$$a_i=n\sum_{i+j=k}\begin{pmatrix}n\\i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n-1\\j\end{pmatrix}\Delta^iy_0\Delta^{j+1}x_0 \quad (5)$$

将式(4)带入式(1),通过最小二乘法求出系数$a_i,i=0,1,\cdots,2n-1$,值,然后再通过式(5)求出参数多项式的控制顶点。不过式(5)是一个非线性方程,因此需要通过迭代方法求解。

由于要通过式(4)和式(5)求出控制顶点$\{\boldsymbol{p}_i\}_{i=0}^{n}$,因此在计算的过程中会引起误差的累积和求值计算时间的延长,所以为了避免分步求解,采用一种比较直观的计算方法:应用基于模拟退火的微粒群的迭代法对式(1)直接求解。实验表明这种方法是行之有效的,并且取得了很好的逼近精度。

3 微粒群算法

微粒群算法是由美国社会心理学家 James Kennedy 和电器工程师 Russell Eberhart 在 1995 年共同提出来的,它是一种群体智能算法,目前和遗传算法等一样成为进化算法的一个重要分支。与其他进化算法不同的是[9]:微粒群算法在进化过程中同时保留和利用位置与位置的变化程度的信息,而其他进化算法仅保留和利用位置的信息,这也是微粒群算法可以呈现许多优良特性的关键。另外微粒群算法相对其他演化算法的优点是收敛速度快,但是会出现早熟,甚至是不能收敛的情况。为了避免早熟和不能收敛的情况发生,在这里采用基于模拟退火的粒子群算法求解。这是因为模拟退火算法在迭代搜索过程中能够有效地抑制概率突跳的不可控制性,从而能够避免搜索过程陷入局部极小解[10-11]。

设

$\boldsymbol{x}_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})$为微粒$i$的当前位置。

$\boldsymbol{v}_i=(v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{in})$为微粒$i$的当前飞行速度。

$\boldsymbol{p}_i=(p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{in})$为微粒$i$所经历的最好位置,即为微粒$i$所经历的具有最好适应值的位置。对于每一代 t,微粒群的算法方程可描述如下:

$$v_{ij}(t+1)=\varphi\{v_{ij}(t)+c_1r_{1j}(t)[p_{ij}(t)-x_{ij}(t)]+c_2r_{2j}(t)[p_{gj}'(t)-x_{ij}(t)]\} \quad (6)$$

$$x_{ij}(t+1)=x_{ij}(t)+v_{ij}(t+1) \quad (7)$$

其中w为惯性权重,c_1,c_2为加速常数,$r_{1j}\sim U(0,1)$,$r_{2j}\sim U(0,1)$为两个相互独立的随机数,$\varphi=\dfrac{2}{\left|2-C-\sqrt{C^2-4c}\right|}$,$C=c_1+c_2$。

基于模拟退火的微粒群算法流程如下:

(1)初始化群体的规模及每个微粒的初始位置与初始速度;

(2)计算每一个微粒的适应值;

(3)对于每一个微粒,将其适应值与所经历过的最好位置$\boldsymbol{p}_i$的适应值进行比较,若较好,则将其作为当前的最好位置;

(4)对每一个微粒,将适应值与全局所经历的最好位置$\boldsymbol{p}_g$的适应值进行比较,若较好,则将其作为当前的全局最好位置;

(5)初始模拟退火算法的起始温度;

(6)根据$TF(\boldsymbol{p}_i)=\dfrac{\mathrm{e}^{-(f(\boldsymbol{p}_i)-f(\boldsymbol{p}_g))/t}}{\sum_{i=1}^{N}\mathrm{e}^{-(f(\boldsymbol{p}_i)-f(\boldsymbol{p}_g))/t}}$,确定当前温度下的各$\boldsymbol{p}_i$的适配值;

(7)采用轮盘选择法选取$\boldsymbol{p}_g'$,然后根据方程(4)(5)对微粒的速度和位置进行进化;

(8)进行褪温操作;

(9)如未达到结束条件或达到一个预设最大代数($G_{\max}$),则返回到步骤(6)。

4 实验

对算法进行了大量的实验,这里给出圆弧$\boldsymbol{q}(t)=(\cos\theta,\sin\theta)^{\mathrm{T}}$,$\theta\in[\alpha,\beta]$的实验结果。其中$n=2,3,4$;拟合区间为$[0,\pi]$。具体过程是首先把$[0,\pi]$分成 4 等分小区间,然后在这 4 个小区间上应用算法对其进行拟合。计算结果非常好地反映了圆弧的对称性。微粒群算法的参数统一取为:$c_1=2.05$,$c_2=2.05$,退火常数=0.5,最大迭代数=1 000。

表1 二次 Bézier 曲线的拟合结果

区间	$[0,\frac{\pi}{4}]$	$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$	$[\frac{3\pi}{4},\pi]$
δ_0	0.439 182 903 955 663	0.503 063 502 055 809	0.460 474 704 299 194	0.373 092 479 301 833
δ_1	0.373 092 479 517 318	0.460 474 702 579 579	0.503 063 505 636 063	0.439 182 902 546 790
误差	2.984 472 133 427 538e–005	0.002 999 669 360 558	0.002 999 669 360 558	2.984 472 133 427 502e–005

表2 三次 Bézier 曲线的拟合结果

区间	$[0,\frac{\pi}{4}]$	$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$	$[\frac{3\pi}{4},\pi]$
δ_0	0.266 039 152 865 716	0.261 238 108 251 395	0.261 867 933 624 319	0.262 045 709 762 454
δ_1	0.262 045 709 787 790	0.261 867 933 559 939	0.261 238 108 270 596	0.266 039 153 510 834
误差	5.281 272 849 713 382e–006	4.761 914 604 285 914e–006	4.761 914 604 285 759e–006	5.281 272 849 713 073e–006

表3 四次 Bézier 曲线的拟合结果

区间	$[0,\frac{\pi}{4}]$	$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$	$[\frac{3\pi}{4},\pi]$
δ_0	0.195 639 724 481 148	0.196 324 559 228 148	0.196 339 808 514 242	0.196 349 356 630 647
δ_1	0.196 349 356 630 268	0.196 339 808 521 036	0.196 324 559 247 984	0.195 639 724 554 247
$\boldsymbol{p}_{2x}$	0.948 454 160 161 508	0.392 881 209 777 954	–0.392 881 209 750 247	–0.948 454 160 158 332
$\boldsymbol{p}_{2y}$	0.393 581 381 975 584	0.948 724 173 402 146	0.948 724 173 377 190	0.393 581 381 929 799
误差	2.851 796 904 639 992e–011	4.549 228 466 259 459e–008	4.549 228 466 262 133e–008	2.851 796 904 701 790e–011

参考文献:

[1] 荣焕宗,张伟荣,张蔚.带有面积约束的 B 样条曲线拟合方法[J].应用数学与计算数学学报,1990,4(2):19–25.

[2] 蒋大为,李安平,蔡元虎.具有固定面积约束的光顺 B 样条曲线[J].数值计算与计算机应用,1998(2):90–98.

[3] 刘鼎元.Bézier 曲线和曲面包围的面积和体积算法[J].计算数学,1987(3):327–336.

[4] Nowacki H,Liu D Y,Lv X M.Fairing Bézier curves with constraints[J].Computer Aided GeometricDesign,1990,7:43–55.

[5] Nowacki H,Lv X M.Fairing composite polynomials curves with constraints[J].Computer Aided Geometric Design,1994,11(1):1–15.

[6] 邬弘毅,叶翠金,孙胜先.用 Bézier 方法求保积逼近的三种方法[J].应用数学学报,1996,19(3):328–327.

[7] 李庆杨.数值分析基础教程[M],北京:高等教育出版社,2001.

[8] Jaklic G,Kozak J,Krajnc M,et al.On geometric interpolation by planar parametric polynomial curves[J].Mathematics of Computation,2007:1–13.

[9] 曾建潮,介婧,崔志华.微粒群算法[M].北京:科学出版社,2004.

[10] 谷良贤,王轶鹏,龚春林.基于概率突跳和模拟退火的改进自适应微粒群算法[J].控制与决策,2009,24(4):617–620.

[11] 龚纯,王正林.精通 Matlab 最优化计算[M].北京:电子工业出版社,2009.

[12] 迟静,张彩明.具有最小曲率变化率的几何 Hermite 曲线[J].计算机辅助几何设计与图形学学报,2008,20(7):882–887.

(上接2页)

图2表明:

(1)信噪比增加,时延估计精度增加;

(2)通道数增加,估计精度略有降低;

(3)该估计方法的估计精度受信噪比影响较大,而几乎不受通道数的影响,估计性能稳定。

产生上述情况的主要原因是遗传算法代数一定的情况下,通道数越多,其寻优的空间越大,在相同的遗传代数下,未能达到最优解,从而造成通道数增加,估计精度降低。如果在较多通道时,增加其迭代次数,估计精度会有所提高。该相对时延估计方法充分利用了噪声子空间的信息,因此估计方法具有很好的稳健性,通道数的增加对于其并不存在太大影响。

4 结束语

将阵列信号处理中的超分辨分析方法引入到信号的相对时延估计中,在将信号模型建立为复信号的基础上,给出了相对时延估计式,并在多通道情况下,通过采用非均匀变异算子的遗传算法实现该相对时延估计。仿真验证了该方法的有效性,并统计分析了信噪比以及通道数对估计算法的影响,实验表明该方法的估计精度几乎不受通道数的影响,具有很好的估计性能。

参考文献:

[1] Wang Z,He Z,Chen J.Robust time delay estimation of bioelectric signals using least absolute deviation neural network[J].IEEE Transactions on Biomedical Engineering,2005,52(3):454–462.

[2] Makar A.Estimation of the time delay of hydro acoustic signals for passive location of underwater objects[J].Archives of Acoustics,2004,29(3):435–445.

[3] So H C,Analysis of an adaptive algorithm for unbiased multipath time delay estimation[J].IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,2003,39(3):777–785.

[4] Zhang Lei,Wu Xiaolin.On cross correlation based discrete time delay estimation[C]//Proceedings(ICASS'05),IEEE International Conference,2005,4:981–984.

[5] Bekara M,van der Baan M.Acoustics,speech and signal processing[C]//ICASSP 2007,IEEE International Conference on,April 2007,III:1033–1036.

[6] 罗景青.阵列信号处理基本理论与应用[M].北京:解放军出版社,2007.