第 31 卷第 12 期　　电 子 与 信 息 学 报　　Vol.31No.12
2009 年 12 月　　Journal of Electronics & Information Technology　　Dec. 2009

基于图像抽样重组的 2 维核鉴别分析

程正东①②③　　樊　祥①②④　　章毓晋③
①(脉冲功率激光技术国家重点实验室(电子工程学院)　合肥　230037)
②(电子工程学院　合肥　230037)
③(清华大学电子工程系　北京　100084)
④(中国科技大学六系　合肥　230027)

摘　要：2 维核鉴别分析(2DKDA)存在离散度量矩阵过大而无法计算的问题。该文通过将图像抽样重组与 2DKDA 的结合，提出了 3 种基于图像抽样重组的 2DKDA(SR2DKDA)，它们不仅克服了 2DKDA 在计算上的困难，识别性能也优于 2 维线性鉴别分析(2DLDA)。在 ORL 人脸库和 UMIST 人脸库的实验验证了 SR2DKDA 的有效性。

关键词：2 维线性鉴别分析；2 维核鉴别分析；图像抽样重组；抽样重组 2 维核鉴别分析

中图分类号：TP391　　　**文献标识码**：A　　　**文章编号**：1009-5896(2009)12-2958-05

2-Dimensional Kernel Discriminant Analysis Based on Image Sampling and Regrouping

Cheng Zheng-dong①②③　　Fan Xiang①②④　　Zhang Yu-jin③
①(*State Key Laboratory of Pulsed Power Laser Technology* (*Electronic Engineering Institute*), *Hefei* 230037, *China*)
②(*Electronic Engineering Institute*, *Hefei* 230037, *China*)
③(*Electronic Engineering Department of Tsinghua University*, *Beijing* 100084, *China*)
④(*Science and Technology University of China*, *Hefei* 230027, *China*)

Abstract: 2-Dimensional Kernel Discriminant Analysis (2DKDA) can not be performed since its scatter metric matrices are too large. This paper combines the sampling and regrouping images with 2DKDA and gives three kinds of Sampling and Regrouping 2-Dimensional Kernel Discriminant Analysis (SR2DKDA). These algorithms not only overcome the drawback of 2DKDA but also have superior recognition accuracy to 2-Dimensional Linear Discriminant Analysis (2DLDA). The experiments on ORL database and UMIST database verify the efficiency of the SR2DKDA.

Key words: 2-dimensional linear discriminant analysis; 2-dimensional kernel discriminant analysis; Image sampling and regrouping; Sampling and regrouping 2-dimensional kernel discriminant analysis

1　引言

近几十年来，图像识别成为模式识别中的一个热门研究领域，并在公共安全、人机交互、医疗诊断等方面有着广泛的应用。线性鉴别分析[1](LDA)是最为基本的图像识别算法之一，但基于 LDA 的图像识别需将图像矩阵转化成向量形式后才能处理，这带来了小样本问题。继 2004 年二维主元分析[2](2DPCA) 被提出后，二维线性鉴别分析[3](2DLDA)也被很快提了出来。2DLDA 直接处理图像矩阵而不必将其转化成向量形式，在一定程度上克服了 LDA 的小样本问题，既保留了图像的自身结构信息，也减少了计算量。

但 2DLDA 是线性子空间方法，不能获取数据中的非线性信息，而这些非线性信息往往有利于图像识别。将目前人们常用的非线性技巧 —— 核方法[4,5]引入其中，可得基于核方法的 2 维鉴别分析，简称 2 维核鉴别分析(2DKDA)，它能获取数据中的非线性信息。但由核方法的构造可知，对于 N 幅像素为 $m\times n$ 的样本图像来说，2DKDA 需对 nN 阶矩阵作广义特征值分解，计算复杂度是 $O(n^3N^3)$，当 nN 较大时，很难实现。为解决 2DKDA 的计算问题，文献[6]提出了一种非线性矩阵映射，能将样本图像映射成 $N\times n$ 矩阵，称之为核样本矩阵，然后对核样本矩阵实施 2DLDA。这是一种新的 2 维核鉴别分析，称为框架 2DKDA(Frame 2DKDA, F2DKDA)，因为该文作者认为此方法构成 2 维非线性鉴别分析的框架。由于广义特征值分解所涉及的矩阵都是 N 阶的，F2DKDA 的计算复杂度是

2008-12-08 收到，2009-09-25 改回

$O(N^3)$ 。

研究发现，2DKDA 实际上也是对样本图像作非线性矩阵变换，不过它得到的核样本矩阵是 $nN\times n$ 阶的。还发现，F2DKDA 的核样本矩阵实际上是 2DKDA 的核样本矩阵的不完全抽样重组[7]。受此启发，本文将 2DKDA 与图像抽样重组[7]结合起来，提出了 3 种基于图像抽样重组的 2 维核鉴别分析 (Sampling and Regrouping 2DKDA, SR2DKDA)，它们都能克服 2DKDA 在计算上的不足，也能在一定程度上改善 2DLDA 的识别性能。

2　相关工作

设有 N 幅 $m\times n$ 像素的训练样本图像 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_N$，分属 c 个类别，第 i 类样本图像的下标集为 $\mathcal{C}_i$， $\mathcal{C}_i$ 中有 N_i 个元素， $i=1,2,\cdots,c$， $N_1+N_2+\cdots+N_c=N$ 。

2.1 2DLDA

定义训练样本图像的类间离散度量矩阵 $\boldsymbol{S}_b$ 与类内离散度量矩阵 $\boldsymbol{S}_w$ 为

$$\boldsymbol{S}_b=\sum_{i=1}^{c}n_i(\bar{\boldsymbol{A}}_i-\bar{\boldsymbol{A}})(\bar{\boldsymbol{A}}_i-\bar{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{S}_w=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j\in\mathcal{C}_i}(\boldsymbol{A}_j-\bar{\boldsymbol{A}}_i)(\boldsymbol{A}_j-\bar{\boldsymbol{A}}_i)^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{A}}_i,\bar{\boldsymbol{A}}$ 分别为第 i 类的均值和总体均值。

2DLDA 对样本图像作如下线性降维变换

$$\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{W}$ 是 $m\times d$ 降维变换矩阵，它由如下特征方程的前 d 个最大广义特征值所对应的单位特征向量组成

$$\boldsymbol{S}_b\boldsymbol{w}=\lambda\boldsymbol{S}_w\boldsymbol{w} \tag{4}$$

2.2 F2DKDA

F2DKDA 的基本思想是对样本图像 $\boldsymbol{A}_i$ 作如下的非线性变换

$$\boldsymbol{A}_i^F=\begin{pmatrix}\kappa(\boldsymbol{a}_i^1,\boldsymbol{a}_1^1) & \kappa(\boldsymbol{a}_i^2,\boldsymbol{a}_1^2) & \cdots & \kappa(\boldsymbol{a}_i^n,\boldsymbol{a}_1^n)\\ \kappa(\boldsymbol{a}_i^1,\boldsymbol{a}_2^1) & \kappa(\boldsymbol{a}_i^2,\boldsymbol{a}_2^2) & \cdots & \kappa(\boldsymbol{a}_i^n,\boldsymbol{a}_2^n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \kappa(\boldsymbol{a}_i^1,\boldsymbol{a}_N^1) & \kappa(\boldsymbol{a}_i^2,\boldsymbol{a}_N^2) & \cdots & \kappa(\boldsymbol{a}_i^n,\boldsymbol{a}_N^n)\end{pmatrix},\quad i=1,2,\cdots,N \tag{5}$$

然后以 $\boldsymbol{A}_i^F$ ($i=1,2,\cdots,N$)为样本实施 2DLDA，其中 $\boldsymbol{a}_i^j$ 是 $\boldsymbol{A}_i$ 的第 j 列，$\kappa(\cdot,\cdot)$ 是核函数，称 $\boldsymbol{A}_i^F$ 为 F2DKDA 的核样本矩阵。由于 $\boldsymbol{A}_i^F$ 是 $N\times n$ 矩阵，代入式(1)与式(2)得到的类间与类内离散度量矩阵都是 N 阶的，相对于 2DKDA 来说，计算量大为减小。文献[6]给出 F2DKDA 时更多的是一种直观想法，未能从理论上揭示它的本质。

2.3 图像的抽样重组与 SR2DLDA

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 像素的图像，对它的行进行间隔为 s 的下抽样，对它的列进行间隔为 t 的下抽样，简称为 $s\times t$ 下抽样 (此处假定 m 能被 s 整除，n 能被 t 整除)。抽样结果是一个$(m/s)\times(n/t)$像素的小图像，小图像一般随抽样起点的不同而不同。在 $\boldsymbol{A}$ 的左上角取一个大小为 $s\times t$ 的小块，并依次以小块内的每一点为抽样起点进行抽样，则共可得 $\tilde{n}=st$ 个不同的小图像。将每个小图像拉直成 $\widetilde{m}=(m/s)\times(n/t)$维向量，再把它们重组成一个 $\widetilde{m}\times\tilde{n}$ 矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$，称 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 为图像 $\boldsymbol{A}$ 的 $s\times t$ 抽样重组矩阵，简称 SR 矩阵。

对每个样本图像 $\boldsymbol{A}_i$ 进行 $s\times t$ 下抽样，相应的 SR 矩阵记为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$， 以 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$ ($i=1,2,\cdots,N$)为样本实施 2DLDA，可得到基于图像抽样重组的 2DLDA (SR2DLDA)[7]。由于 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$ 的各个列的独立性和分布同一性往往要好于原图像 $\boldsymbol{A}_i$ [7]，因此 SR2DLDA 的识别性能一般都优于 2DLDA。

不难看出，SR2DLDA 随 s 和 t 的变化而变化。当 $s=t=1$ 时，它是 LDA；当 $s=1,t=n$ 时，它是基于列的 2DLDA；当 $s=m,t=1$ 时，它是基于行的 2DLDA。

3　F2DKDA 的本质

本小节将通过对 2DKDA 与 F2DKDA 的分析，揭示 F2DKDA 的本质。

3.1 2DKDA

2DLDA 被认为是将样本图像的每一列(以列为例，对行也成立)看成样本向量的 LDA，因此 2DKDA 是将样本图像每一列通过非线性核变换 $\varPhi$ 映射到特征空间 $\mathcal{F}$ 中，然后在此特征空间中实施 2DLDA。

将 $\boldsymbol{A}_i$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}_i=(\boldsymbol{a}_i^1,\boldsymbol{a}_i^2,\cdots,\boldsymbol{a}_i^n)$，将其每一列由非线性变换 $\varPhi$ 映射到核空间 $\mathcal{F}$ 中，则特征空间中的样本图像为

$$\varPhi(\boldsymbol{A}_i)=(\varPhi(\boldsymbol{a}_i^1),\varPhi(\boldsymbol{a}_i^2),\cdots,\varPhi(\boldsymbol{a}_i^n)),\ i=1,2,\cdots,N \tag{6}$$

相应地，特征空间中样本图像的类间协方差阵 $\boldsymbol{S}_b^{\varPhi}$ 与类内协方差阵 $\boldsymbol{S}_w^{\varPhi}$ 分别定义为

$$\boldsymbol{S}_b^{\varPhi}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{c}n_i(\bar{\varPhi}_i-\bar{\varPhi})(\bar{\varPhi}_i-\bar{\varPhi})^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{S}_w^{\varPhi}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j\in\mathcal{C}_i}(\varPhi(\boldsymbol{A}_j)-\bar{\varPhi}_i)(\varPhi(\boldsymbol{A}_j)-\bar{\varPhi}_i)^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

其中 $\bar{\varPhi}=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j\in\mathcal{C}_i}\varPhi(\boldsymbol{A}_j)$， $\bar{\varPhi}_i=\dfrac{1}{N}\sum_{j\in\mathcal{C}_i}\varPhi(\boldsymbol{A}_j)$ 。

令 $\varPhi(\boldsymbol{A})=(\varPhi(\boldsymbol{A}_1),\varPhi(\boldsymbol{A}_2),\cdots,\varPhi(\boldsymbol{A}_N))$， 类似于核鉴别分析(KDA)的做法[5]，2DKDA 的降维变换矩阵

$\boldsymbol{W}$ 可写为

$$\boldsymbol{W}=\Phi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q} \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是 $nN\times d$ 矩阵。将式(9)代入式(7)和式(8)，可得矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的各个列是特征方程

$$\boldsymbol{S}_b^K\boldsymbol{q}=\lambda\boldsymbol{S}_w^K\boldsymbol{q} \tag{10}$$

的前 d 个最大广义特征值所对应的特征向量，式中的 $\boldsymbol{S}_b^K,\boldsymbol{S}_w^K$ 分别为

$$\boldsymbol{S}_b^K=\Phi(\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_b^{\Phi}\Phi(\boldsymbol{A})=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{c}(\bar{\boldsymbol{A}}_i^K-\bar{\boldsymbol{A}}^K)(\bar{\boldsymbol{A}}_i^K-\bar{\boldsymbol{A}}^K)^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_w^K&=\Phi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{S}_w^{\Phi}\Phi(\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\\&==\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j\in\mathcal{C}_i}(\boldsymbol{A}_j^K-\bar{\boldsymbol{A}}_i^K)(\boldsymbol{A}_j^K-\bar{\boldsymbol{A}}_i^K)^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{A}_i^K=\Phi(\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\Phi(\boldsymbol{A}_i)$，$\bar{\boldsymbol{A}}^K=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j\in\mathcal{C}_i}\boldsymbol{A}_j^K$，$\bar{\boldsymbol{A}}_i^K=\frac{1}{N}\sum_{j\in\mathcal{C}_i}\boldsymbol{A}_j^K$。

显然，$\boldsymbol{S}_b^K,\boldsymbol{S}_w^K$ 是将矩阵 $\boldsymbol{A}_i^K$ ($i=1,2,\cdots,N$)作为样本而得到的类间与类内离散度量矩阵，因此 2DKDA 的实质是将图像样本 $\boldsymbol{A}_i$ 非线性地变换为 $\boldsymbol{A}_i^K$，然后对 $\boldsymbol{A}_i^K$ ($i=1,2,\cdots,N$)实施 2DLDA。借鉴文献[6]说法，称 $\boldsymbol{A}_i^K$ 为核样本矩阵，分别称 $\boldsymbol{S}_b^K,\boldsymbol{S}_w^K$ 为核类间度量矩阵和核类内度量矩阵，它们都是 nN 阶方阵。由式(3)与式(9)知，2DKDA 的降维变换可写为

$$\boldsymbol{B}_i^K=\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\Phi(\boldsymbol{A}_i)=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i^K \tag{13}$$

3.2 F2DKDA 的本质

2DKDA 的核样本矩阵 $\boldsymbol{A}_i^K$ 可写为

$$\boldsymbol{A}_i^K=\Phi(\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\Phi(\boldsymbol{A}_i)=\begin{pmatrix}\Phi(\boldsymbol{A}_1)^{\mathrm{T}}\Phi(\boldsymbol{A}_i)\\\Phi(\boldsymbol{A}_2)^{\mathrm{T}}\Phi(\boldsymbol{A}_i)\\\vdots\\\Phi(\boldsymbol{A}_N)^{\mathrm{T}}\Phi(\boldsymbol{A}_i)\end{pmatrix} \tag{14}$$

这实际上是将 $\boldsymbol{A}_i^K$ 分成 N 个子块，第 s 个子块($s=1,2,\cdots,N$)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{is}^K&=\Phi(\boldsymbol{A}_s)^{\mathrm{T}}\Phi(\boldsymbol{A}_i)\\&=\begin{pmatrix}\kappa(\boldsymbol{a}_s^1,\boldsymbol{a}_i^1)&\kappa(\boldsymbol{a}_s^1,\boldsymbol{a}_i^2)&\cdots&\kappa(\boldsymbol{a}_s^1,\boldsymbol{a}_i^n)\\\kappa(\boldsymbol{a}_s^2,\boldsymbol{a}_i^1)&\kappa(\boldsymbol{a}_s^2,\boldsymbol{a}_i^2)&\cdots&\kappa(\boldsymbol{a}_s^2,\boldsymbol{a}_i^n)\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\kappa(\boldsymbol{a}_s^n,\boldsymbol{a}_i^1)&\kappa(\boldsymbol{a}_s^n,\boldsymbol{a}_i^2)&\cdots&\kappa(\boldsymbol{a}_s^n,\boldsymbol{a}_i^n)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{15}$$

对照式(5)不难发现，$\boldsymbol{A}_i^F$ 的第 s 行是由 $\boldsymbol{A}_{is}^K$ 的对角元构成的。

因此，F2DKDA 的核样本矩阵 $\boldsymbol{A}_i^F$ 实质上是 2DKDA 的核样本矩阵 $\boldsymbol{A}_i^K$ 的以 $\boldsymbol{A}_{i1}^K$ 的对角元为起点的 $n\times n$ 抽样重组矩阵，这就是 F2DKDA 的本质。

4 SR2DKDA

由 F2DKDA 的本质得到的启示是可将矩阵的抽样重组与 2DKDA 结合起来。通过二者的结合，可得到 3 种基于图像抽样重组的 2 维核鉴别分析(SR2DKDA)，分别称为 SR2DKDA-I，SR2DKDA-II，SR2DKDA-III，它们不仅能与 2DKDA 一样获取图像空间的非线性信息，从而改善 2DLDA 的识别性能，也能减小 2DKDA 的计算量。

4.1 SR2DKDA-I

2DKDA 在计算上的困难主要是因为其协方差阵的阶数相比于 KDA 来说增加了 n 倍(n 是图像矩阵的列数)，若能减小 n 也就减小了计算量。在 SR2DLDA 中，样本图像的 SR 矩阵的列数 $\tilde{n}(=st)$ 取决于抽样间隔 s 与 t 的大小，只要 s 与 t 取得小，每个样本图像 $\boldsymbol{A}_i$ 对应的 SR 矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$ 就有很小的列数。因此，当 s 与 t 很小时，可直接将核方法嵌入到 SR2DLDA 中，这就是 SR2DKDA-I 算法。

将样本图像 $\boldsymbol{A}_i$ 对应的 SR 矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$ 按列分块为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i=(\tilde{\boldsymbol{a}}_i^1,\tilde{\boldsymbol{a}}_i^2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{a}}_i^{\tilde{n}})$，经 Φ 映射到特征空间中的 SR 矩阵为 $\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_i)=(\Phi(\tilde{\boldsymbol{a}}_i^1),\Phi(\tilde{\boldsymbol{a}}_i^2),\cdots,\Phi(\tilde{\boldsymbol{a}}_i^{\tilde{n}}))$，则 SR2DKDA-I 的核样本矩阵为

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_i^K=\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_i)=\begin{pmatrix}\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_1)^{\mathrm{T}}\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_i)\\\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_2)^{\mathrm{T}}\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_i)\\\vdots\\\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_N)^{\mathrm{T}}\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_i)\end{pmatrix},\quad i=1,2,\cdots,N \tag{16}$$

其中 $\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}})=(\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_1),\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_2),\cdots,\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_N))$。核样本矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i^K$ 为 $\tilde{n}N\times\tilde{n}$ 矩阵，将其代入式(11)与式(12)得到的核类间与类内度量矩阵都是 $\tilde{n}N$ 阶方阵，当 $\tilde{n}$ 很小时，SR2DKDA-I 的计算量将大为减小。

类似于 SR2DLDA，当 $s=t=1$ 时，SR2DKDA-I 就是 KDA；当 $s=1,t=n$ 时，它是基于列的 2DKDA；当 $s=m,t=1$ 时，它是基于行的 2DKDA。

4.2 SR2DKDA-II

当 s 与 t 较大时，SR2DKDA-I 在计算上仍存在困难，这时可将 F2DKDA 的做法应用到 SR2DKDA-I 上。式(16)已将 SR2DKDA-I 的核样本矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i^K$ 分成 N 个子块，每个子块都是 $\tilde{n}$ 阶方阵。依次取每个子块的对角元组成式(17)的矩阵

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_i^F=\begin{pmatrix}\mathrm{Diag}\left\{\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_1)^{\mathrm{T}}\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_i)\right\}\\\mathrm{Diag}\left\{\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_2)^{\mathrm{T}}\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_i)\right\}\\\vdots\\\mathrm{Diag}\left\{\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_N)^{\mathrm{T}}\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_i)\right\}\end{pmatrix} \tag{17}$$

其中 $\mathrm{Diag}(\boldsymbol{A})$ 表示以方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角元为元素的行向量。以 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i^F\,(i=1,2,\cdots,N)$ 为核样本矩阵实施 2DKDA，就是 SR2DKDA-II 算法。类似于 F2DKDA，SR2DKDA-II 的核样本矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i^F$ 实质上是以 SR2DKDA-I 的核样本矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i^K$ 的第 1 个子块的对角元为起点的 $\tilde{n}\times\tilde{n}$ 抽样重组矩阵。

不难看出，SR2DKDA-II 的核样本矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i^F$ 是 $N\times\tilde{n}$ 阶的，将其代入式(11)与式(12)得到的核类间与类内度量矩阵都是 N 阶方阵，大小与 SR 矩阵的列数无关。

4.3 SR2DKDA-III

SR2DKDA-II 核样本矩阵仅是 SR2DKDA-I 核样本矩阵的以对角元为起点的抽样重组矩阵，这是一种不完全的抽样重组，必有识别信息丢失，从而影响 SR2DKDA-II 的识别性能。

为克服 SR2DKDA-II 的不足，可对 SR2DKDA-I 核样本矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i^K$ 进行完全抽样，即以 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i^K$ 的第 1 个子块的所有点为起点进行 $\tilde{n}\times\tilde{n}$ 下抽样并重组成矩阵。以此矩阵作为核样本矩阵实施 2DKDA，就是 SR2DKDA-III 算法。SR2DKDA-III 的核样本矩阵为

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_i^C=\begin{pmatrix}\mathrm{Vec}\left\{\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_1)^{\mathrm{T}}\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_i)\right\}^{\mathrm{T}}\\ \mathrm{Vec}\left\{\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_2)^{\mathrm{T}}\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_i)\right\}^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \mathrm{Vec}\left\{\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_N)^{\mathrm{T}}\Phi(\widetilde{\boldsymbol{A}}_i)\right\}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},\ i=1,2,\cdots,N \tag{18}$$

其中 $\mathrm{Vec}(\bullet)$ 表示矩阵的列拉直运算。

SR2DKDA-III 的核样本矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i^C$ 是 $N\times\tilde{n}^2$ 阶的，将其代入式(11)与式(12)得到的核类间与类内度量矩阵都是 N 阶方阵，大小与 SR 矩阵的列数也无关。与 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i^F$ 相比，$\widetilde{\boldsymbol{A}}_i^C$ 的列数要大得多，因而 SR2DKDA- III 算法的计算量要大于 SR2DKDA-II 算法；但它们的核度量矩阵都是 N 阶方阵，因而计算量要远小于 SR2DKDA-I 算法。又由于 SR2DKDA-III 是完全抽样重组，并无多少信息损失，因此其识别性能将优于 SR2DKDA-II 算法。

4.4 SR2DKDA＋CPCA

在 SR2DKDA-III 中，$\widetilde{\boldsymbol{B}}_i^C=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{A}}_i^C\,(i=1,2,\cdots,N)$ 就是所要提取的识别特征，它是 $d\times\tilde{n}^2$ 矩阵，当 $d,\tilde{n}$ 较大时，识别过程中的计算量会很大。为减少计算量，可对识别特征进行完全 PCA (Complete PCA, CPCA)降维[8]。

将识别特征 $\widetilde{\boldsymbol{B}}_i^C\,(i=1,2,\cdots,N)$ 拉直成 $d\tilde{n}^2$ 维向量，记为 $\tilde{\boldsymbol{b}}_i^C$，则其总体协方差阵为

$$\widetilde{\boldsymbol{S}}_t^b=\sum_{i=1}^{N}(\tilde{\boldsymbol{b}}_i^C-\bar{\tilde{\boldsymbol{b}}}^C)(\tilde{\boldsymbol{b}}_i^C-\bar{\tilde{\boldsymbol{b}}}^C)^{\mathrm{T}} \tag{19}$$

其中 $\bar{\tilde{\boldsymbol{b}}}^C$ 为总体均值。所谓 CPCA 降维，是指由总体协方差阵 $\widetilde{\boldsymbol{S}}_t^b$ 的所有非零特征值对应的单位特征向量来组成降维变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，对 $\tilde{\boldsymbol{b}}_i^C$ 作变换

$$\boldsymbol{y}_i^C=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{b}}_i^C,\ \ i=1,2,\cdots,N \tag{20}$$

则 $\boldsymbol{y}_i^C$ 就是原始图像 $\boldsymbol{A}_i$ 经 SR2DKDA-III＋CPCA 后的识别特征。CPCA 是无监督的降维方法，且是以 $\widetilde{\boldsymbol{S}}_t^b$ 的所有非零特征值对应的特征向量来组成降维变换矩阵，因此 SR2DKDA-III＋CPCA 的识别效果一般与 SR2DKDA-III 相同。

实际上，CPCA 降维对 SR2DLDA、SR2DKDA-I 和 SR2DKDA-II 也适用。为方便计，如无特别说明，以下提到 SR2DLDA 和 SR2DKDA 均指 SR2DLDA＋CPCA 和 SR2DKDA＋CPCA。

5　实验

为验证 SR2DKDA 算法的有效性，将分别在 ORL 人脸库和 UMIST 人脸库上进行实验。核函数采用高斯函数 $\kappa(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\exp(-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2/\sigma)$，其中 σ 是核参数。分类器采用最近邻，以余弦距离作为距离度量。

5.1 ORL 人脸库

ORL 人脸库(http://www.uk.research.att. com /facedatabase.html) 含有 40 个人的 400 幅图像，每人 10 幅不同的图像，有光照条件、脸部表情、脸部饰物(如眼镜、胡须等)以及脸部轻微左右运动等的变化，图像都为 112×92 像素。

实验时，每人随机取 5 幅共 200 幅图像作为训练集，余下 200 幅图像作为测试集。做 10 轮实验，取 10 轮结果的平均作为最后的结果。投影轴个数(即降维变换矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的列数)皆取为 c−1，表 1 给出了实验结果。核参数 $\sigma=\mathrm{mean}\{\mathrm{Diag}(\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{A}})\}$，其中 $\mathrm{mean}\{\}$ 表示向量均值，$\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\widetilde{\boldsymbol{A}}_1,\widetilde{\boldsymbol{A}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{A}}_N)$，$\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$ 是样本图像 $\boldsymbol{A}_i$ 的 SR 矩阵。

5.2 UMIST 人脸库

UMIST 人脸库 (http://images.ee.umist.ac. uk /anny/database.html)含有 20 个人的 577 幅图像，每人有 20～48 幅图像不等。从该网站中可得到修剪过的图像，分辨率为 112×92。每个人的脸像都有一系列从侧面到正面的姿态变化，个体间也有种族、性别及外观的变化。

采用外插式实验策略，取每人的前 10 幅共 200 幅图像作为训练集，余下的 377 幅图像作为测试集。为方便下采样，将每幅图像的左右两列修剪掉，使图像的分辨率为 112×90。表 2 给出了识别结果，核参数 $\sigma=\max\{\mathrm{Diag}(\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{A}})\}$。

表 1 ORL 人脸库上的识别率(%)

$s\times t$	1×1	2×2	4×4	8×4	14×4	1×92	112×1
SR2DLDA	96.25	96.90	96.65	97.25	97.40	95.40	95.05
SR2DKDA-I	96.90	97.20	96.95	—	—	—	—
SR2DKDA-II	96.90	96.85	96.85	96.85	96.95	95.80	96.70
SR2DKDA-III	96.90	97.30	**97.55**	97.25	97.05	93.80	96.20

表 2 UMIST 人脸库上的识别率(%)

$s\times t$	1×1	2×2	4×6	8×6	14×6	1×90	112×1
SR2DLDA	70.56	72.41	77.72	74.80	68.97	53.58	48.54
SR2DKDA-I	71.09	70.82	—	—	—	—	—
SR2DKDA-II	71.09	73.47	74.01	69.50	73.21	62.07	71.09
SR2DKDA-III	71.09	71.62	**78.25**	74.80	72.41	55.44	75.33

5.3 实验结果分析

从表 1 和表 2 的实验结果可以看出：当 s 与 t 很小时，3 种 SR2DKDA 都可实施；当 s 与 t 较大时，SR2DKDA-I 虽然无法实施，但 SR2DKDA-II 与 SR2DKDA-III 仍可实施，这体现了 SR2DKDA 算法在计算上的可行性。虽然 SR2DKDA-II 算法有识别信息的损失，但其识别率仍高于 2DLDA 和 LDA，这体现了 SR2DKDA-II 算法的有效性。两个人脸库上的最高的识别率都出现在 SR2DKDA-III 算法中，这与之前对 SR2DKDA-III 算法的分析是一致的。

为比较 3 种 SR2DKDA 算法的计算量大小，表 3 给出了各种算法在 ORL 人脸库上当 $s=t=4$ 时的运行时间，实验用 matlab 编程，运行时间是 10 轮实验的总时间。结果表明，SR2DKDA-I 算法需要的计算时间远大于其它算法，而 SR2DKDA-III 算法需要的计算时间比 SR2DKDA-II 算法略大一些。

表 3 ORL 人脸库上的运行时间(s)

算法	SR2DLDA	SR2DKDA-I	SR2DKDA-II	SR2DKDA-III
4×4	55.3	3608.9	250.4	278.2

6 总结

本文针对 2DKDA 在计算上的困难，将图像抽样重组的思想与 2DKDA 结合起来，提出了 3 种 SR2DKDA 算法，它们在计算量上都明显小于 2DKDA。不仅如此，它们的识别性能都优于线性算法 LDA 与 2DLDA。在 ORL 和 UNIST 人脸库上的实验验证了这一点。

参考文献

[1] Fisher R A. The use of multiple measurements in taxonomic problems. *Annual Eugenics*, 1936, 7: 179–188.

[2] Yang J, Zhang D, Frangi A F, and Yang J. Two-dimensional PCA : A new approach to appearance-based face representation and recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004, 26(1): 131–137.

[3] Kongsontana S and Rangsanseri Y. Face recognition using 2DLDA algorithm. Proceedings of the Eighth International Symposium on Signal Processing and Its Applications, Perth, Australia, 2005, 2: 675–678.

[4] Zhao Li-hong, Zhang Xi-li, and Xu Xin-he. Face recognition base on KPCA with polynomial kernels. International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition, Beijin, China, 2007, 3: 1213–1216.

[5] Mika S, Rätsch G, Weston J, Schölkopf B, and Müller K R. Fisher discriminant analysis with kernels. Proc. IEEE Int'l Workshop Neural Networks for Signal Processing IX, Madison, WI, USA, 1999: 41–48.

[6] 刘永俊, 宋东兴, 何世明, 陈才扣. 二维非线性鉴别分析及人脸识别. 常熟理工学院学报(自然科学), 2008, 22(2): 99–103.

[7] 程正东, 章毓晋, 樊祥. 基于图像抽样重组的二维线性鉴别分析. 中国图象图形学报. (待发表)

[8] Yang Jian and Yang Jing-yu. Why can LDA be performed in PCA transformed space? *Pattern Recognition*, 2003, 36: 563–566.

程正东： 男，1972 年生，博士，研究方向为信号与信息处理、图像处理.

樊　祥： 男，1963 年生，教授，博士生导师，研究方向为光电对抗、红外信息处理.

章毓晋： 男，1954 年生，教授，博士生导师，研究方向为图像工程.