

## 基于自适应分数阶傅里叶变换的线性调频信号检测及参数估计

曲 强<sup>①②</sup> 金明录<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(大连理工大学电子与信息工程学院 大连 116024)

<sup>②</sup>(辽宁科技大学电子与信息工程学院 鞍山 114051)

**摘 要:** 该文提出了一种基于最小均方算法的自适应计算分数阶傅里叶变换的方法并将该方法应用到多分量 chirp 信号的检测与估计之中。该方法通过对连续型分数阶傅里叶反变换进行离散化采样,得到适合数值计算的离散形式,进而通过适当的选择输入向量和目标函数构造自适应滤波器,经过最小均方算法进行训练后所得的滤波器权系数即为分数阶傅里叶变换的结果。仿真实验表明,该方法可以用来计算分数阶傅里叶变换及对 chirp 信号进行检测和参数估计,且计算延时相对较小。

**关键词:** 分数阶傅里叶变换; 自适应滤波; Chirp 信号; 参数估计

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)12-2937-04

## Adaptive Fractional Fourier Transform Based Chirp Signal Detection and Parameter Estimation

Qu Qiang<sup>①②</sup> Jin Ming-lu<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(School of Electronic and Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

<sup>②</sup>(School of Electronic and Information Engineering, University of Science and Technology Liaoning, Anshan 114051, China)

**Abstract:** An adaptive method of fractional Fourier transform based on Least Mean Square (LMS) algorithm is proposed and is used to detect and estimate parameters of multicomponent chirp signals. Through the discrete sampling of continuous inverse fractional Fourier transform, a discrete form for numerical calculation is obtained, and then an adaptive filter is constructed with the appropriate choices of the input vector and the desired sequence. The weight vector of the adaptive filter is trained according to LMS algorithm, and the stable weight vector is just the result of fractional Fourier transform. The simulation results show that the proposed algorithm can be used to calculate fractional Fourier transform and to detect and estimate parameters of chirp signals and the delay of calculation is relatively small.

**Key words:** Fractional Fourier transform; Adaptive filter; Chirp signal; Parameter estimation

### 1 引言

线性调频(chirp)信号是一种特殊的非平稳信号,广泛应用于通信、雷达、声纳和地震勘探等系统中, chirp 信号的检测和参数估计是一个重要的研究课题。目前,基于时频分析类处理方法的 chirp 信号参数估计大致可分为 Radon-Wigner 变换法(RWT), Radon-Ambiguity 变换法(RAT)和分数阶傅里叶变换法(FRFT)。而由于 FRFT 从根本上克服了其它两种方法的交叉项干扰问题,因此在近些年引起了越来越多的关注<sup>[1-4]</sup>。

为了利用 FRFT 对 chirp 信号进行检测和参数估计就必须计算 FRFT 的数值解,即离散分数阶傅里叶变换(DFRFT)。为此,近些年已经提出了一些

计算 DFRFT 的有效算法。如 Ozaktas 等人提出的分解型算法,其利用快速傅里叶变换(FFT)来计算 DFRFT,计算复杂度为  $O(N \cdot \lg N)$ <sup>[5]</sup>; 贝苏章等人提出,通过求解 DFT 矩阵的 Hermite 特征向量构造 DFRFT 核矩阵的方法,计算复杂度为  $O(N^2)$ <sup>[6]</sup>; 为了计算分数阶域上某段局部谱的细节,或者仅计算分数阶谱上的一个或几个单采样点值,赵兴浩提出了 DFRFT 的高分辨计算和 DFRFT 的单点计算两种灵活快速算法<sup>[7]</sup>。

但是上述算法均需要在收集完全部输入数据的情况下才能进行 DFRFT 计算,因此存在一定的处理延迟,这在雷达等高速信号处理领域往往不能满足要求。针对这种情况,本文提出一种自适应计算 DFRFT 的方法,该方法在接收到信号的同时采用自适应算法计算该信号的 DFRFT,然后利用 DFRFT 的结果进行 chirp 信号检测和参数估计。具

体地讲：自适应算法首先利用被离散化的连续型分数阶傅里叶反变换，构造自适应滤波器，并采用最小均方算法对滤波器系数进行自适应更新，最终所得的滤波器权向量即为 DFRFT 的结果，最后通过仿真实验验证了该方法的有效性。

## 2 基于 DFRFT 的 chirp 信号检测与参数估计原理

如果将信号的傅里叶变换看作是将信号沿逆时针方向旋转  $\pi/2$  由  $t$  轴变为  $\omega$  轴的表示，则 FRFT 可以看作将信号沿逆时针旋转  $\alpha$  角后的表示，其定义为

$$X_\alpha(u) = F^p[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)K_p(t,u)dt \quad (1)$$

式中的核函数为

$$K_p(t,u) = \begin{cases} A_\alpha \cdot \exp[j\pi(t^2 + u^2) \cot \alpha - j2\pi ut \csc \alpha], & \alpha \neq n\pi \\ \delta(t-u), & \alpha = 2n\pi \\ \delta(t+u), & \alpha = (2n \pm 1)\pi \end{cases} \quad (2)$$

其中  $A_\alpha = \sqrt{1 - j \cot \alpha}$ ， $p$  为 FRFT 的阶数； $\alpha$  为旋转角度； $\alpha = \pi p / 2$ 。

假定 chirp 信号  $x(t)$  被以采样频率为  $f_s$  进行采样，所得的离散形式为

$$x(n) = a_0 \exp(j2\pi f_0 n / f_s + j\pi f_m n^2 / f_s^2) \quad (3)$$

式中  $-(N-1)/2 \leq n \leq (N-1)/2$ ， $a_0$ ， $f_0$  和  $f_m$  分别为 chirp 信号的幅值、初始频率和调频率， $N$  为采样点数，根据分解型计算 DFRFT 的算法， $x(n)$  的 DFRFT 可以表示为

$$X_\alpha(m) = A_\alpha N^{-1/2} \cdot \exp[j\pi m^2 \cot \alpha / N] \cdot \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \exp[-j2\pi mn \csc \alpha / N + j\pi n^2 \cot \alpha / N] x(n) \quad (4)$$

将式(3)代入式(4)可得

$$X_\alpha(m) = A_\alpha N^{-1/2} \cdot a_0 \cdot \exp[j\pi m^2 \cot \alpha / N] \cdot \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \exp[j2\pi n(f_0 / f_s - m \csc \alpha / N) + j\pi n^2(f_m / f_s^2 + \cot \alpha / N)] \quad (5)$$

容易证明<sup>[3]</sup>，当  $\alpha$  和  $m$  满足式(6)和式(7)时，chirp 信号的 DFRFT 将出现峰值

$$\alpha = \alpha_0 = -\arccot \cot(f_m N / f_s^2) \quad (6)$$

$$m = m_0 = f_0 N \sin \alpha_0 / f_s \quad (7)$$

此时，峰值大小为

$$X_{\alpha_0}(m_0) = \sqrt{N} A_{\alpha_0} a_0 \exp(j\pi m_0^2 \cot \alpha_0 / N) \quad (8)$$

于是，可以根据 DFRFT 出现峰值的个数来判断待检测信号中 chirp 信号的个数，对式(6)–式(8)进行整理可得，chirp 信号参数与 DFRFT 间的关系如式(9)–式(11)所示

$$f_0 = m_0 \csc \alpha_0 f_s / N \quad (9)$$

$$f_m = -\cot \alpha_0 f_s^2 / N \quad (10)$$

$$a_0 = \frac{|X_{\alpha_0}(m_0)|}{|A_{\alpha_0}| \sqrt{N}} \quad (11)$$

由此可知：只要根据信号的 DFRFT 的峰值及峰值坐标再利用式(9)–式(11)即可实现对 chirp 信号的参数估计。

## 3 DFRFT 的自适应计算

为了实现上述的估计需要计算信号的 DFRFT，如何高效的计算 DFRFT 直接影响到估计性能，现存的计算 DFRFT 的算法均是在收集完信号的所有输入情况下进行的，而本文将采用一种不同于现有文献的计算方法求解信号的 DFRFT，即在对输入信号采样的同时自适应的计算 DFRFT。

### 3.1 DFRFT 自适应计算原理

根据 DFRFT 核函数的旋转相加性，由式(4)很容易得到其反变换为

$$x(n) = A_\alpha N^{-1/2} \cdot \exp[-j\pi n^2 \cot \alpha / N] \cdot \sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \exp[j2\pi mn \csc \alpha / N - j\pi m^2 \cot \alpha / N] X_\alpha(m) \quad (12)$$

进而，式(12)可以表示为

$$d(n) = \sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} X_\alpha(m) u(m,n) \quad (13)$$

其中

$$u(m,n) = \exp[j2\pi mn \csc \alpha / N - j\pi m^2 \cot \alpha / N] \quad (14)$$

$$d(n) = \frac{x(n)}{A_\alpha N^{-1/2} \cdot \exp[-j\pi n^2 \cot \alpha / N]} \quad (15)$$

根据自适应滤波器理论<sup>[8]</sup>，取输入向量为  $\mathbf{u}(n) = [u(-(N-1)/2, n), u(-(N-1)/2+1, n), \dots, u((N-1)/2, n)]^T$ ，滤波器权系数为  $\mathbf{w}(n) = [w_{-(N-1)/2}(n), w_{-(N-1)/2+1}(n), \dots, w_{(N-1)/2}(n)]^H$ ，目标信号为  $d(n)$ ，构造自适应滤波器，进而可以得到滤波器的输出和误差信号分别如式(16)和式(17)所示。

$$y(n) = \mathbf{w}^H(n-1)\mathbf{u}(n) \quad (16)$$

$$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \mathbf{w}^H(n-1)\mathbf{u}(n) \quad (17)$$

构造代价函数

$$J(n) = E[|e(n)|^2] = E[|d(n) - \mathbf{w}^H(n-1)\mathbf{u}(n)|^2] \quad (18)$$

可以采用 LMS 算法最小化上面的代价函数，于是可

得 LMS 算法的更新公式为

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mu \mathbf{u}(n) e^*(n) \quad (19)$$

其中  $\mu$  为学习速率。当上述算法收敛时, 所得的滤波器权系数即为所求的 DFRFT 结果。

### 3.2 自适应算法收敛条件

由式(14)可知, 本文自适应算法的输入信号为确定性信号, 且输入信号为能量有界信号, 即

$$\sup_n (\mathbf{u}(n)^H \mathbf{u}(n)) = \sup_n \left( \sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} |u(m, n)|^2 \right) = N = B \quad (20)$$

由文献[9]的引理 1 可知: 当  $\mu < 2/B$  时, 自适应滤波器输出的均方误差与迭代次数成反比, 即

$$E[e_n^2] = O(1/n) \quad (21)$$

于是存在

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[e_n^2] = 0 \quad (22)$$

由此可以得到本文算法收敛条件为

$$\mu < 2/N \quad (23)$$

### 3.3 提高运算效率的措施

在实际应用时, 可采取如下措施简化计算。由式(14)可知, 滤波器的输入  $u(m, n)$  随着  $m$  和  $n$  的变化可组成一个  $N \times N$  维的常数矩阵, 可预先计算出来存于常数表中, 在计算中进行调用。同时, 由式(15)可知, 目标信号  $d(n)$  分母的倒数也可组成一个  $N \times 1$  维的常数矢量, 可预先计算出来, 存于常数表中。采取这些措施后, 每次迭代的计算量就可以降低很多。

由于本文算法可以在对信号进行离散化采样的同时进行自适应计算, 因此对于实时性要求较高的场合, 可以采用多个自适应算法并行进行计算, 这样在完成数据采集后就可以获得对 chirp 信号参数的初步估计, 从而提高算法的运行效率。

## 4 仿真实验

为了验证本文算法的性能, 考虑一个 chirp 信号, 其初始频率和调频率分别为:  $f_0=3$  MHz 和  $f_m=1$

MHz/ $\mu$ s, 采样频率为 50 MHz, 样本点数为 300, 信噪比为 5 dB, 学习速率为  $\mu=0.001$ , DFRFT 的阶数分别为  $p=0.5, 1$  和  $1.5$  时, 进行 100 次独立实验, 本文算法计算的 DFRFT 与文献[5]方法计算出的 DFRFT 的均方误差与迭代次数之间的关系如图 1 所示。由图 1 可知: 本文自适应算法的均方误差随着迭代次数的增加而线性减小, 当均方误差达到约 -20dB 时进入稳态, 由此可以看出, 本文算法收敛可以用来计算信号的 DFRFT。

为了验证本文算法在 chirp 信号参数估计方面的性能, 选择的仿真条件同上, DFRFT 阶数的扫描范围由 1.30 开始到 1.68 结束, 每次增加 0.02, 采用 20 个自适应算法并行运算, 对 chirp 信号的幅值  $a_0$ , 调频率  $f_m$  和初始频率  $f_0$  估计的均方误差分别如图 2-图 4 所示(为了清楚地显示仿真结果, 在图 3 和图 4 中仅给出了 100 次迭代结果)。

由图 2 可知: 在学习速率  $\mu=0.005$  时, 本文算法对 chirp 信号幅值  $a_0$  估计的均方误差收敛较慢并存在一个较大的均方误差, 而在学习速率为  $\mu=0.001$  和  $\mu=0.0005$  时, 本文算法收敛较快且均方误差较小, 尤其是当  $\mu=0.0005$  时, 其均方误差达到了 -30 dB, 与文献[5]方法估计结果基本一致。由此可知, 为了得到相对精确的信号幅值估计要适当的减小算法的学习速率, 但随着学习速率的减小相应的收敛速度也会变慢。观察图 3 和图 4 可知: 调频率  $f_m$  和初始频率  $f_0$  估计的均方误差对学习速率的变化不敏感, 自适应算法分别经过 50 步和 60 步迭代后达到稳态, 且估计精度与文献[5]估计精度相同。

为了研究本文算法在多分量 chirp 信号参数估计中的性能, 考虑两个 chirp 信号分量, 第 1 个 chirp 信号分量  $s_1$  的参数为: 幅值 1 mV, 初始频率  $f_1=12$  MHz, 调频率  $f_{m1}=8$  MHz/ $\mu$ s; 第 2 个 chirp 信号  $s_2$  的参数为: 幅值 0.8 mV, 初始频率  $f_2=10$  MHz, 调频率  $f_{m2}=-4$  MHz/ $\mu$ s, 采样频率为  $f_s=100$  MHz, 观测样本点为 400 个, 干扰噪声为加性高斯白噪声, 信噪比为 -3 dB, 学习速率为  $\mu=0.0005$ , 迭代次数为 400, DFRFT 模的幅值如图 5 所示。

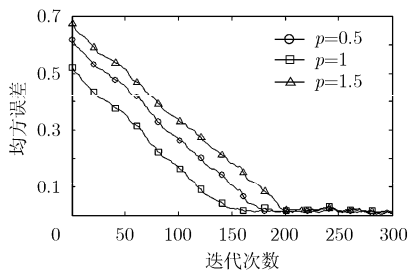


图 1 DFRFT 估计的均方误差

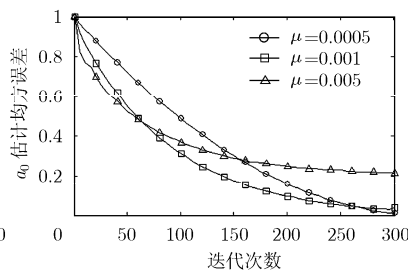


图 2 幅值估计均方误差

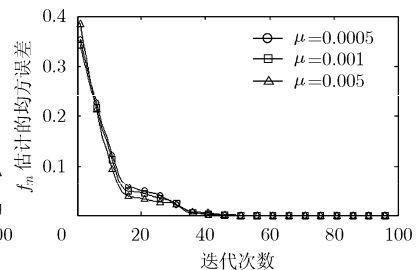


图 3 调频率估计均方误差

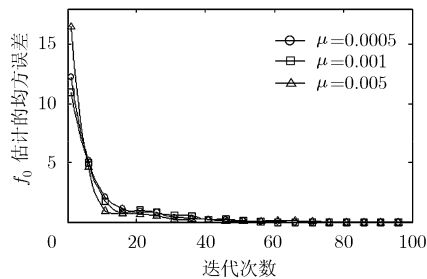


图4 初始频率估计均方误差

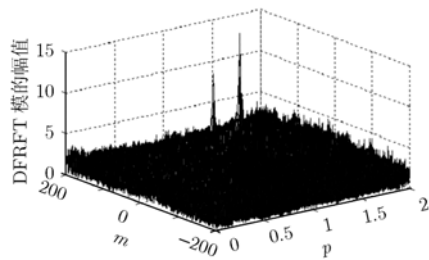


图5 分数阶傅里叶变换结果

由图5可知: DFRFT出现了两个峰值, 这两个峰值分别对应了仿真中的两个chirp信号, 经过搜索, 可以得到两个chirp信号的峰值坐标和峰值分别为:  $p_{01}=1.20$ ,  $m_{01}=46$ ,  $a_{01}=19.20$ ,  $p_{02}=0.90$ ,  $m_{02}=40$ ,  $a_{02}=13.59$ 。将上面的数值代入式(9)-式(11)可得: 两个chirp信号的参数估计为: 信号分量 $s_1$ 的调频率为 $8.10 \text{ MHz}/\mu\text{s}$ , 初始频率为 $12.06 \text{ MHz}$ , 幅值为 $0.93 \text{ mV}$ 。信号分量 $s_2$ 的调频率为 $-3.95 \text{ MHz}/\mu\text{s}$ , 初始频率为 $10.10 \text{ MHz}$ , 幅值为 $0.67 \text{ mV}$ 。为了便于比较, 我们使用文献[5]中的方法重新辨识上述参数, 其估计结果为: 信号分量 $s_1$ 的调频率为 $8.10 \text{ MHz}/\mu\text{s}$ , 初始频率为 $12.06 \text{ MHz}$ , 幅值为 $0.94 \text{ mV}$ 。信号分量 $s_2$ 的调频率为 $-3.95 \text{ MHz}/\mu\text{s}$ , 初始频率为 $10.10 \text{ MHz}$ , 幅值为 $0.71 \text{ mV}$ 。由此可知, 在较强的噪声环境下, 本文算法对chirp信号的初始频率和调频率的估计与文献[5]一致, 只是对信号幅值的估计精度略低于文献[5]的方法, 但也给出了近似估计。

总之, 通过以上的仿真可以得出以下的结论: 在采集样本数据的同时, 可以采用本文算法自适应地计算DFRFT, 这样在完成数据采集的同时就可以实现对chirp信号的初步估计。同时, 本文算法只需要少数的迭代就可以找到DFRFT峰值点的坐标, 并由此得到对chirp信号调频率和初始频率的估计, 但要得到精确的DFRFT幅值估计, 则需要合理的选择学习速率和更多的迭代次数。

## 5 结论

本文从分数阶傅里叶反变换的离散形式出发, 通过合理的选择输入变量和期望信号构造自适应滤

波器, 使得滤波器的权系数恰好为信号的DFRFT, 并采用LMS算法自适应地更新滤波器权系数, 从而实现了DFRFT的自适应计算。仿真结果说明通过合理地选择学习速率和迭代次数, 本文算法可以用来自适应地计算DFRFT, 进而进行chirp信号参数估计。同时, 经过仿真可以看出本文算法仅需要较少的迭代就可以辨识出DFRFT峰值点坐标, 因此本文的算法更适用于只需要计算DFRFT峰值点坐标而不需要精确给出DFRFT峰值数值解的场合。

## 参考文献

- [1] Qi Lin, Tao Ran, and Zhou Si-yong, *et al.* Detection and parameter estimation of multicomponent LFM signal based on the fractional Fourier transform [J]. *Science in China: Ser. F Information Sciences*, 2004, 47(2): 184-198.
- [2] 郭斌, 张红雨. 分级计算迭代在Radon-ambiguity变换和分数阶Fourier变换对chirp信号检测及参数估计的应用[J]. *电子与信息学报*, 2007, 29(12): 3024-3026.  
Guo Bin and Zhang Hong-yu. The application of iterative algorithm to chirp signal detection and parameter estimation using Radon-ambiguity transform and fractional Fourier transform [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2007, 29(12): 3024-3026.
- [3] Pei Soo-chang and Ding Jian-jun. Relations between Gabor transforms and fractional Fourier transforms and their applications for signal processing [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(10): 4839-4850.
- [4] 牛虹, 齐林, 宋家友. 基于FRFT的时变Chirp信号参数估计[J]. *现代雷达*, 2007, 29(11): 37-43.  
Niu Hong, Qi Lin, and Song Jia-you. Detection of chirp signal with time-varying amplitude using the FRFT [J]. *Modern Radar*, 2007, 29(11): 37-43.
- [5] Ozaktas H M, Arikanet O, and Kutay A. Digital computation of the fractional Fourier transform [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, 44(9): 2141-2150.
- [6] Pei S C and Yeh M H. Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, 47(5): 1335-1347.
- [7] 赵兴浩, 陶然, 邓兵等. 分数阶傅里叶变换的快速计算新方法[J]. *电子学报*, 2007, 35(6): 1089-1093.  
Zhao Xing-hao, Tao Ran, and Deng Bing, *et al.* New methods for fast computation of fractional Fourier transform [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2007, 35(6): 1089-1093.
- [8] Diniz P S R. Adaptive Filtering Algorithms and Practical Implementation [M]. Third Edition, New York: Springer, 2008: 77-130.
- [9] Godavarti M and Hero A O. Partial update LMS algorithms [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(7): 2382-2399.

曲强: 男, 1972年生, 博士生, 研究方向为非平稳信号处理、阵列信号处理技术。  
金明录: 男, 1958年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为信号与通信系统基础理论和技术。