◎研究、探讨◎

Credal 网络推理的一种不完全枚举法

熊文涛[1,2]，齐　欢[1]，余胜平[2]
XIONG Wen-tao[1,2]，QI Huan[1]，YU Sheng-ping[2]

1.华中科技大学 系统工程研究所，武汉 430074
2.孝感学院 数学系，湖北 孝感 432000
1.Institute of Systems Engineering，Huazhong University of Science & Technology，Wuhan 430074，China
2.Department of Mathematics，Xiaogan University，Xiaogan，Hubei 432000，China
E-mail：xiong_2009@foxmail.com

XIONG Wen-tao，QI Huan，YU Sheng-ping.Inference in Credal networks through enumeration incompletely.Computer Engineering and Applications，2009，45（31）：27-29.

Abstract：Credal network is one of the graphical tools for knowledge representation and reasoning under uncertain conditions，where probability values may be qualitatively expressed by intervals or inequality.The inference in Credal network is the computation of tight lower and upper bounds for conditional probabilities.A new algorithm for inference in Credal networks is presented based on the framework of bucket elimination.The burden of computation is alleviated by enumerating some of values and the accurate result is obtained.Finally an example is shown to illustrate the feasibility.
Key words：Credal networks；bayesian networks；bucket elimination；enumeration

摘　要：Credal 网络是研究不确定环境下知识表示和因果推理的一种图模型，其条件概率值可以用不精确的区间或不等式定性地表示，使得表达方式更加灵活有效。Credal 网络的推理是计算一定证据下的后验概率最大值和最小值，给出了一种 Credal 网络推理的新方法，该方法是在桶消元框架下通过枚举计算部分因子函数值，使计算量大大减小，并且可以得到精确的结果。最后用一个实例说明了该方法的可行性。
关键词：Credal 网络；贝叶斯网络；桶消元；枚举

DOI：10.3778/j.issn.1002-8331.2009.31.009　**文章编号**：1002-8331（2009）31-0027-03　**文献标识码**：A　**中图分类号**：TP181

1　引言

Credal 网络是一种类似于贝叶斯网络的不确定性知识表达和推理工具，与贝叶斯网络有相同的拓扑结构，都是一个有向无环图，节点表示随机变量，并关联着一个条件概率表。与贝叶斯网络不同的是，Credal 网络节点间的条件概率可以是不精确的概率值，允许用概率区间、不等式等不同的概率测度定性表示，表达方式更加灵活。目前，Credal 网络已应用于工程[1]、管理[2-3]、军事[4]等方面，引起了学者们的关注。Credal 网络主要用于推理，其推理是计算给定证据下后验概率的最大值和最小值，即：若 X_Q 是一个查询变量集，X_E 是一个观察变量集，那么“推理”就是要计算 X_Q 在证据值 $X_E=e$ 下条件概率 $P(X_Q|X_E=e)$ 的上下紧边界。Credal 网络推理得到的是一个概率区间，因此在实际中比一个单一的值更有效。

一些学者将 Credal 网络推理看作是一个组合优化问题，运用一些优化方法精确[5-6]和近似[7-9]地计算。其中多重线性规划是一种典型的 Credal 网络推理精确模型，它利用贝叶斯网络中桶消元的思想将所有的因子看作是未知变量，消除一个变量产生的式子作为约束条件，形成一个多重线性规划，然而，多重线性规划求解十分困难，难以处理大规模问题。近似方法只能得到一些内近似或外近似。而在贝叶斯网络推理计算中，桶消元算法是一种重要的精确推理算法，它根据事先选择的求和时节点的消元顺序，通过改变求和与乘积运算的次序，以减少计算量。利用桶消元算法框架，首先找到各局部 Credal 集的顶点（在 Credal 网络中，这些顶点一般容易计算），形成因子函数的一个函数值阵列，然后通过桶消元计算得到新因子函数值的阵列，并排除其中不可能成为最优解的阵列和相同的阵列，使计算量大大减小。该方法简单，能够精确地计算出要求的后验概率区间，最后用一个实例说明了该文的方法。

2　Credal 网络概述

2.1　Credal 集

与贝叶斯网络模型相比，Credal 网络中节点间的条件概率不一定总是精确、唯一的概率分布，而是用一个概率测度集来加以描述，即每个节点在其父节点某种配置下的条件概率属于

基金项目：国家自然科学基金（the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60774036）；孝感学院青年基金资助（No.Z200803）。
作者简介：熊文涛（1978-），男，博士研究生，主要研究方向为：图模型理论与方法，最优化理论与方法；齐欢（1948-），男，华中科技大学教授，博导。
收稿日期：2009-05-26　**修回日期**：2009-07-02

一个集合,这个集合能在不完备和不确定情形下表达信念和做出决策,称为 Credal 集。下面首先给出 Credal 集的概念。

定义 1[10](Credal 集) 概率测度的闭凸集称为 Credal 集。若 $P(x)$ 为一个随机变量 X 的概率密度函数,$H(x)$ 为 X 的 Credal 集,则有 $P(x)\in H(x)$,根据凸集的表示定理,若 $P_1(x),\cdots,P_n(x)$ 是 Credal 集 $H(x)$ 的 n 个顶点分布函数,则 $H(x)$ 可以表示为:$H(x)=CH(P_1(x),\cdots,P_n(x))$,$CH(\cdot)$ 表示凸包,即

$$H(x)=\{P(x):P(x)=\lambda_1P_1(x)+\cdots+\lambda_nP_n(x),$$

$$\sum_i\lambda_i=1,\lambda_i\in[0,1],i=1,\cdots,n\} \tag{1}$$

相应地,联合概率分布的 Credal 集称为联合 Credal 集、条件概率分布的 Credal 集称为条件 Credal 集、边缘概率分布的 Credal 集称为边缘 Credal 集。

在 Credal 网络中,有多种方式给出 Credal 集,文献中普遍使用的是分离指定 Credal 集,可以将联合 Credal 集转化成局部计算。

定义 2[10](分离指定) 如果对任意的 $y_1\neq y_2$,条件 Credal 集 $H(X|Y=y_1)$ 和 $H(X|Y=y_2)$ 之间彼此无关,则称 Credal 集 $H(X|Y)$ 是分离指定的。

2.2 Credal 网络

Credal 网络的拓扑结构是一个有向无环图,节点表示随机变量(节点和变量不混淆时,一般不加区分),节点间的弧表示变量间的条件关系(关联关系、因果关系);在定量方面,Credal 网络的每个节点关联着一个条件 Credal 集 $H(X=x|pa_X)$,这里 pa_X 表示 X 的父节点集,而一个根节点与一个边缘 Credal 集相关联[10]。可以是定性的或不完备的信息(不精确的或不确定的概率值),与贝叶斯网络相比,Credal 网络表达方式上更加灵活,不仅可以表示专家的不精确和不完整信念,而且能够融合多个专家的不同意见。这里假设所有的变量都是离散的分类变量,并且所有条件 Credal 集都有有限个顶点。Credal 网络表示的是一组随机变量的联合分布集,有多种形式的扩展,该文主要讨论强扩展的 Credal 网络推理,即 Credal 网络足下面的强马尔可夫条件。

定义 3[10](强马尔可夫条件) 对任意的两个变量 X,Y,Z,如果 X 和 Y 的联合 Credal 集满足 $P(X=x,Y=y)=P(X=x)\cdot P(Y=y)$,则称 X 和 Y 是强独立的;如果 X,Y 和 Z 的条件 Credal 集满足 $P(X=x|Y=y,Z=z)=P(X=x|Z=z)$,则称 X 和 Y 在 Z 上是条件强独立的;如果 Credal 网络上每一个变量在给定其父节点条件下强独立于它的非子孙非父亲节点,则称该网络满足强马尔可夫条件。

根据 d-分隔理论和条件独立性假设,满足强马尔可夫条件的 Credal 网络变量集 $V=\{X_1,\cdots,X_n\}$ 上的联合概率分布可以用下式表示[10]:

$$P=(X_1,\cdots,X_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i|pa_i) \tag{2}$$

这样看来,Credal 网络实质上是一组贝叶斯网络集,Credal 网络上若每一个条件概率在 Credal 集中取某一个具体值时,得到的网络就是一个贝叶斯网络,称这样得到的贝叶斯网络与原 Credal 网络是相容的。

3 Credal 网络的推理方法

Credal 网络的推理是计算满足网络约束条件下 $P(X_Q|X_E=e)$ 的最大值和最小值,文[11]指出:对强扩展来说,使 $P(X_Q|X_E=e)$ 最优(最大和最小)的分布位于该扩展的顶点,由公式(2),这些顶点是所有局部 Credal 集的各种组合,可以通过枚举各局部 Credal 集顶点组合形成的贝叶斯网络来进行推理,但完全枚举所有组合计算量非常大。事实上,在桶消元计算框架下,根据下面结论,每一步消元只需枚举因子函数的部分值计算,这样减少了后续消元需要计算的乘积次数。

定理 1 在桶消元算法中,若某个桶含有因子 $F=f_1,f_2,\cdots,f_m$,则非线性规划(3)的最优解为因子 f_i 在状态 j 取最大值或最小值。

$$\begin{cases}\max/\min\ f_{pl}=\sum\limits_{X_p}\prod\limits_i f_{ij}\\ f_{ij}\in\Omega_i\quad i=1,\cdots,m\end{cases} \tag{3}$$

其中,f_{ij} 为因子 f_i 取状态 j 的值,f_{pl} 为消除变量 X_p 后产生的一个因子函数在状态 l 的值,Ω_i 为因子 f_i 对应多面体形成的凸集。

定理 2 若 f_p 为桶消元产生的一个因子函数,则分式规划(4)的最优解为 f_p 在状态 j 取最大值或最小值。

$$\begin{cases}\max/\min\ g=\dfrac{f_{pl}}{\sum\limits_j f_{pj}}\\ f_{pj}\in[\underline{f}_{pj},\overline{f}_{pj}]\quad\forall j\end{cases} \tag{4}$$

其中,f_{pj} 为 f_p 取状态 j 的值。

定理 1 和定理 2 说明,在桶消元产生新的因子函数值阵列中,可以排除分量里既不包含最大值也不包含最小值的阵列,这里把这些阵列称为劣阵列。因此,在每步桶消元计算时,得到一个新的因子函数值阵列后,可以排除劣阵列和值相同的阵列,再置入下一个桶计算,以减少计算量。

另外,在贝叶斯网络推理中,文[12]指出:针对具体的查询和观察变量,通过分析网络的结构,可以找出一些与推理无关的变量,推理前,先将这些变量除去,来减少计算量。假设 X_Q 为查询变量集,$X_E=e$ 为观察变量集,后验条件概率 $P(X_q|X_E=e)$ 仅与变量 $W=X_Q\cup X_E$ 和 W 的祖先集 $an(W)$ 有关。在 Credal 网络推理中,可以采用同样的方式进行简化。于是,得到如下的算法步骤。

输入 一个 Credal 网络 $CN=(G,X,H)$,$G=(V,A)$,X_Q 为查询变量集,$X_E=e$ 是证据集。

输出 $\max/\min P(X_Q|X_E=e)$

第 1 步 假设 $V=(X_1,\cdots,X_n)$ 为所有变量集,简化保留 $W=X_Q\cup X_E$ 和 W 的祖先集 $an(W)$ 以及对应的拓扑结构,并去掉孤立的节点 Y 及相应的条件概率,令 $V=W\cup an(W)-Y$;

第 2 步 选择一个消元顺序(可在消元顺序中将观察变量置前),按照此顺序重新命名节点集 $d=X_1,\cdots,X_{|V|}$;

第 3 步 初始化:为每个变量 X_i 设置一个桶 B_i,根据 Credal 网络强扩展的 d-分割,对联合概率分布进行因子分解,得到因子函数 $f_1,f_2,\cdots$,计算出每个因子函数在 Credal 网络中 Credal 集的所有顶点,形成一个顶点阵列。将这些因子函数分别放入它的序号最大的变量所对应的桶中;

第 4 步 设 X_p 为某一个待消除的变量,如果 X_p 是观察变量,即 $X_p=e_p$,则将 $X_p=e_p$ 直接代入该桶中所有的因子函数中,找

表 2　条件 Credal 集

节点 A	$P(A=1)\in[0.75,0.85]$
节点 B	$P(B=1)\in[0,0.15]$
节点E	$P(E=1\|A=1,B=1)=x_1$ $P(E=1\|A=1,B=0)=x_2$ $P(E=1\|A=0,B=1)=x_3$ $P(E=1\|A=0,B=0)=x_4$ 满足 $\Omega_1=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\middle\| \begin{array}{l} x_1=0.4 \\ x_1\leqslant x_3 \\ x_2\leqslant x_4 \\ x_1\geqslant x_2 \\ x_3\geqslant x_4 \\ x_i\in[0,1],i=1,2,3,4 \end{array}\right\}$
节点 F	$P(F=1)=0.2$
节点 I	$P(I=1\|E=1,F=0)=0.9,P(I=1\|E=1,F=1)=0.8$ $P(I=1\|E=1,F=1)=0.9,P(I=1\|E=0,F=0)\in[0.1,0.2]$
节点 L	$P(L=1\|I=1)\in[0.5,0.6],P(L=1\|I=0)\in[0.4,0.5]$
节点 C	$P(C=1)\geqslant0.4,P(C=0)\geqslant0.5$
节点 D	$P(D=1)\geqslant0.2,P(D=0)\geqslant0.7$
节点 G	$P(G=1\|C=1,D=1)=y_1$ $P(G=1\|C=1,D=0)=y_2$ $P(G=1\|C=0,D=1)=y_3$ $P(G=1\|C=0,D=0)=y_4$ 满足 $\Omega_1=\left\{(y_1,y_2,y_3,y_4)\middle\| \begin{array}{l} y_1=0.2\lambda_{11}+0.3\lambda_{12}+0.4\lambda_{13} \\ y_2=0.7\lambda_{21}+0.6\lambda_{22}+0.5\lambda_{23} \\ y_3=\lambda_{31}+\lambda_{32}+\lambda_{33} \\ y_4=0.8\lambda_{41}+0.9\lambda_{42}+0.8\lambda_{43} \\ \sum_j\lambda_{ij}=1,\lambda_{ij}\in\{0,1\},i=1,2,3,4 \end{array}\right\}$

到对应的函数值阵列,并将这些因子函数放到它们序号最大的变量所对应的桶中，否则，对该桶中的所有的因子函数 $f_1,f_2,\cdots,f_k$,利用式 $f_p=\sum_{X_p}\prod_i f_{ij}$ 计算出新的因子函数值阵列,并除去其中的劣阵列和相同的阵列,并将 f_p 放到它的序号最大的变量对应的桶中;

第 5 步 根据序号 $d=X_1,\cdots,X_{|V|}$,计数变量 p 从 $|V|$ 到 1,重复计算第 4 步，最后运用式 $g=f_p/\sum_X f_p$ 得到简化的后验概率分布阵列,其中最大值即为后验概率 $P(X_Q|X_E=e)$ 最大值,最小值为 $P(X_Q|X_E=e)$ 的最小值。

在每次桶消元过程中，通过排除劣阵列和相同的阵列,使后面因子的计算量大大减小,由于采用的是贝叶斯网络推理的桶消元框架,这里 Credal 网络推理复杂度与贝叶斯网络推理桶消元算法的复杂度相关。

4　实例说明

为了说明该文的方法,采用文[13]的例子进行 Credal 网络推理,如图 1,所有的节点表示二值变量,即变量 X 的取值为 $x,\bar{x}$,用 1,0 表示,图中部分条件概率值为精确概率值(表 1),

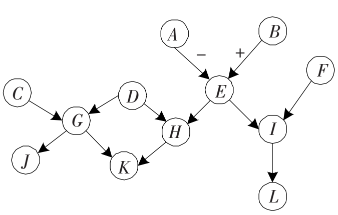

图 1　网络推理图

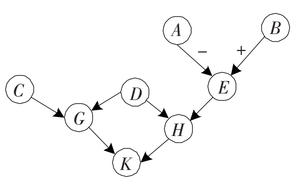

图 2　网络推理简化图

表 1　精确条件概率值

节点 H	$P(H=1\|D=1,E=1)=0.2$	$P(H=1\|D=1,E=0)=0.9$
	$P(H=1\|D=0,E=1)=0.8$	$P(H=1\|D=0,E=0)=0.8$
节点 J	$P(J=1\|G=1)=0.1$	$P(J=1\|G=0)=0.9$
节点 K	$P(K=1\|G=1,H=1)=0.3$	$P(K=1\|G=1,H=0)=0.8$
	$P(K=1\|G=0,H=1)=0.2$	$P(K=1\|G=0,H=0)=0.9$

部分条件概率值由受雇专家给出，这些概率值几乎都是定性的,可以表示成条件 Credal 集,具体值见(表 2)。

若要计算后验概率 $P(D=1|A=0,K=1,F=1)$,运用我们的方法计算,第一步简化可以得到图 2,第二步假设变量消除顺序为 A,K,B,E,H,C,G,D,可计算得到 $P(D=1|A=0,K=1)\in[0.171\ 2,0.448\ 1]$,进而,与文[13]的结果一致。

5　小结

Credal 网络假定网络中条件概率取自一概率分布集,表达方式上更加灵活,通过计算后验条件概率的最大值和最小值进行推理,适用性更广。然而,Credal 网络推理是一件十分困难的事,结合桶消元算法框架提出了一种不完全枚举方法,不需要枚举 Credal 集所有的顶点组合，使 Credal 网络推理的计算量大大减小,并且可以得到 Credal 网络推理的精确值。

参考文献:

[1] Antonucci A,Salvetti A,Zaffalon M.Credal networks for hazard assessment of debris flows[C]//Kropp J,Scheffran J.Advanced Methods for Decision Making and Risk Management in Sustainability Science.Nova Science,2007:237-256.

[2] Antonucci A,Piatti A,Zaffalon M.Credal networks for operational risk measurement and management[C]//Proceedings of the 11th International Conference on Knowledge-Based and Intelligent Information & Engineering Systems,KES2007:604-611.

[3] 李玉玲,吴祈宗,郑恒,等.Credal 网络在港口生产安全评价中的应用[J].计算机工程与应用,2007,43(29):214-216.

[4] Antonucci A,Brühlmann R,Piatti A,et al.Credal networks for military identification problems[C]//de Cooman,Vejnarová G,Zaffalon J.Proceedings of the Fifth International Symposium on Imprecise Probability:Theories and Applications(ISIPTA'07),2007:1-10.

[5] de Campos C P,Cozman F G.Inference in credal networks using multilinear programming[C]//Proceedings of the Second Starting AI Researcher Symposium,2004:50-61.

(下转 33 页)