

第三章 土中应力分布及计算

主要内容

土中自重应力计算

基础底面的压力分布与计算

竖向集中力作用下的土中应力计算

竖向分布荷载作用下的土中应力计算

应力计算中的其他一些问题

第一节 概述

土中应力是指土体在自身重力、构筑物荷载以及其他因素(如土中水渗流、地震等)作用下，土中所产生的应力。

土中应力包括**自重应力**与**附加应力**，前者是因土受到重力作用而产生，因其一般随着土的形成就存在；后者是因受到建筑物等外荷载作用而产生的。

土中应力计算的目的：

土中应力过大时，会使土体因强度不够发生破坏，甚至使土体发生滑动失去稳定。

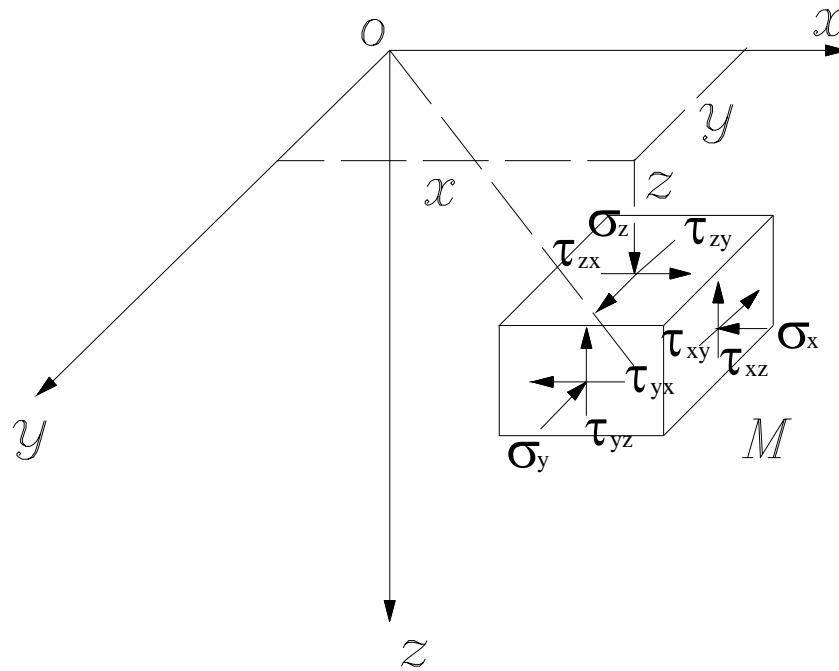
土中应力的增加会引起土体变形，使建筑物发生沉降，倾斜以及水平位移。

土中应力计算的基本假设：

土是三相体，具有明显的各向异性和非线性特征。为简便起见，目前计算土中应力的方法仍采用**弹性理论公式**，将地基土视作均匀的、连续的、各向同性的半无限体，这种假定同土体的实际情况有差别，但其计算结果尚能满足实际工程的要求。

在土力学中法向应力以**压应力为正**，**拉应力为负**。

土中一点的应力状态



第二节 土的自重应力

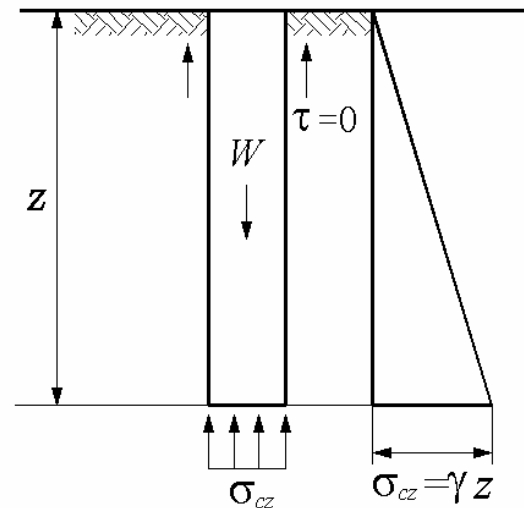
❖ 自重应力的定义

自重应力：由于土体本身自重引起的应力。

自重应力是土体的初始应力状态

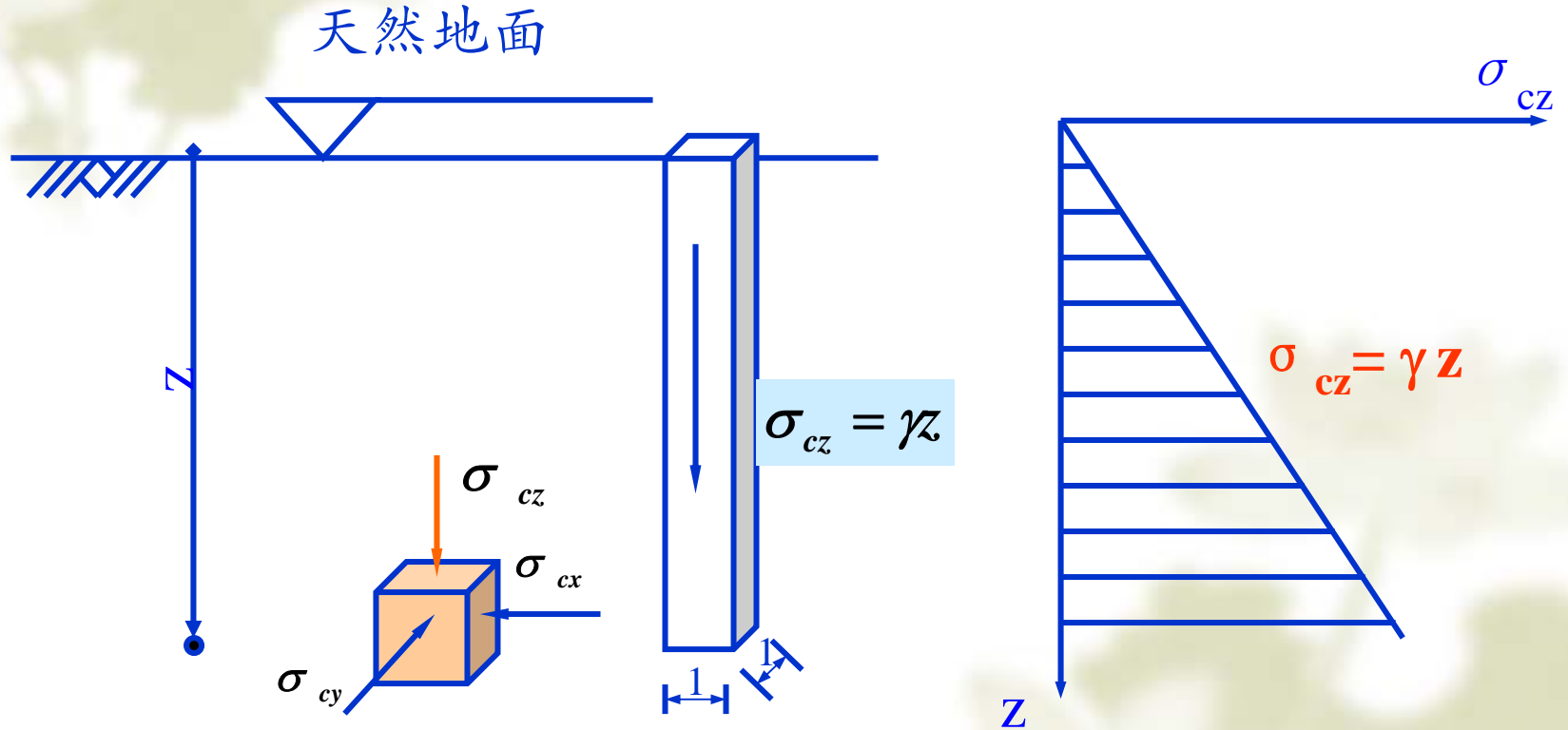
一般情况下，土体在自重作用下，经过漫长的地质历史时期，已经压缩稳定，因此，通常自重应力不再引起土的变形。但对于新沉积土层或近期人工充填土应考虑自重应力引起的变形。

一般情况下，土层的覆盖面积很大，土的自重可以看作分布面积为无限大的荷载。土体在自身重力作用下任一竖直切面均是对称面，切面上都不存在剪应力。



一、均质土竖向自重应力

土体中任意深度处的竖向自重应力等于单位面积上土柱的**有效重量**（从天然地面算起）。



均质土中自重应力计算公式: $\sigma_{cz} = \gamma z$

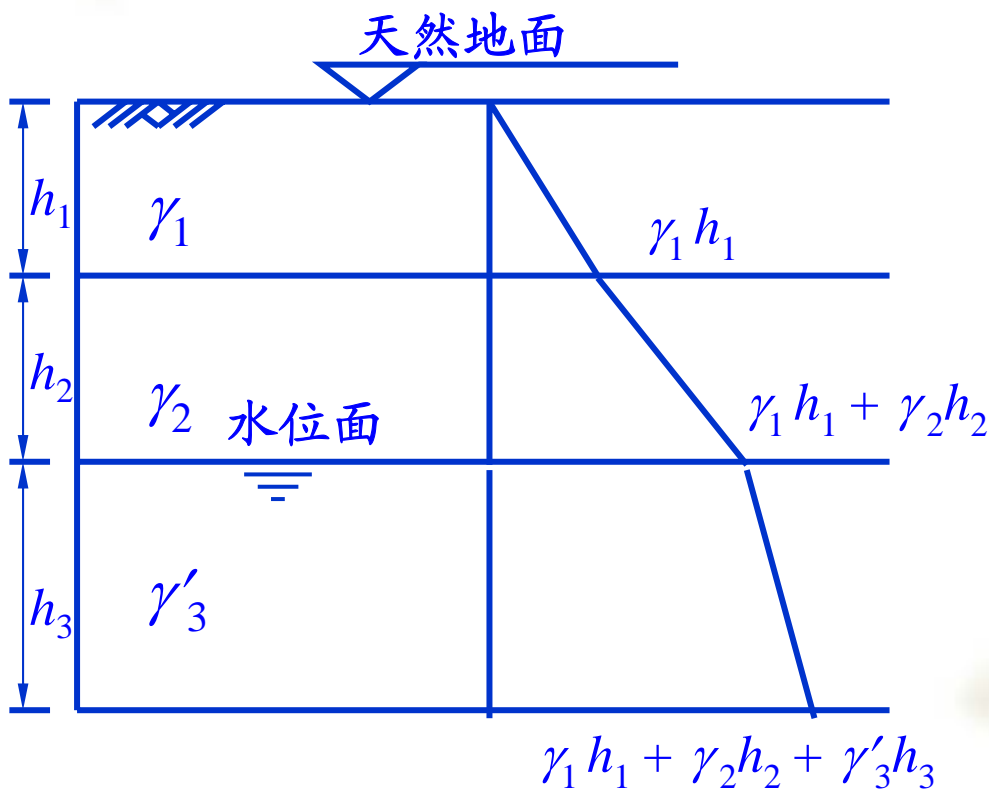
可以看出，随深度呈线性增加，自重应力呈三角形分布。

二、成层土的自重应力计算

1. 土体成层 $\sigma_{cz} = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \cdots + \gamma_n h_n = \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i$

2. 土层中有地下水时

若地下水位以下的土受到水的浮力作用，则水下部分土的重度应按浮重度计算，其计算方法如同成层土的情况。



说明:

1. 地下水位以上土层采用天然重度，地下水位以下土层采用浮重度。

2. 非均质土中自重应力沿深度呈折线分布。

3. 在地下水位以下，如埋藏有不透水层，由于不透水层中不存在水的浮力，所以不透水层以下的自重应力应按上覆土层的水土总重计算。

3. 地下水位以下情况的进一步讨论

计算地下水位以下土的自重应力时，应根据土的性质确定是否需要考虑水的浮力作用。

砂性土：应考虑浮力作用。

液性指数 $I_L \geq 1$ 流动状态，自由水，考虑浮力；

粘性土： { 液性指数 $I_L \leq 0$ 固体状态，结合水，不考虑浮力；

液性指数 $0 < I_L < 1$ 塑性状态，难确定，按不利状态。

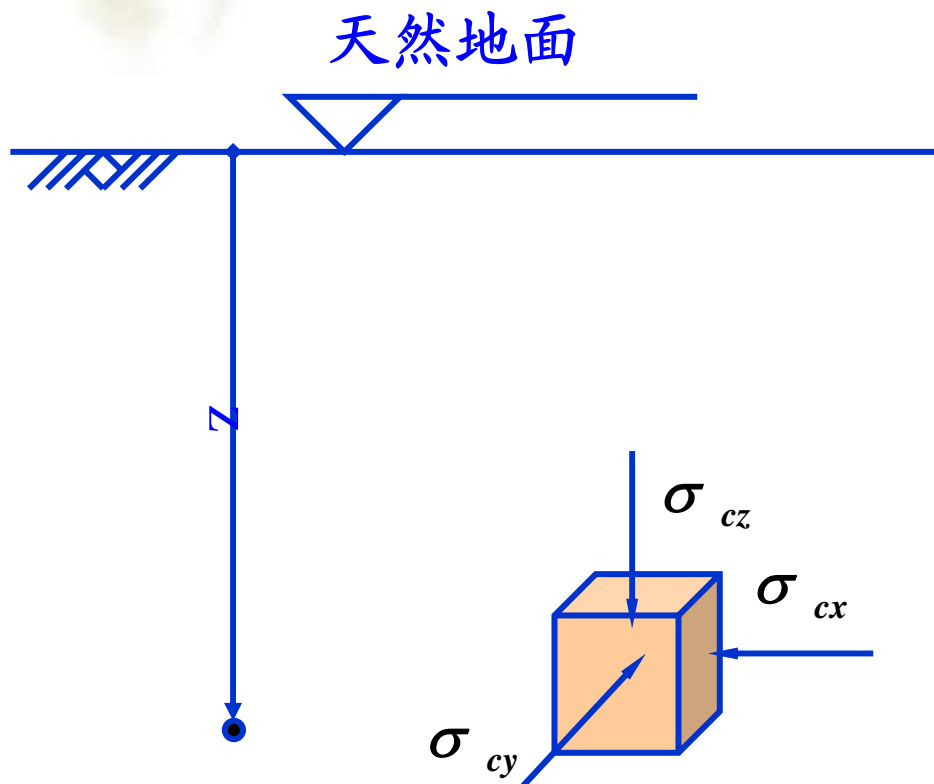
液性指数 $I_L \leq 0$ ，认为是不透水层（坚硬粘土或岩层），对于不透水层，由于不存在水的浮力，所以层面和层面以下的自重应力按上覆土层的水土总重计算。

三、水平向自重应力

土的水平向自重应力 σ_{cx} 和 σ_{cy} 可按下式计算:

$$\sigma_{cx} = \sigma_{cy} = K_0 \sigma_{cz}$$

静止侧压力系数



广义虎克定律推导出
理论关系为 $K_0 = \frac{\nu}{1-\nu}$ 。

值可以在实验室测定，它与土的强度指标或变形指标间存在着理论或经验关系。在后面的课程将具体学习如何确定。

第三节 基底压力分布和计算

基底压力：建筑物荷载通过基础传递给地基的压力，也称为地基反力。

基础底面的压力分布问题是涉及到基础与地基土两种不同物体间的接触压力问题，在弹性理论中称为接触压力问题。这是一个复杂的问题，影响它的因素很多，如基础的刚度、形状、尺寸、埋置深度，以及土的性质荷载大小等。

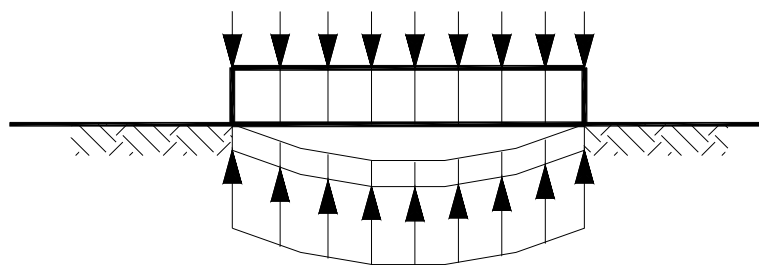
一、基础底面压力分布的概念

基础底面的压力分布主要取决于基础的刚度和地基变形条件

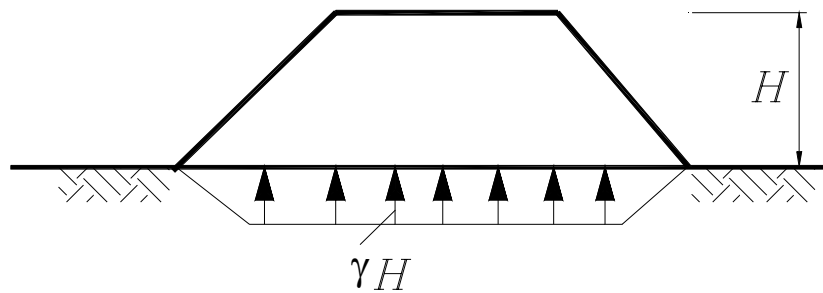
根据基础的抗弯刚度

{	绝对柔性基础 (即 $EI \rightarrow 0$)
	刚性基础 (即 $EI \rightarrow \infty$)

柔性基础：地基反力分布与作用的荷载分布形状相同；基础底面的沉降则各处不同，中央大而边缘小。



(a)



(b)

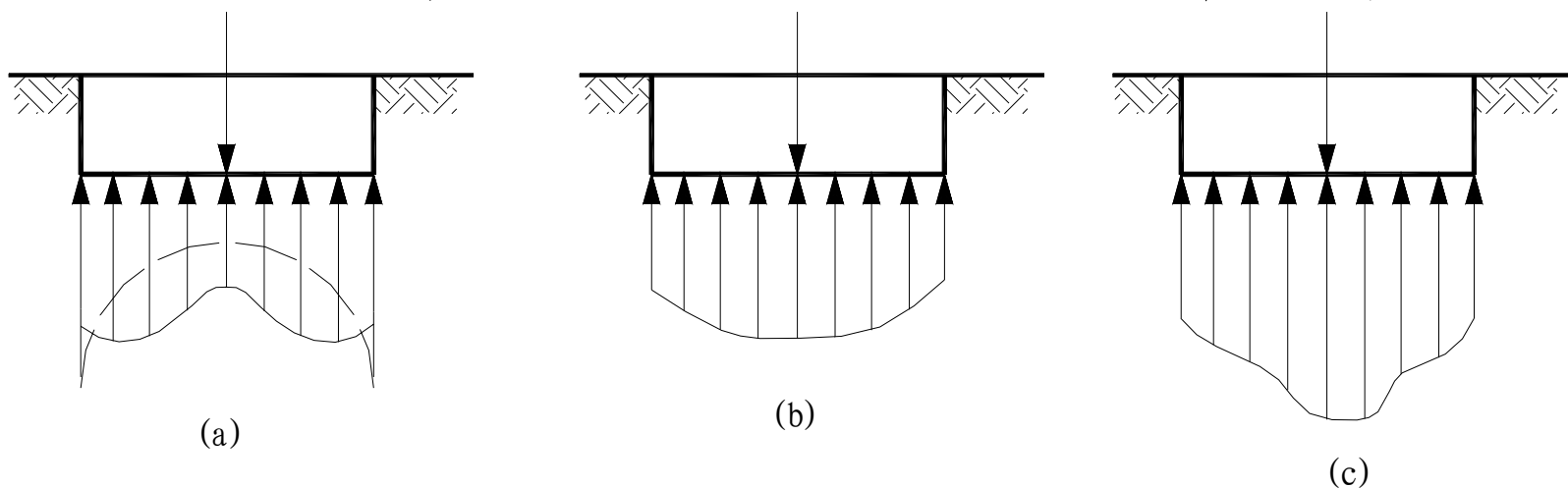
柔性基础下的基底压力分布

(a) 理想柔性基础 (b) 路堤下地基反力分布

刚性基础：基础不会发生挠曲变形；在中心荷载作用下，基底各点的沉降是相同的；底面的压力分布形状同荷载大小有关。

刚性基础底面的压力分布形状：

- ✓ 荷载较小时，基底压力分布是马鞍形，中央小而边缘大（理论上边缘应力为无穷大）；
- ✓ 荷载较大时，基底压力呈抛物线形分布，这是由于基础边缘应力很大，使土产生塑性变形，边缘应力不再增加，而使中央部分继续增大，基底压力重新分布的结果；
- ✓ 若荷载继续增大，则基底压力会继续发展而呈钟形分布。



刚性基础下压力分布

(a) 马鞍形 (b) 抛物线形 (c) 钟形

二、基底压力的简化计算方法

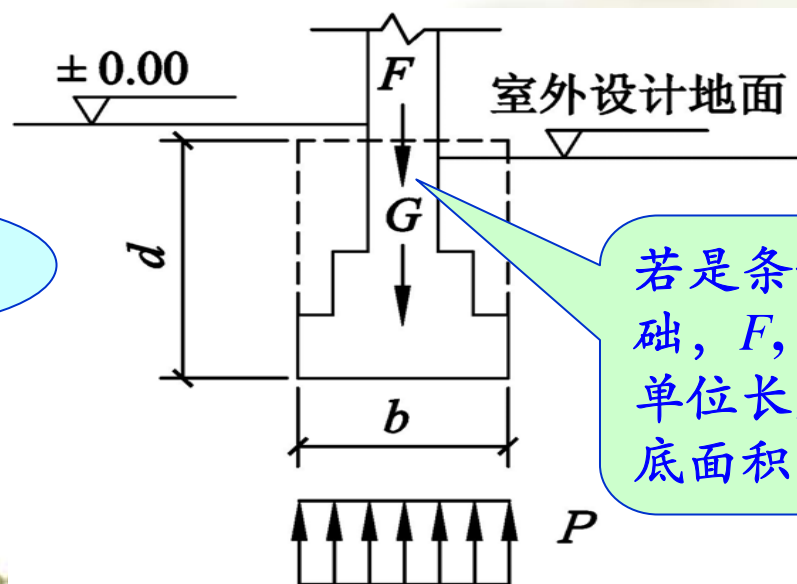
基底压力的分布是比较复杂的，根据圣维南原理以及土中实际应力的测量结果得知，当作用在基础上的荷载总值一定时，基底压力分布形状只在一定深度范围内对土中应力分布产生影响。一般距基底的深度超过基础宽度的1.5~2.0倍时，它的影响已很不显著。因此，在实用上对基底压力的分布可近似的认为是按直线规律变化，采用简化方法计算，也即材料力学公式计算。

1. 中心荷载作用下的基底压力

$$p = \frac{F + G}{A}$$

$$G = \gamma_G A d$$

取室内外平均埋深计算



若是条形基础， F, G 取单位长度基底面积

2. 偏心荷载作用下的基底压力

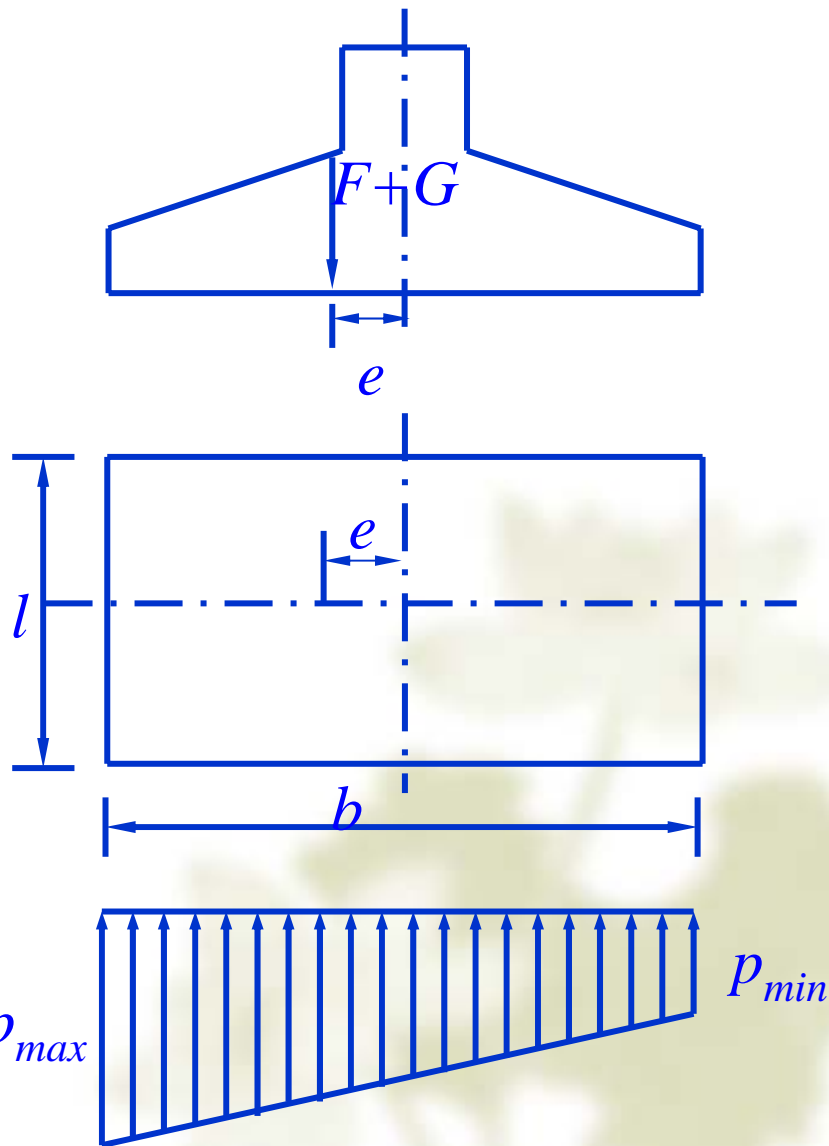
作用于基础底面
形心上的力矩

$$M = (F + G) \cdot e$$

$$p_{\max} = \frac{F + G}{A} \pm \frac{M}{W}$$
$$p_{\min}$$

基础底面抵抗
矩；矩形截面
 $W = b^2 l / 6$

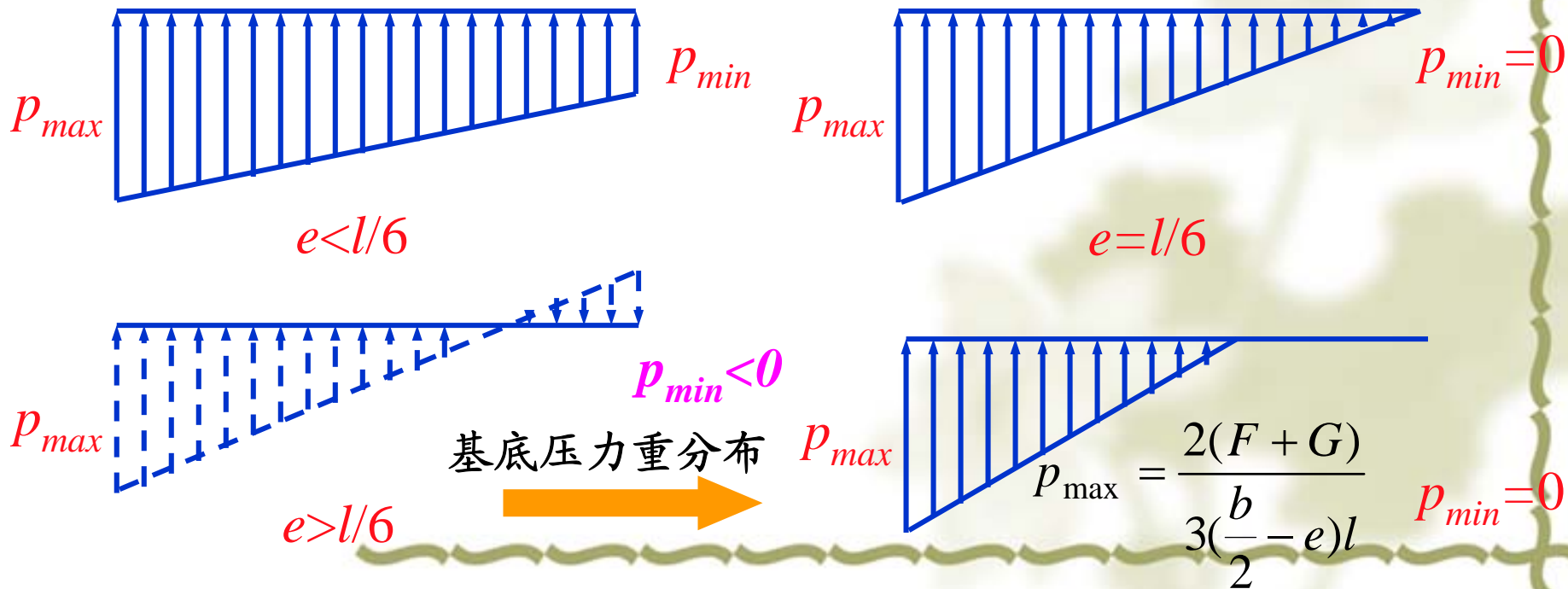
$$p_{\max} = \frac{F + G}{bl} \left(1 \pm \frac{6e}{b} \right)$$
$$p_{\min}$$



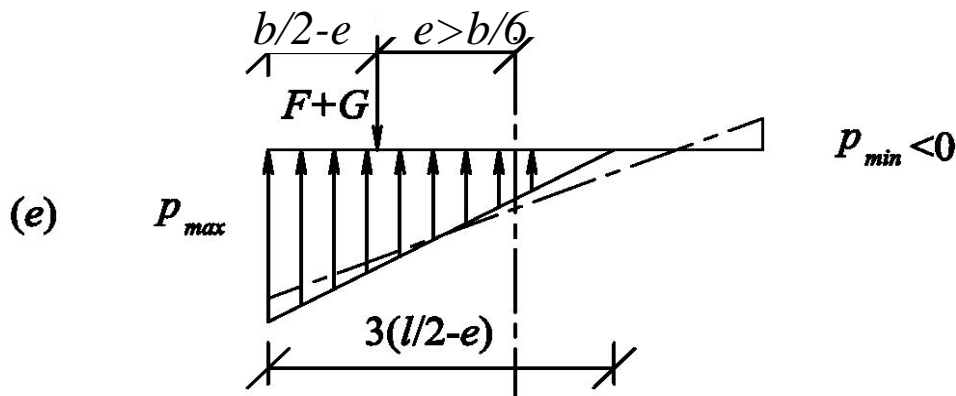
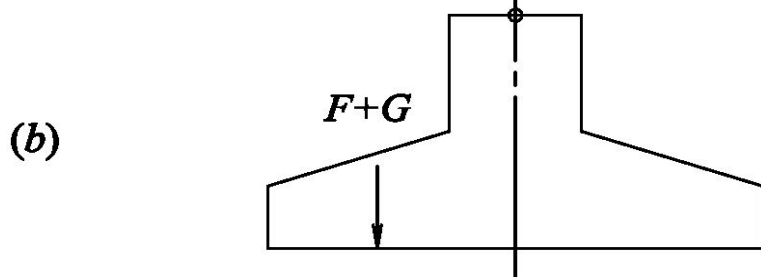
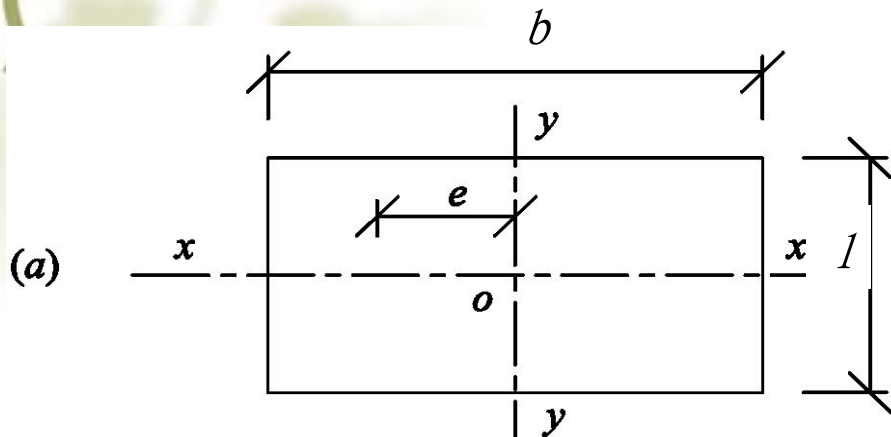
讨论:
$$p_{\min}^{\max} = \frac{F + G}{bl} \left(1 \pm \frac{6e}{b}\right)$$

- ✓ 当 $e < b/6$ 时, $p_{\max}, p_{\min} > 0$, 基底压力呈梯形分布;
- ✓ 当 $e = b/6$ 时, $p_{\max} > 0, p_{\min} = 0$, 基底压力呈三角形分布;
- ✓ 当 $e > b/6$ 时, $p_{\max} > 0, p_{\min} < 0$, 基底出现拉应力;

但基底与土之间是不能承受拉应力的, 产生拉应力部分的基底将与地基土脱开而不能传递荷载, 基底压力重新分布。根据平衡条件求得重分布后的基底最大压应力。



基底压力重分布



偏心荷载作用线
应与基底压力的
合力作用线重合

$$F + G = \frac{1}{2} p_{\max} \times 3 \left(\frac{b}{2} - e \right) l$$



$$p'_{\max} = \frac{2(F + G)}{3 \left(\frac{b}{2} - e \right) l}$$

三、基底附加压力

❖ **基底附加压力**：作用于地基表面，由于建造建筑物而**新增加**的压力称为基底附加压力。只有基底附加压力才能使地基产生附加变形。

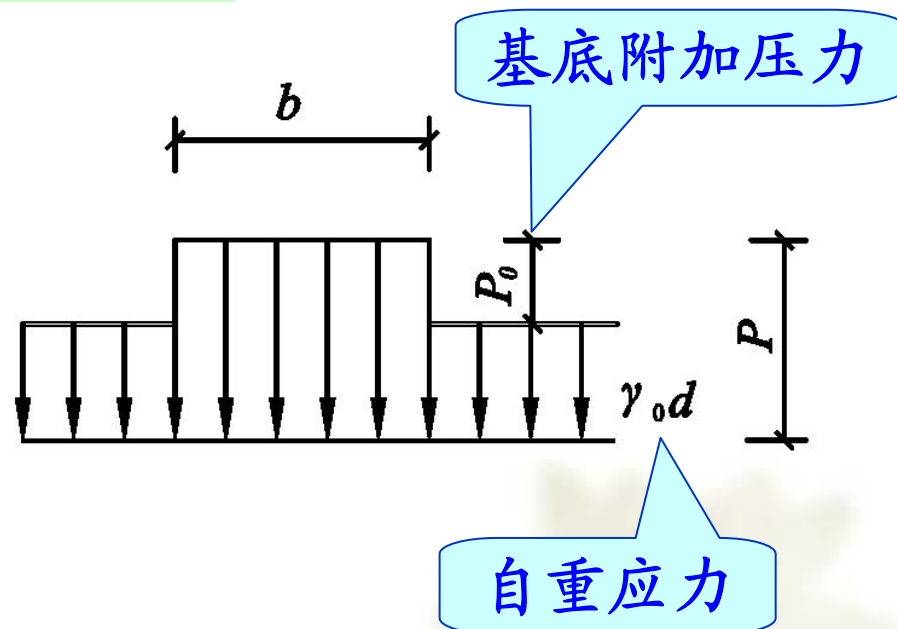
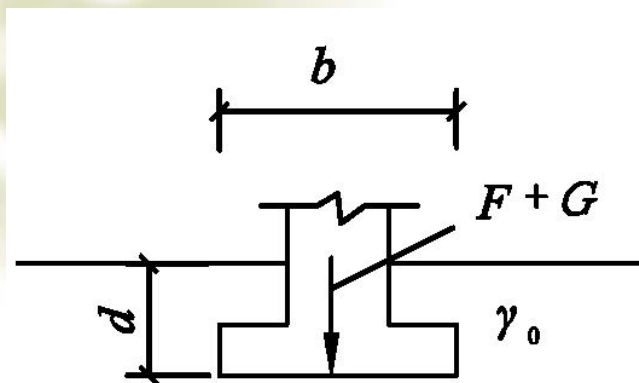
■ 前面计算时，都是假定荷载作用在地基表面，如基础置于天然地面上，则基底反力就是新增于地基表面的基底附加压力。通常基础是埋置在地面下一定深度处的，埋深浅时，误差不大，但深基础则应考虑埋深的影响。



基底附加压力在数值上等于基底压力扣除基底标高处原有土体的自重应力

基底附加压力计算:

$$p_0 = p - \gamma_0 d$$



基底压力呈梯形分布时，
基底附加压力 $p_{0\max}$, $p_{0\min}$ 为

$$\begin{aligned} p_{0\max} &= p_{\max} - \gamma_0 d \\ p_{0\min} &= p_{\min} \end{aligned}$$

第四节 土中附加应力

❖ 土中附加应力：新增外加荷载在地基土体中引起的应力。

本节讨论在竖向集中力作用时土中的应力计算。在实践中是没有集中力的，但它在土的应力计算中是一个基本公式，应用集中力的解答，通过叠加原理或者数值积分的方法可以得到各种分布荷载作用时的土中应力计算公式。

■ 计算基本假定：

地基土是连续、均匀、各向同性的半无限完全弹性体。

不同地基中应力
分布各有其特点

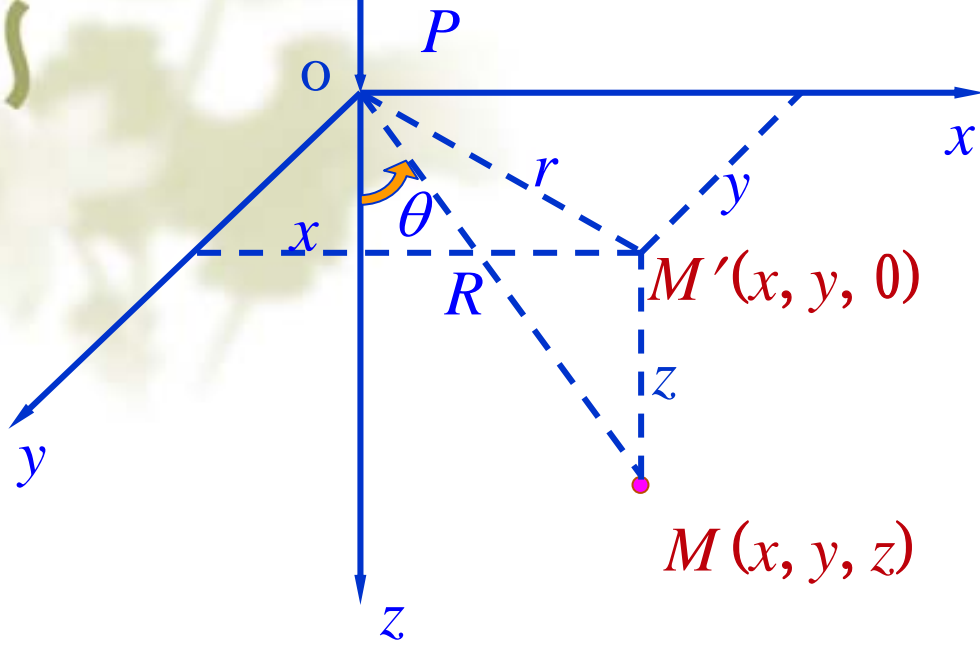
x, z 的函数

平面问题

x, y, z 的函数

空间问题

一、集中力作用下土中应力计算



附加应力系数

$$\sigma_z = \alpha \frac{P}{z^2}$$

直角坐标系



1885年法国 Boussinesq 极坐标系
布辛涅斯克解答

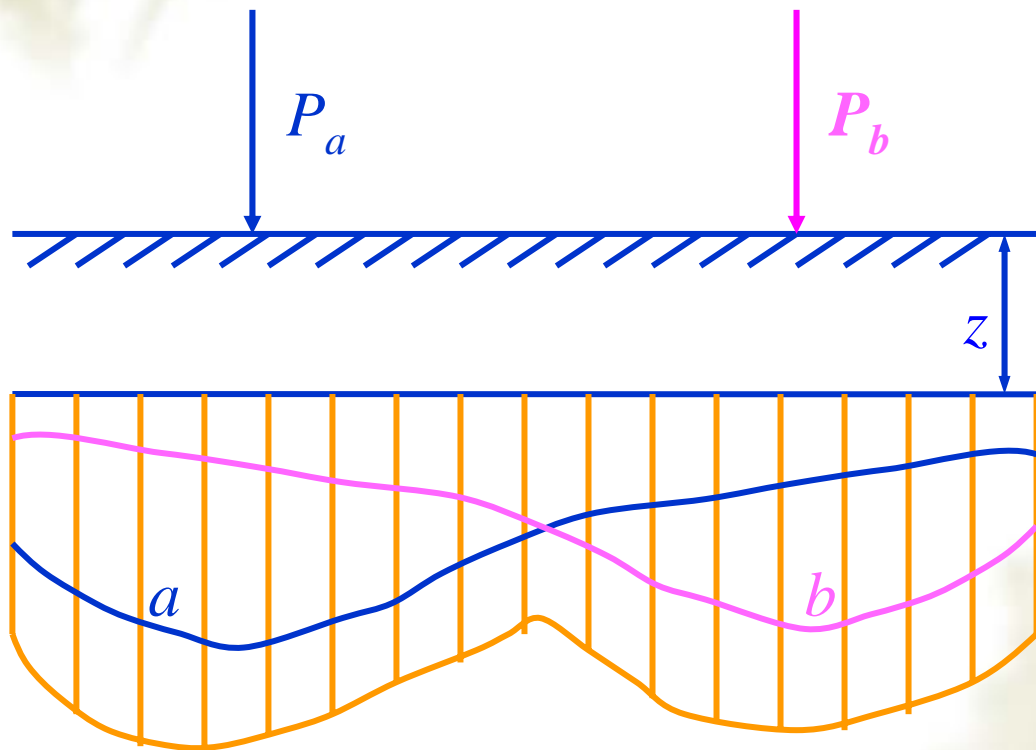
$$\sigma_z = \frac{3Pz^3}{2\pi R^5} = \frac{3P}{2\pi R^2} \cos^3 \theta$$

应力及位移分量计算公式，在集中力作用点处是不适用的。

应力系数 $\alpha = \frac{3}{2\pi \left[1 + \left(\frac{r}{z} \right)^2 \right]^{5/2}}$ ，它是 $\left(\frac{r}{z} \right)$ 的函数，可查表4-2。

叠加原理:

由几个外力共同作用时所引起的某一参数（内力、应力或位移），等于每个外力单独作用时所引起的该参数值的代数和。对于线弹性体，可以应用叠加原理。

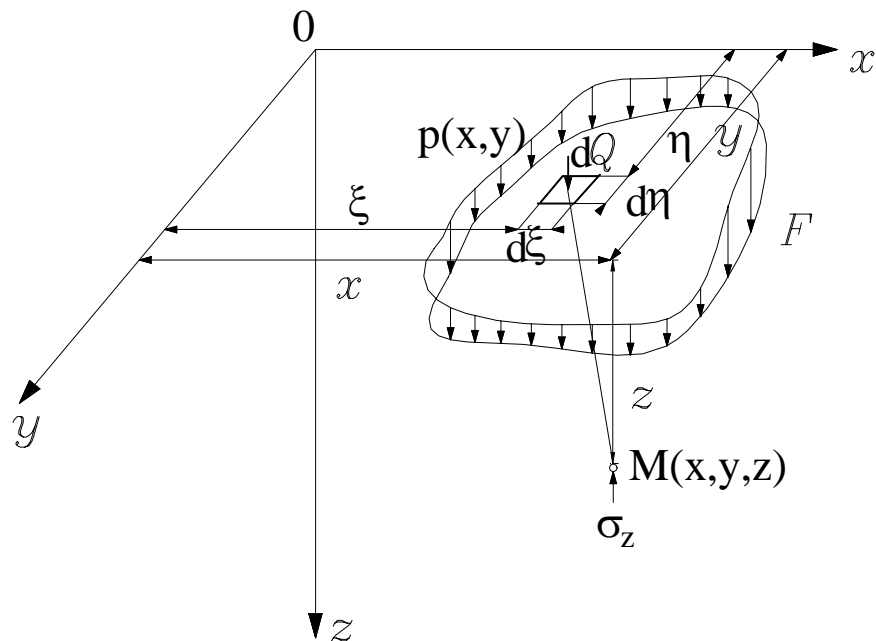


两个集中力作用下 σ_z 的叠加

二、竖向分布荷载作用下的土中应力计算

计算原理

将分布荷载分割为许多集中力，采用布西奈斯克公式计算各集中力作用的土中应力，再运用叠加原理（积分）计算最终的土中应力。



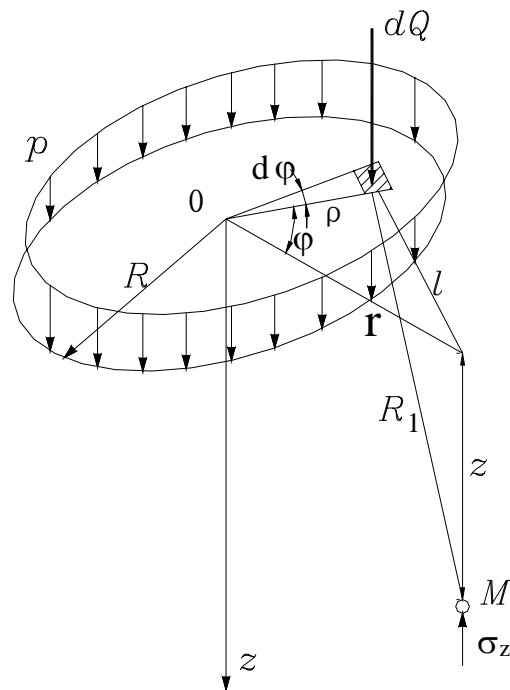
$$\sigma_z = \iint_F d\sigma_z = \frac{3z^3}{2\pi} \iint_F \frac{dQ}{R^5} = \frac{3z^3}{2\pi} \iint_F \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\left(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} \right)^5}$$

空间问题

1. 圆形面积上作用均布荷载时

竖向应力的表达式

$$\sigma_z = \alpha_c p$$



其中 R —— 圆面积的半径, m;

r —— 应力计算点 M 到 z 轴的水平距离, m;

α_c —— 应力系数, 它是 (r/R) 及 (z/R) 的函数, 当计算点位于圆形中心点下方时其值可查表4-6 pp66

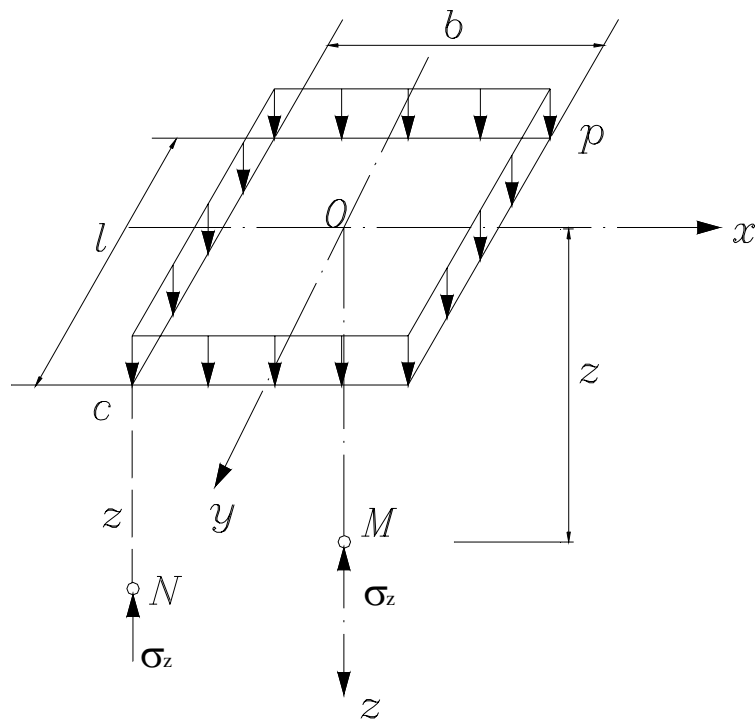
2. 矩形面积均布荷载作用时

(1) 矩形面积中点 O 下土中竖向应力计算

表示在地基表面作用一分布于矩形面积($l \times b$)上的均布荷载 p , 计算矩形面积中点下深度 z 处 M 点的竖向应力 σ_z 值

$$\sigma_z = \alpha_0 p$$

式中应力系数 α_0 是 $n=l/b$ 和 $m=z/b$ 的函数, 可由表4-8pp68查得。



(2) 矩形面积角点c下土中竖向应力计算

计算矩形面积角点c下深度z处N点的竖向应力 σ_z 时，可表示成：

$$\sigma_z = \alpha_a p$$

α_a 是 $n=l/b$ 和 $m=z/b$ 的函数，可由公式计算或表4-9pp69查得。

(3) 矩形均布荷载下，土中任意点竖向应力计算—角点法

在矩形面积上作用均布荷载时，若要求计算非角点下的土中竖向应力，可先将矩形面积按计算点位置分成若干小矩形，在计算出小矩形面积角点下土中竖向应力后，再采用叠加原理求出计算点的竖向应力 σ_z 值。这种计算方法一般称为角点法。

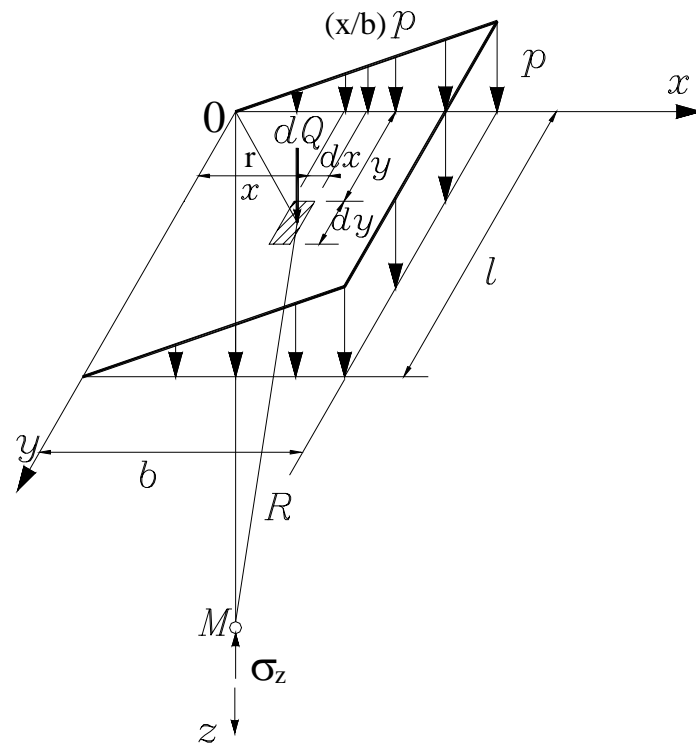
3. 垂直三角形分布荷载

在地基表面作用矩形 ($l \times b$) 三角形分布荷载, 计算荷载为零的角点下深度 z 处 M 点的竖向应力。

$$\sigma_z = \alpha_t p$$

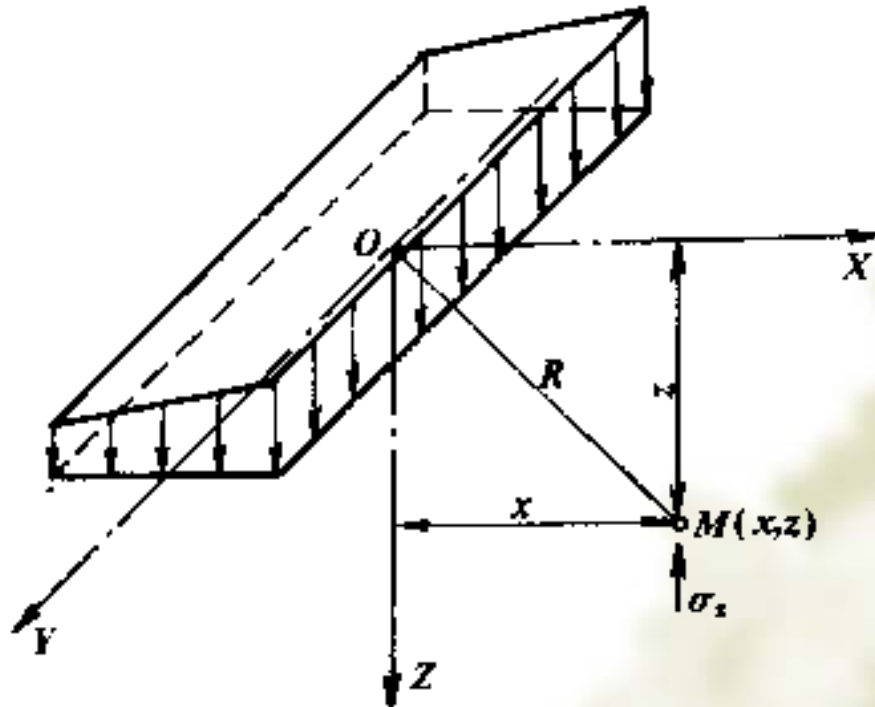
式中应力系数 α_t 是 $n=l/b$ 和 $m=z/b$ 的函数; 可查表 4-11 pp71

这里 b 值不是指基础的宽度, 而是指三角形荷载分布方向的基础边长



平面问题

若在半无限体表面作用无限长条形的分布荷载，荷载在宽度方向分布是任意的，但在长度方向的分布规律则是相同的。在计算土中任一点M的应力时，只与该点的平面坐标 (x, z) 有关，而与荷载长度方向Y轴坐标无关，这种情况属于平面应变问题。



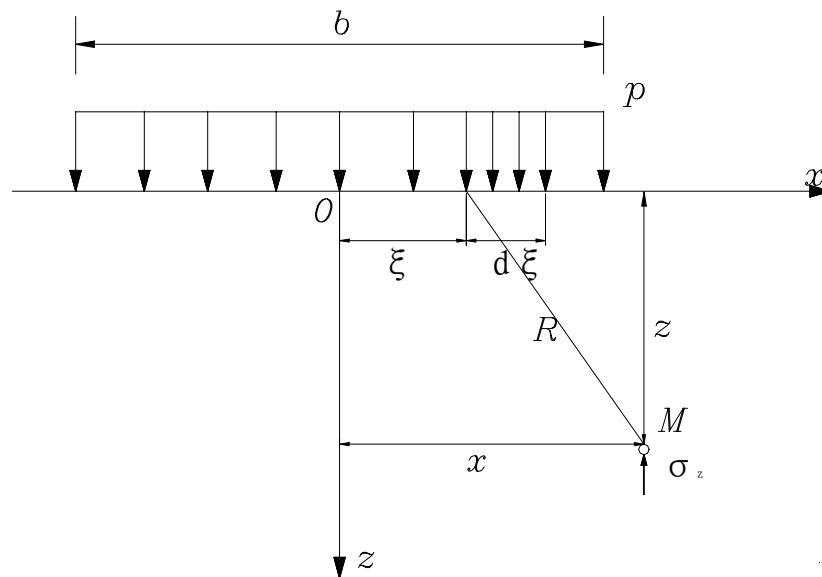
1. 均布条形荷载作用下土中应力计算

在土体表面作用分布宽度为 b 的均布条形荷载 p 时, 土中任一点的竖向应力可采用弹性理论中的弗拉曼 (Flamant) 公式在荷载分布宽度范围内积分得到:

$$\sigma_z = \frac{p}{\pi} \left[\arctg \frac{1-2n'}{2m} + \arctg \frac{1+2n'}{2m} - \frac{4m(4n'^2-4m^2-1)}{(4n'^2+4m^2-1)^2+16m^2} \right] = \alpha_u p$$

式中应力系数 $n' = \frac{x}{b}$ 及 $m = \frac{z}{b}$ 的函数, 可查表4-14 pp74。

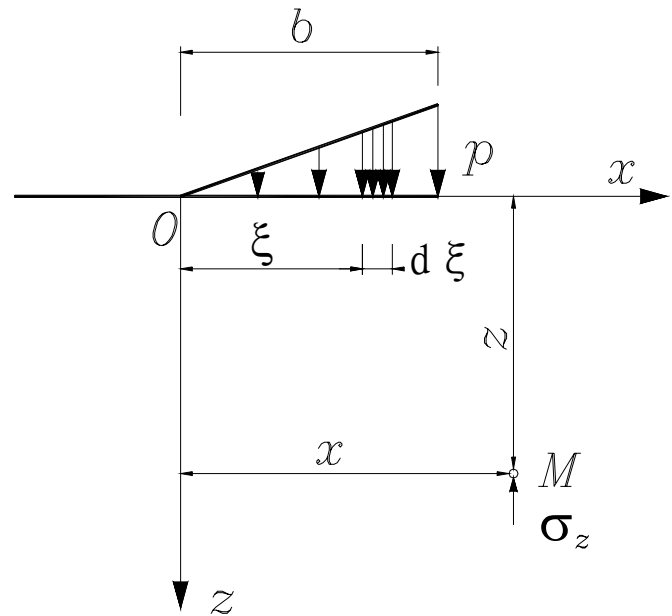
注意坐标轴的原点是在均布荷载的中点处。



2. 三角形分布条形荷载作用

三角形分布条形荷载作用其最大值为 p ，土中M点的竖向附加应力：

$$\sigma_z = \alpha_s p$$



α_s ——应力系数，它是 $n' = \frac{x}{b}$ 及 $m = \frac{z}{b}$ 的函数 查表4-15p76

坐标轴原点在三角形荷载的零点处。