

文章编号: 1001-4322(2005)10-1479-05

矢量非傍轴双曲余弦 高斯光束*

高曾辉^{1,2}, 吕百达²

(1. 宜宾学院 光电信息研究所, 四川 宜宾 644007; 2. 四川大学 激光物理与化学研究所, 四川 成都 610064)

摘 要: 引入了矢量非傍轴双曲余弦 高斯 (ChG) 光束概念。使用矢量瑞利 索末菲衍射积分公式推导出了矢量非傍轴 ChG 光束在自由空间传输的解析公式。矢量非傍轴 ChG 光束轴上和远场的解析式以及傍轴结果作为一般传输公式的特例给出。研究表明, 对矢量非傍轴 ChG 光束, 其非傍轴性主要由 f 参数决定, 但偏心参数会影响其横向光强剖面形状和非傍轴行为。

关键词: 激光光学; 矢量非傍轴双曲余弦 高斯 (ChG) 光束; 自由空间传输; f 参数; 偏心参数

中图分类号: O435 **文献标识码:** A

当光束的束腰宽度接近或小于一个波长, 或者有大的远场发散角时, 光束传输不再遵循傍轴传输规律^[1~4]。随着有大发散角的高功率半导体激光器, 光子晶体和微腔激光器等研究工作的发展, 实际工作中要求克服傍轴近似理论上的不自洽和不严格性^[1], 用更为严格的矢量波动方程理论来研究非傍轴光束的行为。对此已发展了微扰级数展开法、角谱法、微分算子法和非傍轴衍射积分等多种研究方法^[1~8]。另一方面, 双曲余弦 高斯 (ChG) 光束在光束合成, 平顶光束产生等方面引起了广泛的研究兴趣, 但限于傍轴范畴^[9,10]。本文引入了矢量非傍轴双曲余弦 高斯 (ChG) 光束概念。使用矢量瑞利 索末菲衍射积分公式推导出了矢量非傍轴 ChG 光束在自由空间的传输公式, 并对其传输特性进行了研究。所得结果深化了对非傍轴矢量光束传输特性的认识。

1 矢量非傍轴双曲余弦 高斯光束的传输公式

假设源 $z=0$ 平面上有沿 x 方向偏振的 3 维 ChG 光束, 其 x, y 分量为^[10]

$$\begin{cases} E_{0x}(x_0, y_0, 0) = \exp\left[-\frac{x_0^2 + y_0^2}{w_0^2}\right] \cosh(\alpha_0 x_0) \cosh(\alpha_0 y_0) \\ E_{0y}(x_0, y_0, 0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: w_0 为束腰宽度; α_0 为与 ChG 有关的光束参数。由矢量瑞利 索末菲衍射积分公式给出在 $z > 0$ 半空间波动方程的严格解为^[11]

$$\begin{cases} E_x(r) = -\frac{1}{2} \iint E_x(x_0, y_0, 0) \frac{\partial G(r, r_0)}{\partial z} dx_0 dy_0 \\ E_y(r) = -\frac{1}{2} \iint E_y(x_0, y_0, 0) \frac{\partial G(r, r_0)}{\partial z} dx_0 dy_0 \\ E_z(r) = \frac{1}{2} \iint [E_x(x_0, y_0, 0) \frac{\partial G(r, r_0)}{\partial x} + E_y(x_0, y_0, 0) \frac{\partial G(r, r_0)}{\partial y}] dx_0 dy_0 \end{cases} \quad (2)$$

式中: $r_0 = x_0 i + y_0 j$; $r = xi + yj + zk$; i, j, k 为在 x, y, z 方向的单位矢量。

$$G(r, r_0) = \frac{\exp(ik|r - r_0|)}{|r - r_0|} \quad (3)$$

式中 $k = 2\pi/\lambda$ 为波数, λ 为波长。将 $|r - r_0|$ 展开, 取近似为^[8]

$$|r - r_0| \approx r + \frac{x_0^2 + y_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0}{2r} \quad (4)$$

将 (3), (4) 式代入 (2) 式, 经复杂积分运算, 最后结果可整理为

* 收稿日期: 2005-04-18; 修订日期: 2005-09-21
基金项目: 国家自然科学基金资助课题 (10574097)
作者简介: 高曾辉 (1966—), 男, 博士研究生, 主要从事激光的传输与变换的研究; E-mail: dzxx3545065@163.com.

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = \frac{ikz \exp(ikr)}{8p^2 \bar{r}^2} \left[\exp\left(-\frac{q_{v1}^2}{4p}\right) + \exp\left(-\frac{q_{v2}^2}{4p}\right) \right] \left[\exp\left(-\frac{q_{v1}^2}{4p}\right) + \exp\left(-\frac{q_{v2}^2}{4p}\right) \right] \\ E_y(x, y, z) = 0 \\ E_z(x, y, z) = \frac{i \exp(ikr)}{8 p^2 \bar{r}^2} \left[(2px + q_{v1}) \exp\left(-\frac{q_{v1}^2}{4p}\right) + (2px + q_{v2}) \exp\left(-\frac{q_{v2}^2}{4p}\right) \right] \times \\ \left[\exp\left(-\frac{q_{v1}^2}{4p}\right) + \exp\left(-\frac{q_{v2}^2}{4p}\right) \right] \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$p = -\frac{1}{w_0^2} + i\frac{k}{2f}, \quad q_{vj} = (-1)^{j+1} \frac{x}{r} - ik\frac{x}{r}, \quad q_{vj} = (-1)^{j+1} \frac{y}{r} - ik\frac{y}{r} \quad (j = 1, 2) \quad (6)$$

(5)式为矢量非傍轴 ChG光束在自由空间传输的解析公式。可以看出, $x=0$ 时, $E_z(0, y, z) = 0$, 因此电场的纵向分量在 $y=0$ 面上的贡献为零, 但一般有 $E_z(x, 0, z) \neq 0$ 。

轴上光场可由 (5), (6)式中令 $x=y=0$ 求得

$$E_x(0, 0, z) = \frac{ik}{2zt} \exp(ikz) \exp\left(-\frac{z^2}{2t}\right), \quad E_y(0, 0, z) = 0, \quad E_z(0, 0, z) = 0 \quad (7)$$

式中: $t = -1/w_0^2 + i(k/2z)$ 。

因此轴上场强只有电场的横向分量 E_x 有贡献, 它与束腰宽度 w_0 和光束参数 t 有关。

对 (4)式作远场近似

$$|r - r_0| \approx r - \frac{xx_0 + yy_0}{r} \quad (8)$$

将 (3), (8)式代入 (2)式, 得到远场公式为

$$\begin{cases} E_{xf}(x, y, z) = -\frac{iz \exp(ikr)}{8f^2 k^2 \bar{r}^2} \left[\exp\left(\frac{i}{f} \frac{x}{2r} - \frac{a}{2}\right)^2 + \exp\left(\frac{i}{f} \frac{x}{2r} + \frac{a}{2}\right)^2 \right] \times \\ \left[\exp\left(\frac{i}{f} \frac{y}{2r} - \frac{a}{2}\right)^2 + \exp\left(\frac{i}{f} \frac{y}{2r} + \frac{a}{2}\right)^2 \right] \\ E_{yf}(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$E_{zf} = -\frac{i \exp(ikr)}{8f^2 k^2 \bar{r}^2} \left[\left(\frac{i}{f} \frac{x}{2r} + kfx - \frac{a}{2} \right) \exp\left(\frac{i}{f} \frac{x}{2r} - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{i}{f} \frac{x}{2r} + kfx + \frac{a}{2} \right) \exp\left(\frac{i}{f} \frac{x}{2r} + \frac{a}{2}\right)^2 \right] \times \\ \left[\exp\left(\frac{i}{f} \frac{y}{2r} - \frac{a}{2}\right)^2 + \exp\left(\frac{i}{f} \frac{y}{2r} + \frac{a}{2}\right)^2 \right]$$

$$f = 1/kw_0 \quad (10)$$

$$a = w_0 \quad (11)$$

式中: f 为 f 参数^[1], 与 $1/w_0$ 成正比, 是判断光束非傍轴性的一个重要参数^[1,2]; a 为偏心参数。

在 (5)式的推导中没有使用傍轴近似条件。对于傍轴光束, 将 (5)式 $\exp(ikr)$ 中 r 作傍轴近似为

$$r \cong z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \quad (12)$$

其余部分的 r 近似为 z , 则 (5)式简化为

$$\begin{cases} E_{xp}(x, y, z) = \frac{ik \exp(ikz)}{8zt} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \left[\exp\left(-\frac{h_{x1}^2}{4f}\right) + \exp\left(-\frac{h_{x2}^2}{4f}\right) \right] \times \\ \left[\exp\left(-\frac{h_{y1}^2}{4f}\right) + \exp\left(-\frac{h_{y2}^2}{4f}\right) \right] \\ E_{yp}(x, y, z) = 0 \\ E_{zp}(x, y, z) = \frac{i \exp(ikz)}{8 z^2 t} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \left[(2tx + h_{x1}) \exp\left(-\frac{h_{x1}^2}{4f}\right) + (2tx + h_{x2}) \exp\left(-\frac{h_{x2}^2}{4f}\right) \right] \times \\ \left[\exp\left(-\frac{h_{y1}^2}{4f}\right) + \exp\left(-\frac{h_{y2}^2}{4f}\right) \right] \end{cases} \quad (13)$$

式中
$$\begin{cases} h_{xj} = (-1)^{j+1} \left(0 - ik \frac{x}{z} \right) \\ h_{yj} = (-1)^{j+1} \left(0 - ik \frac{y}{z} \right) \end{cases}, \quad (j = 1, 2) \quad (14)$$

在傍轴近似下,可忽略 z 分量的贡献^[3], $E_{zp}(x, y, z) = 0$ 。(13)式在 2 维 (x, z) 情况下与文献 [10] 的公式 (5) 实质上是相同的。

对 (9) 式再作傍轴近似, 则得

$$E_{\text{apf}}(x, y, z) = -\frac{i \exp(ikz)}{8f^2 kz} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \left[\exp\left[\frac{i}{f} \frac{x}{2z} - \frac{a}{2}\right]^2 + \exp\left[\frac{i}{f} \frac{x}{2z} + \frac{a}{2}\right]^2 \right] \times \left[\exp\left[\frac{i}{f} \frac{y}{2z} - \frac{a}{2}\right]^2 + \exp\left[\frac{i}{f} \frac{y}{2z} + \frac{a}{2}\right]^2 \right] \quad (15)$$

(15) 式与傍轴条件下使用夫琅和费衍射积分公式的结果相同。

2 数值计算和分析

利用推导出的解析公式对非傍轴 ChG 光束在自由空间的传输特性作了计算分析。图 1 给出了非傍轴 ChG 光束 x 方向在 (a) $z=10z_0$, (b) $z=50z_0$ ($z_0 = w_0^2/\lambda$, 为瑞利长度) 处 $f=0.5$ 的归一化光强 $I = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$ 。与傍轴 ChG 光束 (见文献 [10] 图 1) 比较: 其相同之处是 ChG 光束的横向光强分布与偏心参数 a 有关; 不同的是, 在非傍轴情况下, 光强剖面形状还与 f 参数有关, 且随传输距离变化比傍轴情况要小得多。

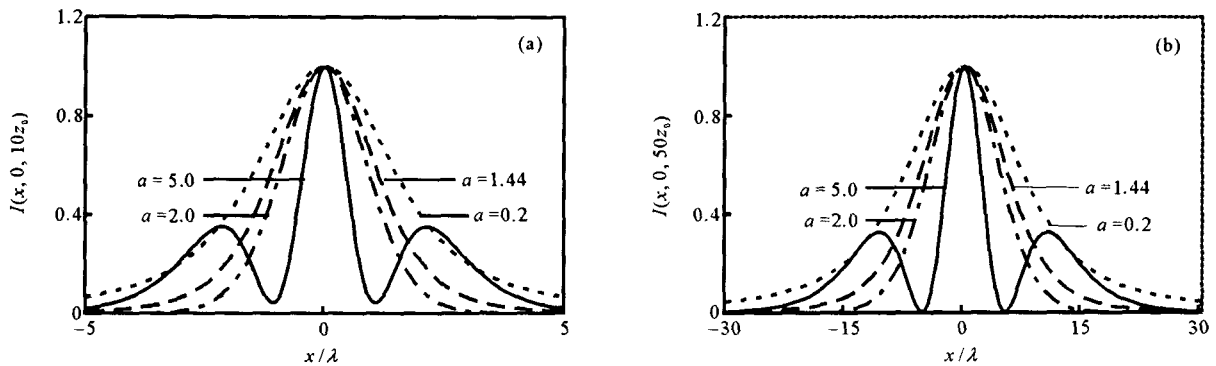


Fig 1 Normalized intensity distributions in the x direction of ChG beams with $f=0.5$

图 1 $f=0.5$ 的 ChG 光束在 x 方向的归一化光强分布

图 2~4 给出了 ChG 光束在 $z=10z_0$ 处 x, y 方向的归一化光强 I 和 z 分量 I_z 随 f 参数和偏心参数 a 的变化。为作比较, 按 (13) 式计算的傍轴结果 $I_p = |E_{xp}|^2 + |E_{yp}|^2 + |E_{zp}|^2$ 也一并示于图中。由图 2 可知, 当 $f=0.01$ 时, $I(x, 0, 10z_0)$ 和 $I_p(x, 0, 10z_0)$ 差别很小, $I_z(x, 0, 10z_0)$ 可以忽略。但当 $f=0.5$ 时 (图 3, 图 4), $I(x, 0, 10z_0)$ 和 $I_p(x, 0, 10z_0)$ 有显著差别, $I_z(x, 0, 10z_0)$ 不可以忽略, 这是因为当 f 较大, 即束宽与波长相比拟或更小时, 光束传输已不遵从傍轴方程。比较图 3 和图 4, 我们还看到偏心参数也要影响 ChG 光束的非傍轴行为。

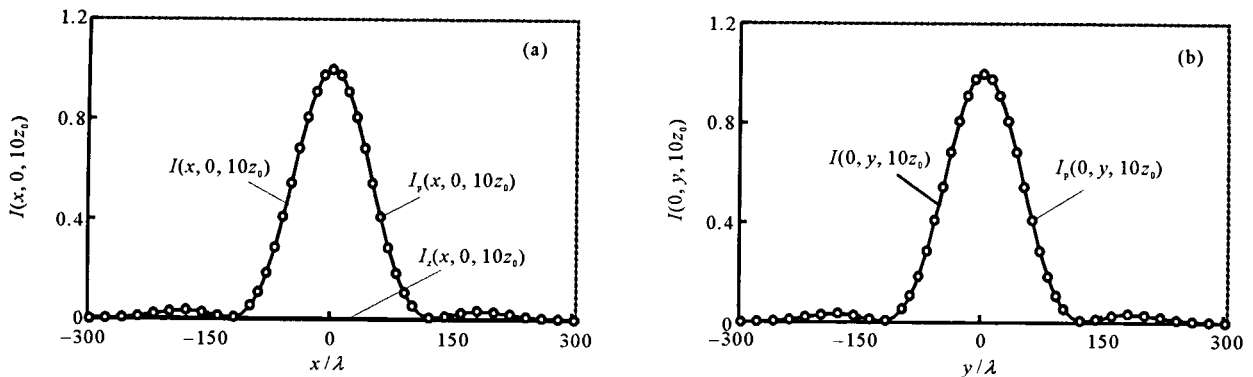


Fig 2 Normalized intensity distributions in the x and y directions of a ChG beam, $f=0.01$, $a=2.0$

图 2 ChG 光束在 x, y 方向的归一化光强分布, $f=0.01$, $a=2.0$

对非傍轴光束的远场传输特性, 可用远场发散角来描述。为此定义光束 x, y 方向的远场发散角为

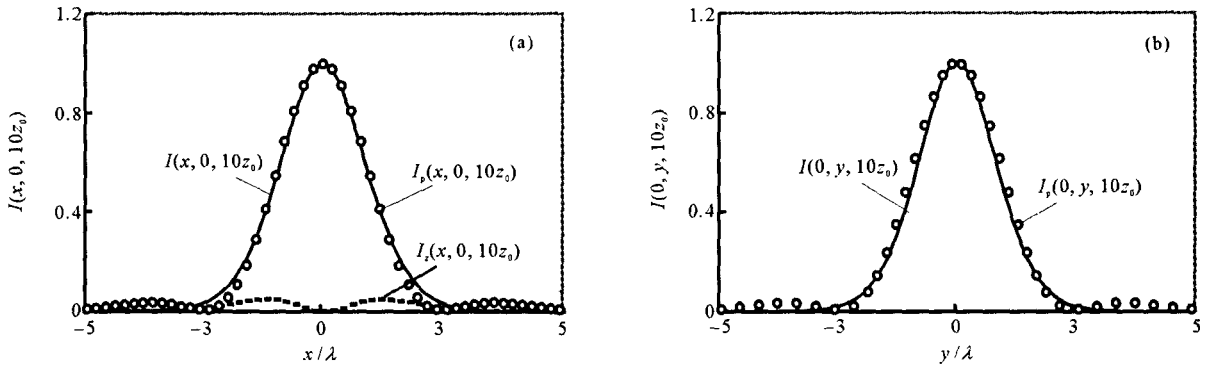


Fig 3 Normalized intensity distributions in the x and y directions of a ChG beam, $f=0.5, a=2.0$

图 3 ChG光束在 x, y方向的归一化光强分布, $f=0.5, a=2.0$

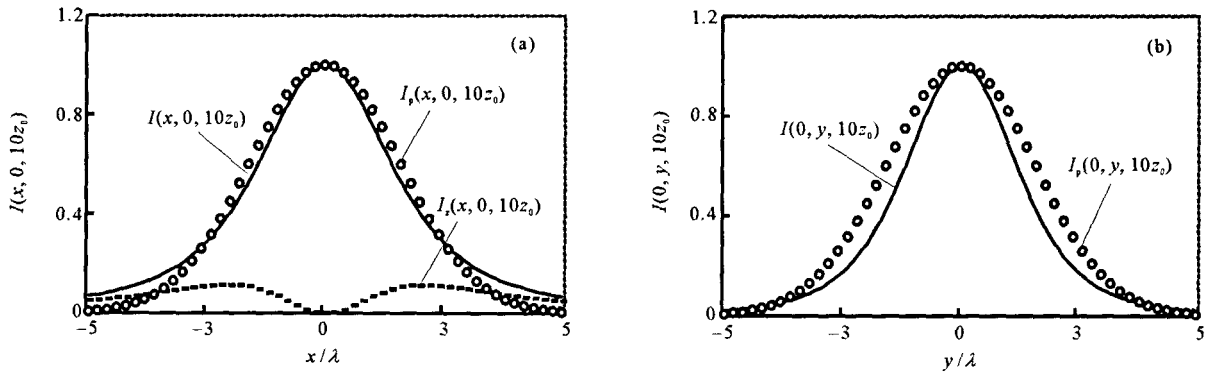


Fig 4 Normalized intensity distributions in the x and y directions of a ChG beam, $f=0.5, a=0.2$

图 4 ChG光束在 x, y方向的归一化光强分布, $f=0.5, a=0.2$

$$\begin{cases} x = \lim_z \arctan \frac{w_x(z)}{z} \\ y = \lim_z \arctan \frac{w_y(z)}{z} \end{cases} \quad (16)$$

式中 $w_x(z), w_y(z)$ 为光束在 x, y 方向的束宽, 定义为^[6]

$$\begin{cases} |I(w_x(z), 0, z)|^2 = \frac{1}{2} |I(0, 0, z)|^2 \\ |I(0, w_y(z), z)|^2 = \frac{1}{2} |I(0, 0, z)|^2 \end{cases} \quad (17)$$

图 5 为非傍轴 ChG 光束 x, y 方向的远场发散角 θ_x 和 θ_y 随 $1/f$ 的变化, 并与傍轴近似下由 (13), (16), (17) 式计算得出的远场发散角 θ_p 作了比较。由图 5 可以看出, 当 $f=0.25$ 时, θ_x, θ_y 和 θ_p 的差别可以忽略, $\theta_x = \theta_y = \theta_p$ 。随着 f 的增加, θ_x, θ_y 和 θ_p 的差别增大, 并且 θ_x, θ_y 还与偏心参数 a 有关。当 $1/f \rightarrow 0$ 时, $\theta_x \rightarrow 45^\circ, \theta_y \rightarrow 32.77^\circ$ 与文献 [6] 一致。而对于傍轴结果, 在 $1/f \rightarrow 0$ 时, θ_p 趋于无穷大, 此时傍轴近似早已失效了。

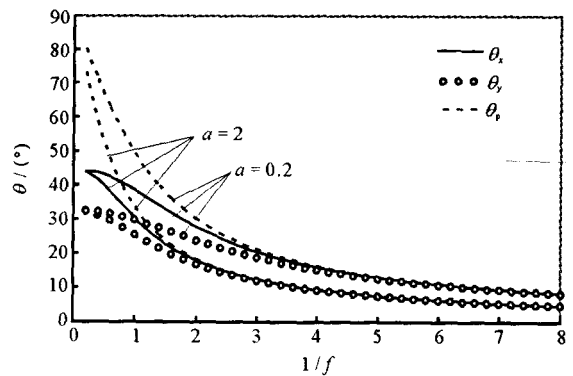


Fig 5 Far-field divergence angle vs $1/f$

图 5 远场发散角随 $1/f$ 的变化

3 结 论

本文利用矢量瑞利-索末菲衍射积分公式, 推导出非傍轴 ChG 光束通过自由空间传输的一般解析结果。将轴上和远场以及傍轴公式作为传输公式的特例而简单地得出对应的解析公式。用数值计算例对矢量非傍轴 ChG 光束的传输特性作了说明。分析表明, 非傍轴 ChG 光束与傍轴 ChG 光束有不同的光强分布和传输特性。ChG 光束的非傍轴性主要由 f 参数决定, 但偏心参

数会影响其光强分布和非傍轴行为。

参考文献:

- [1] Lax M, Louisell W H, McKnight W B. From Maxwell to paraxial wave optics[J]. *Phys Rev A*, 1975, **11**(4): 1365—1370.
- [2] Agrawal G P, Pattanatak D N. Gaussian beam propagation beyond the paraxial approximation[J]. *J Opt Soc Am A*, 1979, **68**(4): 575—578.
- [3] Chen C G, Konkola P T, Ferrera J, et al. Analyses of vector Gaussian beam propagation and the validity of paraxial and spherical approximations[J]. *J Opt Soc Am A*, 2002, **19**(2): 404—412.
- [4] 刘志军, 吕百达. 超短脉冲贝塞尔光束的非近轴效应对传输的影响[J]. *强激光与粒子束*, 2004, **16**(1): 5—8. (Liu Z J, Lu B D. Nonparaxial effect of ultrashort pulsed Bessel beam on their propagation. *High Power Laser and Particle Beams*, 2004, **16**(1): 5—8)
- [5] Wünsche A. Transition from the paraxial approximation to exact solutions of the wave equation and application to Gaussian beams[J]. *J Opt Soc Am A*, 1992, **9**(5): 765—774.
- [6] Zeng X, Liang C, An Y. Far-field propagation of an off-axis Gaussian wave[J]. *Appl Opt*, 1999, **36**: 6253—6256.
- [7] Duan K L, Lu B D. Vectorial nonparaxial propagation equation of elliptical Gaussian beams in the presence of a rectangular aperture[J]. *J Opt Soc Am A*, 2004, **21**(9): 1613—1620.
- [8] Lu B D, Duan K L. Nonparaxial propagation of vectorial Gaussian beams diffracted at a circular aperture[J]. *Opt Lett*, 2003, **28**(24): 2440—2442.
- [9] Tover A A, Casperson L W. Production and propagation of Hermite-sinusoidal-Gaussian laser beams[J]. *J Opt Soc Am A*, 1998, **15**(9): 2425—2432.
- [10] Lü B D, Mao H, Zhang B. Propagation properties of cosh-Gaussian beams[J]. *Opt Commun*, 1999, **164**: 165—170.
- [11] Luneberg R K. *Mathematical Theory of Optics*[M]. Berkeley: University of California, 1966.

Vectorial nonparaxial cosh-Gaussian beams

GAO Zeng-hui^{1,2}, LÜ Bai-da²

(1. *Institute of Optoelectronic Information, Yibin University, Yibin 644007, China;*

2. *Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China*)

Abstract: The concept of vectorial nonparaxial cosh-Gaussian (ChG) beams is introduced and their free-space propagation equation is derived analytically by using the vectorial Rayleigh-Sommerfeld diffraction integrals. The on-axis and far-field expressions of vectorial nonparaxial ChG beams and the paraxial results are given as special cases of the general propagation equation. It is found that for vectorial nonparaxial ChG beams, the f parameter mainly determines their nonparaxiality, but the decentered parameter affects their transversal intensity profile and nonparaxial behavior.

Key words: Laser optics; Vectorial nonparaxial cosh-Gaussian (ChG) beams; Free-space propagation; f parameter; Decentered parameter