

# 两种硬边衍射光束计算模拟方法的比较\*

季小玲<sup>1</sup>, 刘雅静<sup>1</sup>, 吕百达<sup>2</sup>

(1. 四川师范大学 电子工程学院, 四川 成都 610066; 2. 四川大学 激光物理与化学研究所, 四川 成都 610064)

**摘 要:** 以平顶高斯光束通过多个硬边光阑 ABCD 复杂光学系统的传输为例, 分别用矩阵表示法和复高斯函数展开法推导出其对应的解析公式, 并通过大量数值计算对两种方法进行比较。研究表明, 矩阵表示法其解析公式形式简洁、规范, 它在菲涅尔和夫琅禾费衍射区都很精确, 但仅适用于圆对称光束和光学系统。复高斯函数展开法其解析公式形式较为复杂, 它在非常靠近光阑的菲涅尔衍射区的误差较大, 但是它可适用于圆对称和非圆对称光束和光学系统。两种方法与直接对 Collins 公式积分比较都能节约大量机时。

**关键词:** 硬边衍射光束; 传输公式; 矩阵表示法; 复高斯函数展开法

**中图分类号:** O435 **文献标识码:** A

光束通过硬边光阑衍射的计算模拟是激光光学中一个重要的研究课题。对于硬边光阑, 通常是直接从菲涅耳衍射积分或 Collins 公式<sup>[1]</sup>出发作数值积分。对含有多个硬边光阑的复杂光学系统光传输的计算模拟, 实际工作中遇到的主要困难是随着光阑数的增加计算机时也增加, 以致在微机上计算不能进行。为此, 需要发展解析或近似解析的快速算法以提高计算效率并保证足够的计算精度。迄今, 已提出了多种模拟方法, 典型的包括矩阵表示法<sup>[2]</sup>、复高斯函数展开法<sup>[3]</sup>和递推算法<sup>[4]</sup>等。其中矩阵表示法和复高斯函数展开法因其适用性较强而尤其引起重视。矩阵表示法是根据光场分布在有限范围内并且具有圆对称性, 将衍射积分公式写成有限个贝塞尔函数之和, 再将其表示成矩阵形式。目前, 矩阵表示法仅限于研究圆对称光束通过多个软边光阑 ABCD 复杂光学系统<sup>[5]</sup>和多个硬边光阑-自由空间<sup>[2]</sup>的传输问题, 本文将矩阵表示法推广用于光束通过多个硬边光阑 ABCD 复杂光学系统。复高斯函数展开法用有限个复高斯函数之和来拟合硬边光阑窗函数。采用复高斯展开法, 对贝塞尔-高斯光束、厄米-高斯光束、平顶高斯光束(FGB)、有振幅调制和相位畸变光束等通过含有一个或多个硬边光阑 ABCD 光学系统的传输公式都能写为近似解析的形式<sup>[6~9]</sup>。以平顶高斯光束通过多个硬边光阑 ABCD 复杂光学系统的传输为例, 分别用矩阵表示法和复高斯函数展开法推导出其对应的近似解析公式, 并作了大量数值计算, 对两种方法的计算精度和计算时间进行比较分析。

## 1 理论模型

图 1 为含  $m$  个硬边光阑的近轴复杂光学系统。硬边光阑的半宽依次为  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , 相邻两光阑间的变换矩阵为  $\begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}$  ( $i=1, 2, 3, \dots, m$ )。在柱坐标系下, 设  $z=0$  处 FGB 光束的场分布为

$$E_0(r, 0) = \exp\left[-\frac{(N+1)}{w_0^2} r^2\right] \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left[\frac{(N+1)}{w_0^2} r^2\right]^n \quad (1)$$

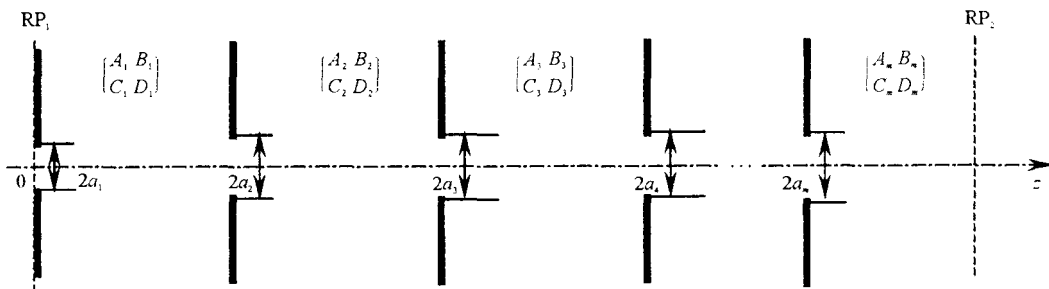


Fig. 1 A complicated optical system with multiple hard-edged apertures  
图 1 多光阑复杂光学系统

\* 收稿日期: 2004-10-28; 修订日期: 2005-01-17  
基金项目: 国家 863 计划项目资助课题; 四川省教育厅自然科学基金资助课题  
作者简介: 季小玲(1963—), 女, 博士, 教授, 主要从事激光束的传输与控制研究; E-mail: jiXL100@163.com。

式中:  $N = 0, 1, 2, \dots$  为 FGB 的阶数;  $w_0$  为 FGB 的束腰宽度;  $r$  为径向坐标。

### 1.1 矩阵表示法

设  $z = 0$  处光束的场分布为  $E_0(r, 0)$ 。由 Collins 公式<sup>[1]</sup>, 光束通过变换矩阵为  $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$  的光学系统(光阑半宽为  $a_1$ )后场分布为

$$E_1(r, z) = \frac{-ik}{2B_1} \exp(ikz_1) \int_0^{a_1} E_0(n, 0) \exp\left[\frac{ik}{2B_1}(A_1 n^2 + D_1 r^2)\right] J_0\left(\frac{krn}{B_1}\right) n \, dn \quad (2)$$

利用 Hankel 变换和贝塞尔函数的性质, 可以将衍射积分公式写成有限个贝塞尔函数之和<sup>[2]</sup>。假设衍射光场分布在有限范围内, 则一定存在足够大的  $R_1$  使得当  $r > R_1$  时,  $E_1(r, z)$  为零, 即  $R_1$  是  $E_1(r, z)$  不为零的径向尺寸。则在  $z$  处的场可表示为

$$E_1(r, z) = (-ik/2B_1/kR_1^2) \exp(ikz_1) \exp(ikr^2 D_1/2B_1) \times \sum_{s=1} E_0(j_s B_1/kR_1, 0) \exp(iA_1 B_1 j_s^2/2kR_1^2) \frac{J_0(j_s r/R_1)}{[J_1(j_s)]^2} \quad (3)$$

式中:  $j_s$  是零阶贝塞尔函数  $J_0$  的所有正零点,  $J_1$  是一阶贝塞尔函数。对于  $j_s > kR_1 a_1/B_1$ , 即  $j_s B_1/kR_1 > a_1$ , 有  $E_0(j_s B_1/kR_1, 0) = 0$ 。  $j_{M_1+1}$  是第一个满足  $j_{M_1+1} > kR_1 a_1/B_1$  条件的第一类零阶贝塞尔函数的零点, 于是(3)式中的求和运算截断到  $s = M_1$ 。

同样的方法可处理光束继续通过受光阑限制的  $\begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}$  光学系统(光阑半宽为  $a_i$ )后的场分布。为了简便起见, 引入矩阵来描述光束的传输。令  $j_{M_i+1}$  是在第  $i$  个光阑面处第一个满足  $j_{M_i+1} > kR_i a_i/B_i$  条件的第一类零阶贝塞尔函数的零点,  $E_i$  是有  $M_i$  个元素的列阵, 其矩阵元素为

$$u_{i,s} = E_{i-1}(j_s B_i/kR_i, z_{i-1}), \quad s = 1, 2, \dots, M_i \quad (4)$$

$V_i$  是有  $M_{i+1} \times M_i$  个元素的矩阵, 其矩阵元素为

$$v_{i,s} = (-ik/2B_i/kR_i^2) \exp(ikz_i) \exp(ij_s^2 B_{i+1}^2 D_i/2k B_i R_{i+1}^2) \exp(ij_s^2 A_i B_i/2kR_i^2) \times J_0(j_s j_t B_{i+1}/kR_i R_{i+1}) [J_1(j_s)]^{-2}, \quad 1 \leq s \leq M_i, \quad 1 \leq t \leq M_{i+1} \quad (5)$$

式中:  $z_i$  是第  $i$  个和第  $i+1$  个光阑之间的距离。

于是  $E_i = V_i \times E_{i-1}$ 。光束通过受光阑限制的  $\begin{pmatrix} A_m & B_m \\ C_m & D_m \end{pmatrix}$  光学系统(光阑半宽为  $a_m$ )后, 其场分布为(求和截断到  $s = M_m$ )

$$E_m = V_m \times V_{m-1} \times \dots \times V_1 \times E_0 \quad (6)$$

### 1.2 复高斯函数展开

半宽为  $a$  的硬边光阑的窗口函数为

$$T(r) = \begin{cases} 1, & |r| \leq a \\ 0, & |r| > a \end{cases} \quad (7)$$

将(2)式表示的矩孔函数展为复高斯函数之和<sup>[3]</sup>

$$T(r) = \sum_{j=1}^M F_j \exp\left[-\frac{G_j r^2}{a^2}\right] \quad (8)$$

式中:  $F_j$  和  $G_j$  分别为展开系数和复高斯函数系数。当  $M = 10$  时,  $F_j$  和  $G_j$  取值见文献[3]中表 1。

将(1)和(8)式代入(2)式, 并利用积分公式

$$\int_0^{\infty} \exp(-t) t^n J_0\left(2\sqrt{\frac{t}{t^2}}\right) dt = n! \exp(-) L_n(-) \quad (9)$$

可得到 FGB 通过变换矩阵为  $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$  的光学系统(光阑半宽为  $a_1$ )后的传输公式为

$$E_1(r, z) = \frac{ik}{2B_1} \exp\left[-\left(\frac{ikD_1}{2B_1} + \frac{k^2}{4B_1^2 P_1}\right) r^2\right] \sum_{n=0}^N \left(\frac{\sqrt{N+1}}{w_0}\right)^{2n} \sum_{j=1}^M F_{j_1} P_1^{(n+1)} L_n\left(\frac{Q_1 k^2}{4B_1^2 P_1} r^2\right) \quad (10)$$

表 1 两种方法的计算误差和计算时间的比较  
Table 1 Comparison of calculation accuracy and time of the two methods

	$z / m$	2	0.3	0.1	0.06
relative maximum error/ %	matrix representation	0.7	1.7	1.3	1.1
	complex Gaussian function expansion	0.8	1.4	5.8	41.0
ratio of computational time	matrix representation	1 200	1 220	1 240	1 260
	complex Gaussian function expansion	1 30	1 140	1 500	1 800

式中 
$$P_1 = \frac{G_{j_1}}{a_1^2} + \frac{N+1}{w_0^2} + \frac{ikA_1}{2B_1}, \quad Q_1 = 1 \quad (11)$$

利用 Collins 公式和积分公式

$$\int_0^{\infty} xy^{1/2} \exp\left[-\frac{Px^2}{2}\right] L_n\left[\frac{Qx^2}{2}\right] J_0(xy) dx = \frac{y^{1/2}(P-Q)^n}{P^{n+1}} \exp\left[-\frac{y^2}{2P}\right] L_n\left[\frac{Qy^2}{2P(Q-P)}\right] \quad (12)$$

得到 (10) 式表征的光束通过受光阑限制的  $\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$  (光阑半宽为  $a_2$ ) 光学系统后的传输公式为

$$E_2(r, z) = \frac{(ik)^2}{2B_1 B_2} \prod_{n=0}^N \left( \frac{\sqrt{N+1}}{w_0} \right)^{2n} \prod_{j_1=1}^M F_{j_1} \prod_{j_2=1}^M F_{j_2} P_1^{(n+1)} \frac{(P_2 - Q_2)^n}{P_2^{n+1}} \times \exp\left[-\left(\frac{ikD_2}{2B_2} + \frac{k^2}{2B_2^2 P_2}\right) r^2\right] L_n\left[\frac{k^2 Q_2}{2B_2^2 P_2 (Q_1 - P_2)} r^2\right] \quad (13)$$

式中

$$P_2 = \frac{2G_{j_2}}{a_2^2} + \frac{ikD_1}{B_1} + \frac{k^2}{2B_1^2 P_1} + \frac{ikA_2}{B_2}, \quad Q_2 = \frac{k^2}{2B_1^2 P_1} \quad (14)$$

依此类推,得到 FGB 通过  $m$  个受光阑限制的  $\begin{pmatrix} A_m & B_m \\ C_m & D_m \end{pmatrix}$  硬边光阑光学系统 (光阑半宽为  $a_m$ ) 传输的计算

公式为

$$E_m(r, z) = \frac{(ik)^m}{2B_1 B_2 \dots B_m} \prod_{n=0}^N \left( \frac{\sqrt{N+1}}{w_0} \right)^{2n} \prod_{j_1=1}^M F_{j_1} \prod_{j_2=1}^M F_{j_2} \dots \prod_{j_m=1}^M F_{j_m} P_1^{(n+1)} \frac{(P_2 - Q_2)^n}{P_2^{n+1}} \dots \frac{(P_m - Q_m)^n}{P_m^{n+1}} \times \exp\left[-\left(\frac{ikD_m}{2B_m} + \frac{k^2}{2B_m^2 P_m}\right) r^2\right] L_n\left[\frac{k^2 Q_m}{2B_m^2 P_m (Q_m - P_m)} r^2\right] \quad (15)$$

式中

$$P_m = \frac{2G_{j_m}}{a_m^2} + \frac{ikD_{m-1}}{B_{m-1}} + \frac{k^2}{B_{m-1}^2 P_{m-1}} + \frac{ikA_m}{B_m}, \quad Q_m = \frac{k^2 Q_{m-1}}{B_m^2 P_m (Q_{m-1} - P_m)} \quad (16)$$

(15) 式中系数  $P_m$  和  $Q_m$ , 当  $m = 1, 2$  时分别由 (11) 和 (14) 式给出,  $m = 3$  时由 (16) 式给出。

## 2 数值计算与分析

以图 2 所示的三光阑-透镜系统为例进行数值计算,取  $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ ,  $w_0 = 1 \text{ mm}$ ,各透镜焦距  $f$  均为  $2 \text{ m}$ ,透镜间的间距均为  $2 \text{ m}$ ,3 个光阑的半宽依次为  $a_1 = 1 \text{ mm}$ ,  $a_2 = 1.2 \text{ mm}$  和  $a_3 = 0.8 \text{ mm}$ ,FGB 的阶数  $N = 4$ 。图 3 为 FGB 通过该三光阑-透镜系统后在不同位置处的横向光强分布,其中实线为矩阵表示法和复高斯展开法计算的结果,小黑点为直接对 Collins 公式积分的结果。图 4 为与图 3 对应的矩阵表示法和复高斯展开法计算结果与直接对 Collins 公式积分结果的相对误差曲线,其中  $\Delta(r, z)$  为光强的绝对误差,  $I_{\text{max}}$  为直接对 Collins 公式积分所得结果的最大值。

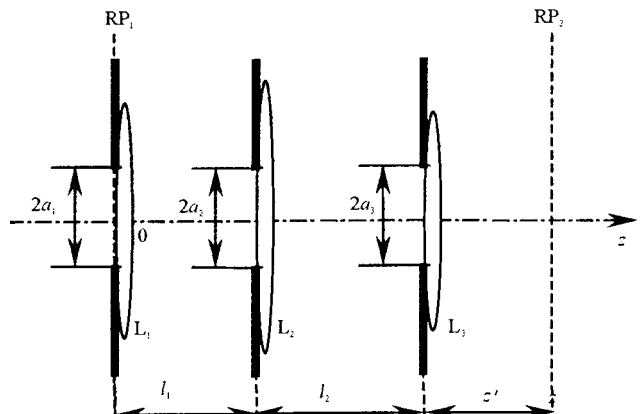
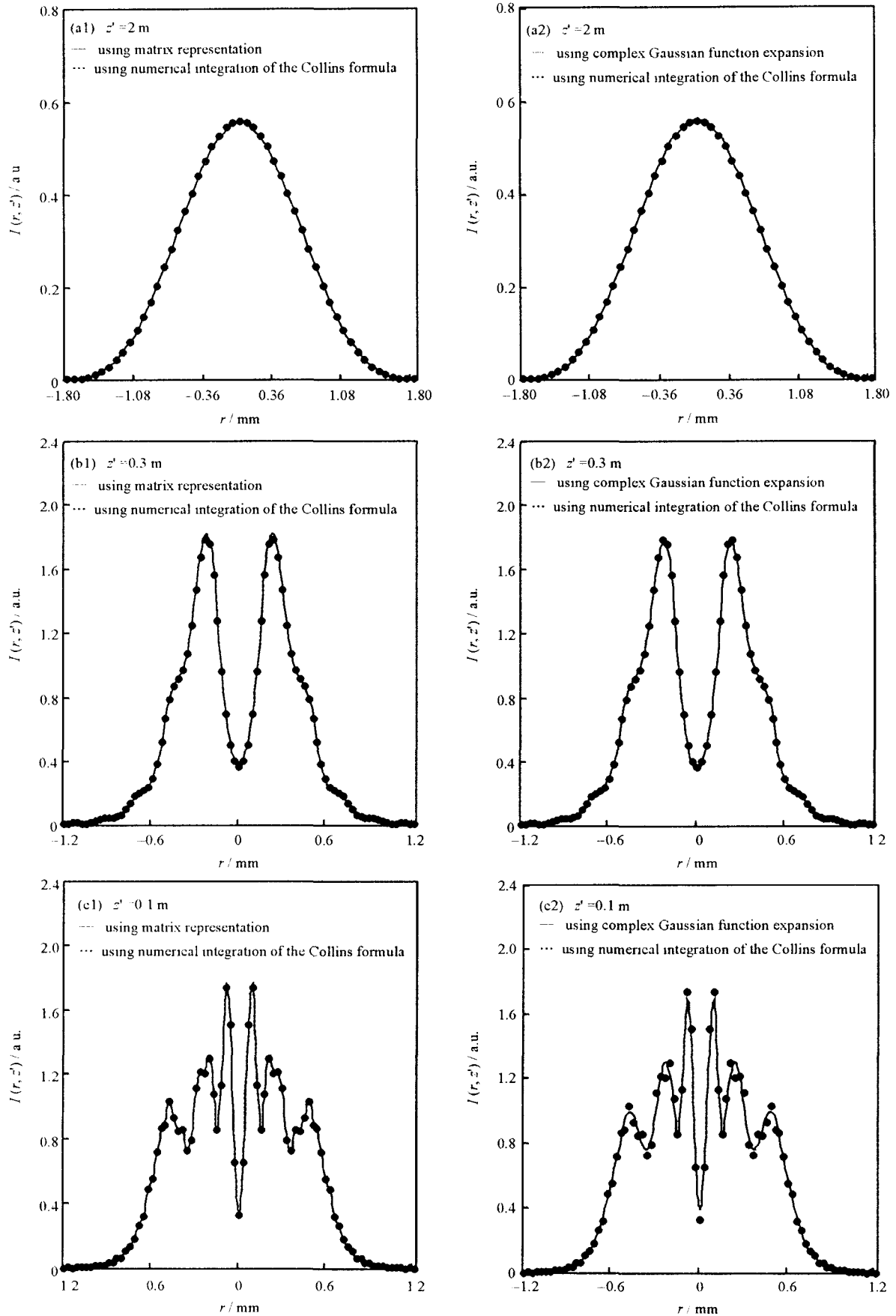


Fig. 2 A three-aperture lens optical system  
图 2 三光阑-透镜系统

图 3 和图 4 表明,在夫琅和费衍射区( $z = f = 2 \text{ m}$ ),矩阵表示法和复高斯展开法计算结果与直接对 Collins公式积分结果都符合得甚好(图3(a1)和(a2)),最大相对误差都不超过0.8%(图4(a1)和(a2))。在菲涅



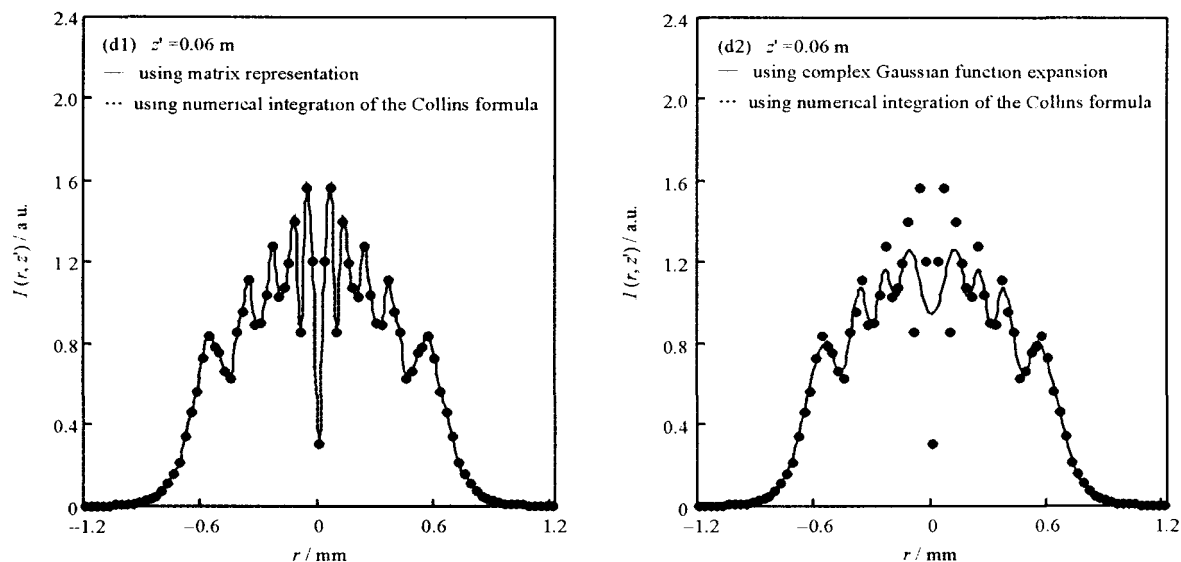
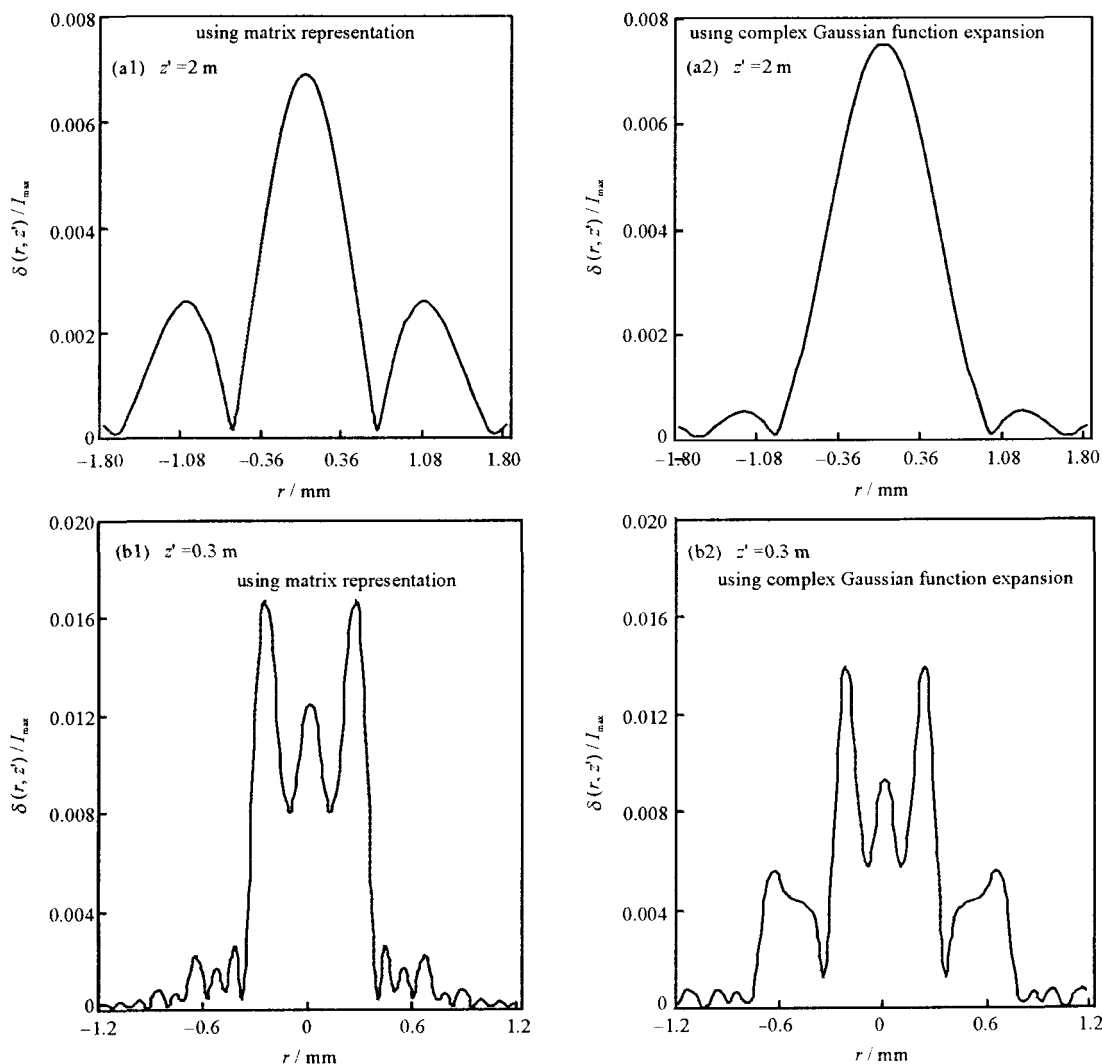


Fig. 3 Transversal intensity distribution of an FGB passing through the three-aperture lens system shown in Fig. 2

图 3 FGB 通过图 2 所示三光阑-透镜系统的横向光强分布

耳衍射区,当考察面离光阑的距离  $z = 0.3 \text{ m}$  时,两种快速算法也很精确(图 3(b1)和(b2)),最大相对误差分别为 1.7%和 1.4%(图 4(b1)和(b2))。但随着考察面进一步靠近光阑, $z = 0.1 \text{ m}$  时,矩阵表示法计算的结果仍非常精确(图3(c1)),最大相对误差为1.3%(图4(c1)),而复高斯展开法计算结果的误差增大(图3(c2)),



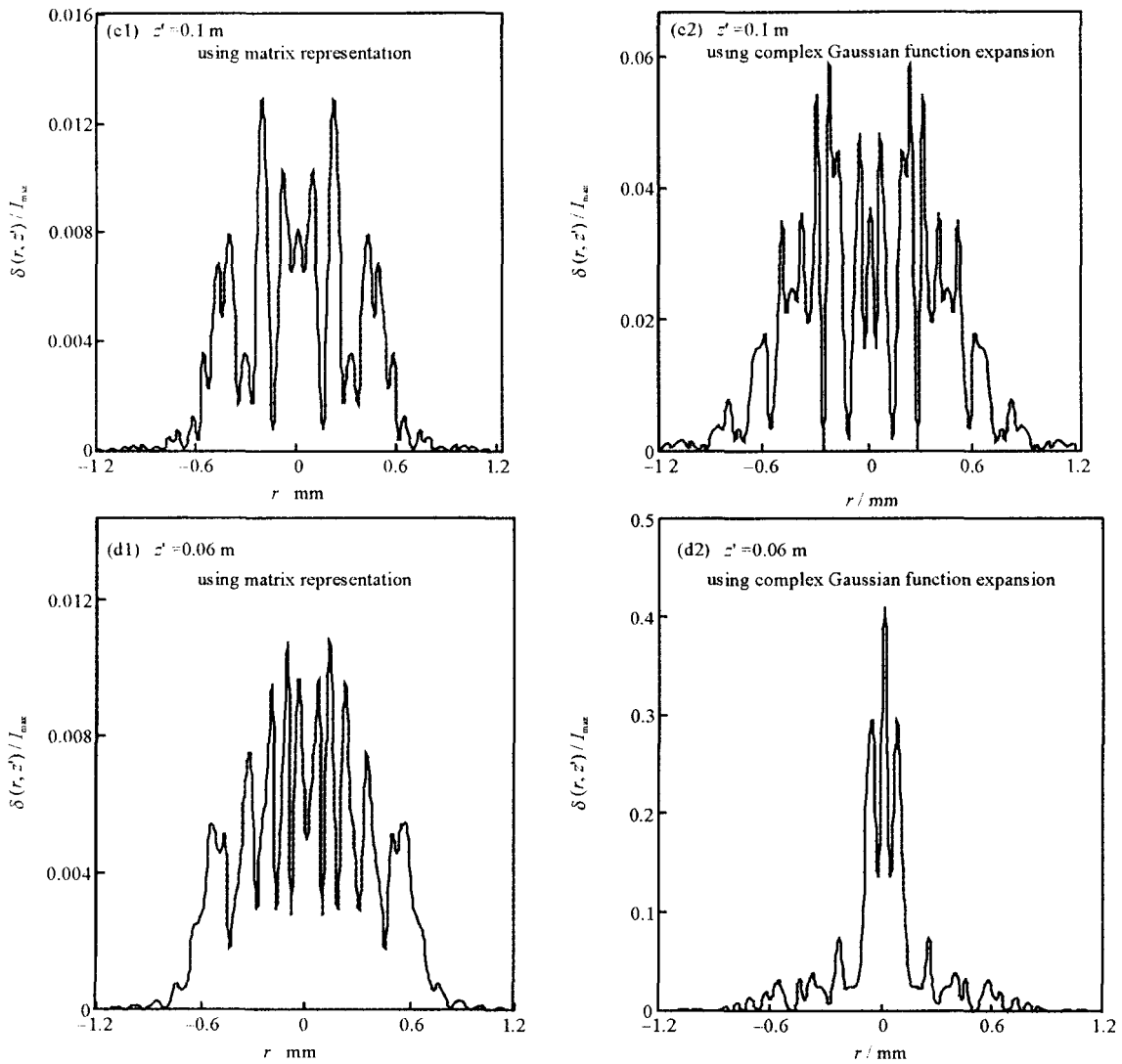


Fig. 4 Calculation errors corresponding to Fig. 3

图 4 对应于图 3 的计算误差

最大相对误差为 5.8 % (图 4(c2))。当  $z = 0.06$  m 时, 矩阵表示法计算结果与直接对 Collins 公式积分结果仍然符合的很好 (图 3(d1)), 最大相对误差为 1.1 % (图 4(d1)), 而复高斯展开法与直接对 Collins 公式积分结果相差甚远 (图 3(d2)), 最大相对误差高达 41.0 % (图 4(d2))。

表 1 为与图 3 对应的矩阵表示法与复高斯展开法的计算误差和计算时间的比较, 其比较标准为直接对 Collins 公式积分的结果。由表 1 可知, 随着  $z$  的减小 (考察面逐渐靠近光阑), 矩阵表示法对应的最大相对误差均小于 2 %, 机时比缓慢减少, 当  $z = 0.06$  m 时, 机时比为 1 : 260。随着  $z$  的减小, 复高斯展开法对应的最大相对误差增大, 机时比迅速减少, 当  $z = 0.06$  m 时, 机时比为 1 : 800, 但误差太大, 所用机时虽少, 但这时复高斯展开法已不能描述光束的传输。

### 3 结 论

本文将矩阵表示法推广用于研究光束通过多个硬边光阑  $ABCD$  复杂光学系统的传输。分别用矩阵表示法和复高斯函数展开法推导出了 FGB 通过多个硬边光阑  $ABCD$  复杂光学系统的传输的近似解析公式, 并通过大量数值计算对两种方法作了比较分析。两者的区别主要表现在 4 个方面。(1) 计算精度。矩阵表示法在菲涅耳衍射区和夫琅和费衍射区均有很高的精度, 但其计算精度与  $R_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) 选取有关,  $R_i$  的选取与光束的衍射发散程度有关, 对多光阑光学系统, 衍射光束在不同位置光阑处的发散情况不同。一般  $R_i$  取为光束扩展尺寸的 10 倍左右。复高斯函数展开法除在非常靠近光阑的近场处外, 一般能够保证计算精度。当考察面距光阑非常近时, 复高斯展开法失效。其计算误差是因为用有限个复高斯函数之和不能完全拟合硬边窗口函数

引起的。(2) 计算时间。与直接对 Collins 公式积分计算相比,两种算法均能节约大量机时。矩阵表示法对应的机时比随着考察面逐渐靠近光阑的变化不大,而复高斯展开法对应的机时比随着考察面逐渐靠近光阑而迅速减少,但同时计算精度降低。(3) 适用范围。矩阵表示法仅适用于圆对称光束和光学系统,而复高斯展开法可适用于非圆对称光束和光学系统。对常见光束,使用复高斯函数展开法都能得到近似解析传输公式。(4) 解析公式的简洁性。矩阵表示法其解析公式形式简洁、规范,而用复高斯函数展开法得到解析传输公式形式较为复杂。本文所用方法仍适用于其它种类的光束,在实际模拟计算中可根据不同情况选择不同的算法进行计算。例如,当考察面距光阑非常近,且光束和光学系统具有圆对称性时,应采用矩阵表示法;当光束或光学系统为非轴对称时,应采用复高斯函数展开法。

### 参考文献:

- [1] Collins S A. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics[J]. *J Opt Soc Am*, 1970, **60**(7): 1168—1177.
- [2] Bloisi F, Vicari L. Diffraction field of a circularly symmetric beam through a sequence of apertures[J]. *Appl Opt*, 1991, **30**(13): 1595—1597.
- [3] Wen J J, Breazeale M A. A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams[J]. *J Acoust Soc Am*, 1988, **83**(5): 1752—1756.
- [4] Tao X Y, Zhou N R, L ÜB D. Recurrence propagation equation of Hermite-Gaussian beam through a paraxial optical ABCD system with hard-edged aperture[J]. *Optik*, 2003, **114**(3): 113—117.
- [5] Ding D, Liu X. Approximate description for Bessel, Bessel-Gauss, and Gaussian beams with finite aperture[J]. *J Opt Soc Am A*, 1999, **16**(6): 1286—1293.
- [6] Vicari L, Bloisi F. Matrix representation of axisymmetric optical systems including spatial filters[J]. *Appl Opt*, 1989, **28**(21): 4682—4686.
- [7] 季小玲, 吕百达. 厄米-高斯光束通过多个硬边光阑复杂光学系统变换的计算模拟[J]. 强激光与粒子束, 2003, **15**(9): 845—849. (Ji XL, L ÜB D. Numerical simulation of the transformation of Hermite-Gaussian beams through a complicated optical system with multiple hard-edged apertures. *High Power Laser and Particle Beams*, 2003, **15**(9): 845—849)
- [8] Ji XL, L ÜB D. Propagation of flattened Gaussian beam through multi-apertured optical ABCD systems[J]. *Optik*, 2003, **114**(9): 394—400.
- [9] L ÜB D, Ji XL. An approximate analytical study of laser beams with amplitude modulations and phase fluctuations through a multi-apertured ABCD system[J]. *Pure and App Opt*, 2004, **6**(1): 161—166.

## Comparison of two numerical simulation methods for hard-edged diffracted beams

JI Xiao-ling<sup>1</sup>, LIU Ya-jing<sup>1</sup>, L ÜBai-da<sup>2</sup>

(1. College of Electronic Engineering, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China;

2. Institute of Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu, 610064 China)

**Abstract:** By using the methods of matrix representation and complex Gaussian function expansion, the recurrence propagation formulae of a flattened Gaussian beam through multi-apertured optical ABCD systems are derived. Numerical examples are given to compare the two numerical simulation methods. It is shown that the form of matrix formulae is simple, and the matrix formulation is the applicable to the Fraunhofer and Fresnel regions. However, this method is suited only to circularly symmetric optical beams and systems. On the other hand, the form of formulae derived by the method of complex Gaussian function expansion is complex, and its calculation errors become noticeable in the near Fresnel region closer to the aperture. But this method is suited to both circularly symmetric and circularly un-symmetric optical beams and systems. In addition, both methods reduce the computational time greatly in comparison with the direct integration of the Collins formula.

**Key words:** Hard-edged diffracted beam; Propagation equation; Matrix representation; Complex Gaussian function expansion