

# 重频结构可控性

姚国风,高雪飞

(吉林大学 机械科学与工程学院,长春 130022)

**摘要:**给出了具有可操作的重特征值系统(完备的及亏损的)完全可控性的两个必要条件及其证明,同时还给出两个充分条件及其证明,并提出了一种控制力分布矩阵  $\mathbf{B}$  的选取方法。所给出的4个定理和一个选择方法解决了任意线性结构的实际可控性问题,指出了结构完全可控需要的执行器的最小数量及其位置,使得对结构可控有了更清晰的认识。最后用数值算例说明条件和方法的正确性。

**关键词:**固体力学;可控性;孤立特征值系统;重特征值系统;状态空间方程

**中图分类号:**O34 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-5497(2008)06-1359-07

## Controllability of structure with repeated eigenvalues

YAO Guo-feng, GAO Xue-fei

(College of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China)

**Abstract:** Two necessary conditions of complete controllability of a repeated eigenvalues system (regular and defective system) and their proofs are given. At same time two sufficient conditions, their proofs and a method of selecting control force distribution matrix are also presented. In the following sections, the four theorems and one method of selecting force distribution matrix are given. They solved practical controllability of any linear structures and given the least number and locations of actuators if the structure is completely controllable. So that makes us understand structural controllability clearly. Finally, some numerical examples are given to verify our theorems and method.

**Key words:** solid-state mechanics; controllability; distinct eigenvalues system; repeated eigenvalues system; state space equation

由 Kalman 于 1960 年提出并研究的<sup>[1]</sup>可控性与可观性是动态系统的十分重要的结构属性<sup>[2-3]</sup>,在过去的 40 多年中,这些系统属性及其有关问题不断地被其他学者探究。

一个系统(结构)可以被分类为完备的和亏损的。如果系统具有完全的特征子空间,称之为完

备系统,否则称之为亏损系统。如果系统所有的特征值都是孤立的,那么系统一定是完备的;对于这样的系统,如果此时令控制输入的阶数  $m=1$ ,则当状态空间形式中的控制力分布矩阵  $\mathbf{B}$ (此时  $\mathbf{B}$  为一列向量)不垂直于所有特征向量时,系统是完全可控的<sup>[4-5]</sup>。当一个系统具有重特征值的时

收稿日期:2007-12-10.

基金项目:吉林大学“985 工程”项目;吉林省科技发展计划项目(20080540);国家自然科学基金项目(59575025).

作者简介:姚国风(1962-),男,教授,博士生导师.研究方向:振动及振动控制理论,表界面形貌的力学行为分析.

E-mail:yaogf@jlu.edu.cn

候,对单一控制输入而言,系统几乎总是不可控的。对于孤立特征值系统的控制问题,已有很多文献对其进行了讨论<sup>[2,6-10]</sup>。但对于具有重特征值的系统,则没有太多的研究者关注<sup>[11-14]</sup>。

作者对系统可控性进行了研究,给出了具有可操作的重特征值系统完全可控性的两个必要条件及其证明,同时还给出两个充分条件及其证明,并提出了一种控制力分布矩阵 **B** 的选取方法。最后用数值算例说明了条件和方法的正确性。

## 1 具有重特征值的系统的可控性

### 1.1 可控性的两个等价定义<sup>[4]</sup>

线性时不变系统的状态方程可表示成

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2)$$

式中:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T; \\ \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_m]; \\ \mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_m)^T; \end{cases} \quad (3)$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}; \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{p \times 1}; \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

上面各式中符号的含义为: **x** 为状态向量; **y** 为输出向量; **u** 为输入力向量; **A** 为系统矩阵; **C** 为传感器分布矩阵, **B** 为控制力分布矩阵。

**定义 1** 系统(**A**, **B**)是完全可控的,当且仅当可控性矩阵

$$\ell = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \cdots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (4)$$

的秩为  $n$ 。

**定义 2** 系统(**A**, **B**)是完全可控的,当且仅当系统矩阵 **A** 的每个模态都与控制输入相联系。

### 1.2 具有重特征值的系统

机械系统的特征值绝大多数都是孤立特征值,但偶尔会遇到具有重特征值的系统。重特征值系统可在具有物理对称性的系统中找到。例如在圆形薄板振动问题中会出现成对的“径向节点”模态,即:一个模态中的节点与另一个模态中的反节点相一致,这种现象的发生是由于节点在角度方向上不存在特殊固定的缘故,这与在数学上的重特征值特征向量的任意线性组合仍然是特征向量的事实刚好相符。在这个特殊的例子中,每个特征值都对唯一一个线性无关的特征向量,系统矩阵可以通过由模态向量构成的相似变换转化为模态坐标系下的对角阵。具有孤立特征值的系统以及具有重特征值但特征向量系是完全的系统被称为完备系统。

具有重特征值并且特征向量系是不完全的系统相对来说较少受到人们的关注,原因可能是由于系统矩阵不能被相似对角化而导致理论分析相对复杂。在这种情况下 Jordan 标准型<sup>[15]</sup>是常用的分析手段。

相应于特征值  $\lambda_i$ (表示第  $i$  个特征值)的独立特征向量的个数被称为是  $\lambda_i$  的几何重数  $r_i$ :

$$r_i = \dim(\text{null}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})) \quad (5)$$

$\lambda_i$  的几何重数还与在 Jordan 标准型中相应于  $\lambda_i$  的 Jordan 块数相等。

$\lambda_i$  的总重数被称为是  $\lambda_i$  的代数重数,用  $n_i$  表示,它与在 Jordan 标准型中相应于  $\lambda_i$  的所有 Jordan 块阶数之和相等,即

$$n_i = \sum_{j=1}^{r_i} \dim[J_j] \quad (6)$$

这里  $[J_j]$  表示相应于  $\lambda_i$  的第  $j$  个 Jordan 块,  $j = 1, \dots, r_i$ 。

所有特征值的代数重数之和即为系统的阶数:  $n = \sum_{i=1}^l n_i$ 。

一个系统是完备的,当且仅当它的每个特征值  $\lambda_i (i=1, \dots, l)$  都满足  $r_i = n_i$ 。一旦某个  $\lambda_i$  出现  $n_i > r_i$  的情况,那么这个特征值就是亏损的,同时系统也就称为亏损系统。

最近的研究表明,亏损系统也许并不是非常罕见的。Frisswell 等人给出了一个亏损系统的例子<sup>[16]</sup>,这个例子的模型是由通过两个黏性阻尼器连接在一起的两根梁构成的。而 Mottershead<sup>[17]</sup>则发现在与结构交叉响应有关的反共振问题中出现的非对称特征值可以是亏损的。

### 1.3 重特征值完备系统可控性的必要条件

**定理 1(必要条件)** 如果系统状态矩阵 **A** 是完备的并且具有  $l$  个重特征值  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, l)$ , 其中每个  $\lambda_i$  的代数重数为  $n_i$ , 那么要使系统(**A**, **B**)是完全可控的,控制力输入的阶数  $m$  应当不小于  $\max\{n_i; i=1, 2, \dots, l\}$ 。

**证明** **A** 的左、右特征向量矩阵可分别写为  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \ \cdots \ \mathbf{w}_{n_1} \ \mathbf{w}_{n_1+1} \ \cdots \ \mathbf{w}_{n_1+n_2} \ \cdots \ \mathbf{w}_{n_1+\dots+n_{l-1}+1} \ \cdots \ \mathbf{w}_n]^T$  (7)

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_{n_1} \ \mathbf{v}_{n_1+1} \ \cdots \ \mathbf{v}_{n_1+n_2} \ \cdots \ \mathbf{v}_{n_1+n_{l-1}+1} \ \cdots \ \mathbf{v}_n] \quad (8)$$

并且 **A** 的特征值矩阵 **Λ** 为

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\bar{\lambda}_1 \ \cdots \ \bar{\lambda}_{n_1} \ \bar{\lambda}_{n_1+1} \ \cdots \ \bar{\lambda}_{n_1+n_2} \ \cdots \ \bar{\lambda}_{n_1+\dots+n_{l-1}+1} \ \cdots \ \bar{\lambda}_n) \quad (9)$$

这里:

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_1 = \dots = \bar{\lambda}_{n_1} = \lambda_1 \\ \bar{\lambda}_{n_1+1} = \dots = \bar{\lambda}_{n_1+n_2} = \lambda_2 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_{n_1+\dots+n_{l-1}+1} = \dots = \bar{\lambda}_n = \lambda_l \end{cases} \quad (10)$$

然后,对式(1)应用下列模态坐标变换<sup>[18]</sup>

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{q}, \mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T, \quad (11)$$

并且根据特征向量的正交性质

$$\mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}, \mathbf{W}\mathbf{V} = \mathbf{I} \quad (12)$$

最后可将式(1)化为

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{q} + \mathbf{W}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (13)$$

既然坐标变换矩阵  $\mathbf{V}$  满秩,那么式(1)和式(13)所代表的系统应当具有相同的可控性。

详细列写方程(13),可以看到重特征值完备系统在模态坐标系下已被解耦

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \lambda_1 q_1 + \mathbf{w}_1^T \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \vdots \\ \dot{q}_{n_1} = \lambda_1 q_{n_1} + \mathbf{w}_{n_1}^T \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \vdots \\ \dot{q}_{n_1+1} = \lambda_2 q_{n_1+1} + \mathbf{w}_{n_1+1}^T \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \vdots \\ \dot{q}_{n_1+n_2} = \lambda_2 q_{n_1+n_2} + \mathbf{w}_{n_1+n_2}^T \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \vdots \\ \dot{q}_{n_1+\dots+n_{l-1}+1} = \lambda_l q_{n_1+\dots+n_{l-1}+1} + \mathbf{w}_{n_1+\dots+n_{l-1}+1}^T \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \vdots \\ \dot{q}_{n_1+\dots+n_{l-1}+n_l} = \lambda_l q_{n_1+\dots+n_{l-1}+n_l} + \mathbf{w}_{n_1+\dots+n_{l-1}+n_l}^T \mathbf{B}\mathbf{u} \end{cases} \quad (14)$$

现在,不失一般性,我们考虑上述方程组中与特征值  $\lambda_1$  相对应的第一组方程。已经知道由特征向量任意线性组合而形成的向量  $\tilde{\mathbf{w}} = a_1 \mathbf{w}_1 + a_2 \mathbf{w}_2 + \dots + a_{n_1} \mathbf{w}_{n_1}$  仍然是一个特征向量,这样通过第一组方程能够得到在模态坐标  $\tilde{\mathbf{q}}$  下的一个方程

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \lambda_1 \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (15)$$

或

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \lambda_1 \tilde{\mathbf{q}} + a_1 \mathbf{w}_1^T \mathbf{B}\mathbf{u} + a_2 \mathbf{w}_2^T \mathbf{B}\mathbf{u} + \dots + a_{n_1} \mathbf{w}_{n_1}^T \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (16)$$

根据定义 2,当且仅当满足下列条件时模态  $\lambda_1$  可控

$$a_1 \mathbf{w}_1^T \mathbf{B}\mathbf{u} + a_2 \mathbf{w}_2^T \mathbf{B}\mathbf{u} + \dots + a_{n_1} \mathbf{w}_{n_1}^T \mathbf{B}\mathbf{u} \neq 0 \quad (17)$$

这个式子可以写成下列形式

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n_1}) \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^T \\ \mathbf{w}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{n_1}^T \end{bmatrix} [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_m] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \neq 0 \quad (18)$$

这里,  $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_m]$ 。

既然  $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m)^T$  为非零输入向量,那么可以得到

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \mathbf{w}_1 & \mathbf{b}_1^T \mathbf{w}_2 & \dots & \mathbf{b}_1^T \mathbf{w}_{n_1} \\ \mathbf{b}_2^T \mathbf{w}_1 & \mathbf{b}_2^T \mathbf{w}_2 & \dots & \mathbf{b}_2^T \mathbf{w}_{n_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}_m^T \mathbf{w}_1 & \mathbf{b}_m^T \mathbf{w}_2 & \dots & \mathbf{b}_m^T \mathbf{w}_{n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n_1} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (19)$$

又因为  $a_1, a_2, \dots, a_{n_1}$  为任意非全零常数,上式当且仅当矩阵

$$\mathbf{D}_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \mathbf{w}_1 & \mathbf{b}_1^T \mathbf{w}_2 & \dots & \mathbf{b}_1^T \mathbf{w}_{n_1} \\ \mathbf{b}_2^T \mathbf{w}_1 & \mathbf{b}_2^T \mathbf{w}_2 & \dots & \mathbf{b}_2^T \mathbf{w}_{n_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}_m^T \mathbf{w}_1 & \mathbf{b}_m^T \mathbf{w}_2 & \dots & \mathbf{b}_m^T \mathbf{w}_{n_1} \end{bmatrix}$$

列满秩时成立,即

$$\text{rank}(\mathbf{D}_{\lambda_1}) = n_1 \quad (20)$$

这样,若要等式(20)成立,则需要输入阶数  $m$  必须大于等于代数重数  $n_1$ ,即  $m \geq n_1$ 。若要求系统可控,则该条件对于每个特征值  $\lambda_i (i=1, \dots, l)$ ,都需要满足,因此,如果系统完全可控,必须满足

$$m \geq \max\{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_l\} \quad (21)$$

至此,定理得证。

#### 1.4 亏损系统可控性的必要条件

**定理 2(必要条件)** 如果系统状态矩阵  $\mathbf{A}$  是亏损的,并且具有  $l$  个重特征值  $\lambda_i (i=1, \dots, l)$ ,其中每个特征值  $\lambda_i$  的代数重数为  $n_i$ ,使得  $n_1 + n_2 + \dots + n_l = n$ ,并且每个特征值  $\lambda_i$  的几何重数为  $r_i$ ,那么要使系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  是完全可控的,控制力输入的阶数  $m$  应当大于等于  $\max\{r_1 \ r_2 \ \dots \ r_l\}$ 。

定理 2 的证明与下述定理 4 的证明类似,故证明略。读者可以从下述充分条件的证明中理解该定理的证明方法。

## 2 完全可控性的充分条件

### 2.1 完备系统完全可控性的充分条件

**定理 3(充分条件)** 若系统状态矩阵  $\mathbf{A}$  是完备的并且具有  $l$  个重特征值  $\lambda_i (i=1, \dots, l)$ ,其中每个特征值  $\lambda_i$  的代数重数为  $n_i$ ,使得  $n_1 + n_2 + \dots + n_l = n$ ,那么如果控制力分布矩阵  $\mathbf{B}$  满足下列条

件,系统(A, B)是完全可控的。当

$$j > n_k, i \neq n_1 + \dots + n_{k-1} + j \quad (22a)$$

$$(k = 1, \dots, l; n_0 = 0)$$

时

$$w_i^T b_j = \begin{cases} g_i, & i = j, n_1 + j, \dots, n_1 + n_2 + \dots + n_{l-1} + j \\ 0, & i \neq j, n_1 + j, \dots, n_1 + n_2 + \dots + n_{l-1} + j \end{cases} \quad (22b)$$

这里  $g_i (i = j, n_1 + j, \dots, n_1 + n_2 + \dots + n_{l-1} + j)$  代表任意非零常数,其中  $j = 1, 2, \dots, m$ 。

显然,定理 3 是成立的,因为通过式(22a)和式(22b)的要求选取的控制力分布矩阵 B 能够确保条件式(17)得到满足,所以由定义 2 可知系统(A, B)可控。

### 2.2 亏损系统完全可控性的充分条件

**定理 4(充分条件)** 若系统状态矩阵 A 是亏损的,并且具有  $l$  个重特征值  $\lambda_i (i = 1, \dots, l)$ , 其中每个特征值  $\lambda_i$  的代数重数为  $n_i$ , 使得  $n_1 + n_2 + \dots + n_l = n$ , 并且每个特征值  $\lambda_i$  的几何重数为  $r_i$ , 那么如果  $r_i = 1 (i = 1, \dots, l)$ , 并在控制输入数  $m = 1$  的情况下要求有

$$w_i^T B \neq 0 \quad (23)$$

$$(i = n_1, n_1 + n_2, \dots, n_1 + n_2 + \dots + n_{l-1}, n)$$

则系统(A, B)完全可控,如果  $r_i (i = 1, \dots, l)$  并不都等于 1, 此时令控制力输入的阶数  $m \geq \max\{r_1, r_2, \dots, r_l\}$ , 并且按照下列要求选取控制力分布矩阵 B, 则可以使得系统(A, B)完全可控。

对于  $i = 1, \dots, l$ , 如果  $r_i = 1$ , 那么要求

$$w_{n_i}^T b_1 \neq 0 \quad (24)$$

如果  $r_i > 1$ , 那么相应于特征值  $\lambda_i$  将有  $r_i$  个 Jordan 块, 令  $n_{ik} (k = 1, \dots, r_i)$  表示相应于特征值  $\lambda_i$  的第  $k$  个 Jordan 块的阶数, 选取矩阵 B 使之满足下列有关条件, 即对于特征值  $\lambda_i$  对应的广义特征向量, 要求

$$w_k^T b_j \neq 0, k = n_1 + \dots + n_{i-1} + n_{i1} + \dots + n_{ij} \quad (25a)$$

$$j = 1, \dots, r_i$$

$$w_k^T b_j = 0, j = 1, \dots, r_i \quad (25b)$$

式(25b)中的  $w_k^T$  为相应于特征值  $\lambda_i$  在式(25a)中之外的其他特征向量和广义特征向量。则系统(A, B)完全可控。

**证明** 首先考虑具有  $l$  个重特征值的系统, 其中每个重特征值对应的几何重数  $r_i = 1 (i = 1, \dots, l)$ , 这样的问题的系统矩阵可以写成 Jordan 标准型的形式, 其中排列有  $l$  个 Jordan 块, 这些 Jordan 块的维数分别为  $n_1, n_2, \dots, n_l$ , 即

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_l & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\text{这里} \quad J = WAW \quad (27)$$

广义特征向量的排列如同等式(7)和(8)一样。这样状态方程可以写成在广义特征坐标系下的形式

$$\dot{q} = Jq + WBu \quad (28)$$

或者写成下列详细形式

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \lambda_1 q_1 + q_2 + w_1^T Bu \\ \dot{q}_2 = \lambda_1 q_2 + q_3 + w_2^T Bu \\ \vdots \\ \dot{q}_{n_1-1} = \lambda_1 q_{n_1-1} + q_{n_1} + w_{n_1-1}^T Bu \\ \dot{q}_{n_1} = \lambda_1 q_{n_1} + w_{n_1}^T Bu \\ \vdots \\ \dot{q}_{n_1+1} = \lambda_2 q_{n_1+1} + q_{n_1+2} + w_{n_1+1}^T Bu \\ \vdots \\ \dot{q}_{n_1+n_2} = \lambda_2 q_{n_1+n_2} + w_{n_1+n_2}^T Bu \\ \vdots \\ \dot{q}_{n_1+\dots+n_{l-1}+1} = \lambda_l q_{n_1+\dots+n_{l-1}+1} + q_{n_1+\dots+n_{l-1}+2} + w_{n_1+\dots+n_{l-1}+1}^T Bu \\ \vdots \\ \dot{q}_{n_1+\dots+n_{l-1}+n_l} = \lambda_l q_{n_1+\dots+n_{l-1}+n_l} + w_{n_1+\dots+n_{l-1}+n_l}^T Bu \end{cases} \quad (29)$$

方程(1)所示的在物理坐标系下描述的系统与方程(29)所示的在广义特征坐标系下描述的系统的可控性显然是相同的。并且整个系统的可控性等价于对应于所有特征值  $\lambda_i = 1 (i = 1, \dots, l)$  的子系统的可控性。不失一般性, 考虑对应于特征值  $\lambda_i$  的子系统, 并且选择一个单一控制输入  $u_i$ , 即

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_{n_1-2} \\ \vdots \\ \dot{q}_{n_1-1} \\ \vdots \\ \dot{q}_{n_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_1 & 1 \\ & & & & \lambda_1 & 1 \\ & & & & & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n_1-2} \\ q_{n_1-1} \\ q_{n_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1^T b_1 \\ w_1^T b_2 \\ \vdots \\ w_{n_1-2}^T b_1 \\ w_{n_1-1}^T b_1 \\ w_{n_1}^T b_1 \end{pmatrix} u_i \quad (30)$$

可以将其重新写成矩阵形式

$$\dot{\bar{q}} = \bar{J}_1 \bar{q} + \bar{b}_1 u_1 \quad (31)$$

根据定义 1,若下列可控性矩阵

$$\ell_1 = [\bar{b}_1 \bar{b}_1 J_1 \cdots \bar{b}_1 J_1^{n_1-1}] \quad (32)$$

的秩等于  $n_1$ ,则重特征值  $\lambda_1$  对应的子系统可控。

现在我们来验证,通过定理给出选取条件,上述可控性矩阵的秩的确为  $n_1$ 。

计算  $\det(\ell_1)$ ,通过化简得到

$$\det(\ell_1) = \begin{pmatrix} w_1^T b_1 & w_2^T b_1 & \cdots & w_1^T b_1 & w_{n_1}^T b_1 \\ w_{n_1-1}^T b_2 & w_3^T b_1 & \cdots & w_{n_1}^T b_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ w_{n_1-1}^T b_1 & w_{n_1}^T b_1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_{n_1}^T b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{n(n_1-3)-4}{2}} (w_{n_1}^T b_1)^{n_1} \quad (33)$$

根据定理中的选取条件  $(w_{n_1}^T b_1)^{n_1} \neq 0$ ,因此  $\det(\ell_1) \neq 0$ ,这样就证明了相应于特征值  $\lambda_1$  的子系统是可控的。同理,可以证明按照定理给出选取条件,其他特征子系统都是可控的。至此定理中的第一部分得证;对于定理中的第二部分的证明,可以结合上述定理中第一部分的证明和定理 1 的证明,从而该定理得证。

### 3 数值算例

下列所有的计算工作均在 Matlab2006b 系统上完成。

**例 1(定理 3)** 考虑如图 1 所示的平面微幅振动质量弹簧系统:  $m=2, k=3$ 。

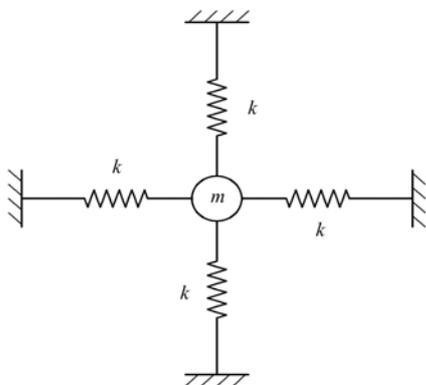


图 1 平面微幅振动质量弹簧系统

Fig. 1 Mass-spring system with planar tiny vibration

其动力学控制方程为

$$M\ddot{y} + Ky = Fu$$

式中:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$

$F$  为控制力分布矩阵;  $u$  为控制力向量。

令  $\dot{z} = \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \dot{y} \\ y \end{bmatrix}$ ,并添加方程  $M\dot{y} - M\dot{y} = 0$ ,降低

上述动力学方程的微分阶次,结果为

$$P\dot{z} + Qz = Gu$$

式中:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}。$$

进一步化为标准状态空间方程的形式为

$$\dot{z} = -P^{-1}Qz + P^{-1}Gu$$

令  $A = -P^{-1}Q, B = P^{-1}G$ ,可得

$$\dot{z} = Az + Bu$$

式中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其特征值矩阵

$$\Lambda =$$

$$\begin{bmatrix} 0 - 1.2247i & 0 + 0i & 0 + 0i & 0 + 0i \\ 0 + 0i & 0 - 1.2247i & 0 + 0i & 0 + 0i \\ 0 + 0i & 0 + 0i & 0 + 1.2247i & 0 + 0i \\ 0 + 0i & 0 + 0i & 0 + 0i & 0 + 1.2247i \end{bmatrix}$$

左特征向量矩阵

$$W =$$

$$\begin{bmatrix} 0.6455 + 0i & 0 + 0i & 0 - 0.7906i & 0 + 0i \\ 0 + 0i & -0.6455 + 0i & 0 + 0i & 0 + 0.7906i \\ 0.6455 + 0i & 0 + 0i & 0 + 0.7906i & 0 + 0i \\ 0 + 0i & -0.6455 + 0i & 0 + 0i & 0 - 0.7906i \end{bmatrix}$$

显然系统为具有重特征值的完备系统,根据定理 1,可知控制输入的阶数  $m$  应当大于等于 2。假定  $m=2, g_i=1$ ,并且通过求解下列方程组:

由  $WB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,得  $B = \begin{bmatrix} 1.5492 & 0 \\ 0 & -1.5492 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

然后采用奇异值分解计算可控性矩阵

$$\ell = [B \ AB \ A^2 B \ A^3 B]$$

的秩为 4,因此系统  $(A, B)$  为完全可控。

**例 2(定理 4 的第一部分):**

考虑如图 2 所示的质量弹簧系统:  $m_1 = 1, m_2 = 1, c_1 = 4 - 2\sqrt{2}, c = 2\sqrt{2}, c_2 = 6 - 2\sqrt{2}, k_1 = 36, k_2 = 81$ 。

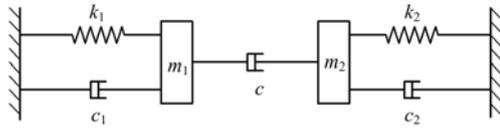


图 2 亏损的质量弹簧系统  
Fig. 2 Defective mass-spring system

此振动系统的动力学控制方程组为

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1 x_1 = f_1 u \\ m_2 \ddot{x}_2 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 = f_2 u \end{cases}$$

并可以写成如下形式

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{u}$$

式中:  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 6 \end{bmatrix}; \mathbf{K} =$

$\begin{bmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 81 \end{bmatrix}; \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$  为控制力分布向

量;  $u$  为控制量。

令  $\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$ , 并添加方程组  $\mathbf{M}\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{y}} = 0$ , 降

低上述动力学方程的微分阶次, 结果为

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{Q}\mathbf{z} = \mathbf{g}\mathbf{u}$$

式中:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix}; \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix}; \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}.$$

进一步化为标准状态空间方程的形式

$$\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{g}\mathbf{u}$$

令  $\mathbf{A} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}, \mathbf{b}_1 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{g}$ , 可得

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}_1\mathbf{u}$$

其中, 系统矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2.8284 & -36 & 0 \\ 2.8284 & -6 & 0 & -81 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其 Jordan 标准型

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2.5 + 6.9101i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 + 6.9101i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 - 6.9101i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5 - 6.9101i \end{bmatrix}$$

广义左特征向量矩阵

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 + 0i & 0.5347 - 0.1508i & -0.5123 + 0.4266i & 2.8546 + 3.9814i \\ 1 + 0i & -0.0589 + 0.8144i & 1.6667 + 4.6068i & -8.6621 + 2.4431i \\ 0 + 0i & 0.5347 + 0.1508i & -0.5123 - 0.4266i & 2.8546 - 3.9814i \\ 1 - 0i & -0.0589 - 0.8144i & 1.6667 - 4.6068i & -8.6621 - 2.4431i \end{bmatrix}$$

根据定理 4, 当  $\mathbf{b}_1$  满足  $\mathbf{w}_2^\top \mathbf{b}_1 \neq 0$  以及  $\mathbf{w}_1^\top \mathbf{b}_1 \neq 0$  时, 系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}_1)$  完全可控。令  $\mathbf{w}_2^\top \mathbf{b}_1 = 1, \mathbf{w}_1^\top \mathbf{b}_1 = 1, \mathbf{w}_3^\top \mathbf{b}_1 = 0, \mathbf{w}_4^\top \mathbf{b}_1 = 0$ , 并且求解下列方程组:

由  $\mathbf{W}\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 得  $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

然后通过奇异值分解计算可控性矩阵

$$\ell = [\mathbf{b}_1 \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 \mathbf{A}^3\mathbf{b}_1] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -12 & 112 \\ 0 & 2.8284 & -28.2843 & -93.3381 \\ 0 & 1 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 2.8284 & -28.2843 \end{bmatrix}$$

的秩, 结果为 4, 因此系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}_1)$  是完全可控的。

## 4 结 论

(1) 若系统所有的特征值为孤立的, 则系统完全可控的充分必要条件为  $\mathbf{w}_i^\top \mathbf{b}_1 \neq 0 (i=1, \dots, n)$ , 这时系统矩阵为循环矩阵, 显然这样的系统最少只需要一个控制输入<sup>[9]</sup>即可实现对系统的控制。

(2) 若系统具有重特征值, 但是系统完备, 那么系统完全可控的必要条件为定理 1, 充分条件为定理 3。

(3) 若系统是亏损的, 这里分为两种情况: ①若系统的几何重数  $r_i = 1 (i=1, \dots, l)$ , 那么系统可控的充分必要条件为控制力分布向量  $\mathbf{b}_1$  与所有的左特征向量  $\mathbf{w}_{n_1+\dots+n_i}^\top (i=1, \dots, l)$  都不垂直, 此时系统矩阵为循环矩阵; ②若系统的几何重数

$r_i (i=1, \dots, l)$  并不都等于 1, 那么系统完全可控的必要条件为定理 2, 充分条件为定理 4。

(4) 只要通过上述方法合理选取控制力分布矩阵  $\mathbf{B}$ , 任何线性时不变系统都应当是可控的。

(5) 上述结论在控制实践中十分重要, 因为通过这些结论可以判断出使系统完全可控应当采用的执行器的个数。

对于系统的可观性, 可以利用 Kalman 的对偶定理得到类似的结论。

#### 参考文献:

- [ 1 ] Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction problems[J]. J Basic Eng, 1960, 85: 34-35.
- [ 2 ] Syrmos V L, Abdallah C T, Dorato P, et al. Static output feedback—A survey[J]. Automatica, 1997, 33(2): 125-137.
- [ 3 ] Mottershead J E, Ram Y M. Inverse eigenvalue problems in vibration absorption: passive modification and active control[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2006, 20: 5-44.
- [ 4 ] Franklin Gene F, David Powell J, Abbas Emami-Naeini. Feedback Control of Dynamic Systems(5th edition) [M]. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2005.
- [ 5 ] Preumont A. Vibration control of active structures: An introduction(2nd edition) [M]. London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [ 6 ] Kimura H. Pole assignment by gain output feedback [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1975, Ac-20: 509-516.
- [ 7 ] Moore B. On the flexibility offered by state feedback in multivariable control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1976, Ac-21: 689-692.
- [ 8 ] Kautsky J, Nichols N K, Dooren P Van. Robust pole assignment in linear state feedback[J]. International Journal of Control, 1985, 41(5): 1129-1155.
- [ 9 ] Magni J F. Robust Modal Control with a Toolbox for Use with Matlab[M]. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2002.
- [ 10 ] Magni J F. Exact pole assignment by output feedback part 3[J]. International Journal of Control, 1987, 45(6): 2021-2033.
- [ 11 ] Wonham W M. On pole assignment in multi-input controllable linear system[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1967, Ac-12: 660-665.
- [ 12 ] Davison E J. On pole assignment in linear system with incomplete state feedback[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1970, Ac-15: 348-351.
- [ 13 ] Liu Z S, Wang D J, Hu H C, et al. Measure of modal controllability and observability in vibration control of flexible structures[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1994, 17, 1377-1380
- [ 14 ] Chen Y D, Chen S H, Liu Z S. Quantitative measures of modal controllability and observability in vibration control of defective and near-defective systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 248(3): 413-426.
- [ 15 ] Lancaster Peter, Tismenetsky Miron. The Theory of Matrices[M]. Elsevier, 1985.
- [ 16 ] Friswell M I, Prells U, Garvey S D. Low-rank damping modifications and defective systems [J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 279: 757-774.
- [ 17 ] Mottershead J E. Complex and defective zeros in cross receptances[J]. Journal of sound and vibration, 2001, 246(1): 190-197.
- [ 18 ] Yao G F, Chen S H. Modal control algorithm on optimal control of intelligent structure[J]. Structural Engineering and Mechanics, 2003, 15(4): 451-462.