

区间参数有大变化时的结构特征值分析

马 梁,陈塑寰,孟广伟

(吉林大学 机械科学与工程学院,长春 130022)

摘要:讨论了一种计算区间参数有大变化时特征值区间的新方法。利用 Taylor 展开和区间扩展理论,讨论多区间参数结构的特征值区间转换为单个区间参数下特征值区间的问题。Epsilon 算法被用来求结构参数有大变化时的特征值,从而得到特征值的上、下界。最后,用一个数值算例说明该方法的实际应用,结果证明了该方法的高效性和正确性。

关键词:固体力学;大区间参数;特征值上、下界;Epsilon 算法

中图分类号:O302 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-5497(2009)01-0098-05

Eigenvalue analysis of structures with large variations of interval parameters

MA Liang, CHEN Su-huan, MENG Guang-wei

(College of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China)

Abstract: A new method for computing the interval eigenvalues of structures with large variations of interval parameters was discussed. Using the Taylor series and interval extension theory, the interval eigenvalue problems of structures with multi-interval-parameter can be transformed into that of single interval parameter. Epsilon-algorithm was used to obtain the eigenvalues of structures with large variations of parameters, thus obtaining the upper and lower bounds of eigenvalues. Finally, a numerical example was given to illustrate the application of the present method, and the efficiency and validity were proved by the results.

Key words: solid mechanics; large interval parameters; upper and lower bounds of eigenvalues; Epsilon-algorithm

工程结构中的分析和设计方法一般都是基于确定性的结构参数和确定性的数学模型的。然而,实际中经常存在着材料性质、几何特性、外力、初始条件、边界条件等等的误差和不确定性。

目前,研究不确定性问题主要有以下几种方法:概率法^[1-2],凸模型法^[3-4],模糊模型法^[5-6]和区间分析法。其中区间分析法是从 20 世纪 60 年代

开始出现的,Moore^[7]和他的合作者 Alefeld 和 Herzberger^[8]已经作了很多开创性的工作。近来,在 \mathbf{K}^I 、 \mathbf{M}^I 已知的情况下,陈塑寰等^[9]利用瑞利商的方法导出了特征值的上、下界表达式。而后,陈塑寰等又利用区间参数表达 \mathbf{K}^I 、 \mathbf{M}^I ,采用矩阵摄动^[10]的方法同样估算出了特征值的上、下界^[11]。但当区间参数变化较大时,这些方法不能得到区间特征值较精确的估计。因此,有必要研

收稿日期:2007-10-23.

基金项目:国家自然科学基金项目(10202006);吉林省科技发展计划项目(20040330-2);吉林大学“985 工程”项目;吉林大学“985 工程”研究生创新基金项目(20080104).

作者简介:马梁(1982-),男,博士研究生.研究方向:结构动力学. E-mail: toled@126.com

通信作者:陈塑寰(1934-),男,教授,博士生导师.研究方向:结构动态设计. E-mail: chensh@jlu.edu.cn

究参数区间宽度较大时估计区间特征值的有效方法。

作者将动态问题的特征值视为是多个结构参数的函数,并对其按每个参数进行泰勒展开,然后将方程两端进行区间扩展,于是可将多个参数区间扩展近似分解为单个参数区间扩展的叠加,分析在单个区间参数影响下特征值区间取上下界时该结构参数的取值,并利用基于 Epsilon 算法加速的特征值重分析法求出单个区间参数影响下特征值区间的上界和下界,从而最后导出多个区间参数共同影响下的特征值区间。计算过程中,Epsilon 算法既节省每次重新计算动态有限元问题所消耗的大量计算机时间,同时又保证了结构参数大修改时重分析的计算精度,使该方法无论在小区间还是大区

1 基于 Epsilon 算法的特征值重分析

当结构参数大修改时,利用 Pade 逼近法和推广的 Kirsch 混合法都能得到比较好的特征值分析结果^[12]。最近,有人提出一种基于 Epsilon 算法加速的特征值重分析法^[13-14],这种算法计算速度快,并且在结构参数大修改时精度较高。

1.1 Epsilon 算法

考虑无穷序列 $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, 令 s_n 为序列的部分和,那么有新的序列 $\{s_0, s_1, s_2, \dots\}$ 满足

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i, n=0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad (2)$$

对于序列 $\{s_0, s_1, s_2, \dots\}$, 构造迭代格式:

$$\epsilon_{-1}^{(j)} = 0 \quad (3)$$

$$\epsilon_0^{(j)} = s_j \quad (4)$$

$$\epsilon_{k+1}^{(j)} = \epsilon_k^{(j+1)} + [\epsilon_k^{(j+1)} - \epsilon_k^{(j)}]^{-1} j \quad (5)$$

$$k=0, 1, 2, \dots$$

同样考虑向量序列 $\{s_0, s_1, s_2, \dots\}$, 构造类似于方程(3)~(5)的迭代格式:

$$\epsilon_{-1}^{(j)} = 0 \quad (6)$$

$$\epsilon_0^{(j)} = s_j \quad (7)$$

$$\epsilon_{k+1}^{(j)} = \epsilon_k^{(j+1)} + [\epsilon_k^{(j+1)} - \epsilon_k^{(j)}]^{-1} j \quad (8)$$

$$k=0, 1, 2, \dots$$

本文定义:

$$u^{-1} = \frac{u^*}{(u^H u)} = \frac{u^*}{\sum_{i=1}^d |u_i|^2} \quad (9)$$

式中:上标 * 代表复数共轭;上标 H 代表 Hermitian 共轭。

向量 Epsilon 算法迭代可由式(8)构造。Epsilon 算法的作用是可以加速序列的收敛。

1.2 基于 Epsilon 算法的特征值重分析

结构振动的特征问题为:

$$K_0 u_0 = \lambda_0 M_0 u_0 \quad (10)$$

式中: K_0 和 M_0 分别为有限元方程的刚度阵和质量阵。

式(10)即为所讨论的初始问题。假定对初始结构的设计参数进行修改,使得方程(10)的刚度阵 K_0 和质量阵 M_0 分别改变为 $K_0 + \Delta K$ 和 $M_0 + \Delta M$, 问题变为在初始结构的特征值 λ_0 和特征向量 u_0 已知的情况下,求修改后结构的特征值 λ 和特征向量 u , 此时,结构振动的特征问题为

$$K u = \lambda M u \quad (11)$$

$$\text{式中: } K = K_0 + \Delta K \quad (12)$$

$$M = M_0 + \Delta M \quad (13)$$

在式(10)~(13)中,引入以下记号:

$$f_0 = \lambda_0 M_0 u_0 \quad (14)$$

$$f = \lambda M u \quad (15)$$

$$\Delta f = \lambda M u - \lambda_0 M_0 u_0 \quad (16)$$

$$\text{得到 } (K_0 + \Delta K) u = f_0 + \Delta f \quad (17)$$

$$u = (K_0 + \Delta K)^{-1} (f_0 + \Delta f) \quad (18)$$

在式(17)中,右边项中 $\Delta f = \lambda M u - \lambda_0 M_0 u_0$ 里未知量 λ, u 由 λ_0, u_0 替代,记为 Δf_0 。由方程(18)可得

$$u \approx (K_0 + \Delta K)^{-1} (f_0 + \Delta f_0) = (I + K_0^{-1} \Delta K)^{-1} K_0^{-1} (\lambda_0 M_0 u_0 + \lambda_0 \Delta M u_0) = (I + B)^{-1} K_0^{-1} (\lambda_0 M_0 u_0 + \lambda_0 \Delta M u_0) \quad (19)$$

式中: $B = K_0^{-1} \Delta K$ 。

使用 Neumann 级数则有

$$u \approx (I - B + B^2 - \dots) K_0^{-1} (\lambda_0 M_0 u_0 + \lambda_0 \Delta M u_0) \quad (20)$$

引进记号得到一个序列的各项:

$$\begin{cases} \tilde{u}_0 = K_0^{-1} (\lambda_0 M_0 u_0 + \lambda_0 \Delta M u_0) \\ \tilde{u}_1 = -K_0^{-1} \Delta K K_0^{-1} (\lambda_0 M_0 u_0 + \lambda_0 \Delta M u_0) = -K_0^{-1} \Delta K \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_2 = -K_0^{-1} \Delta K \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_s = -K_0^{-1} \Delta K \tilde{u}_{s-1} \quad s=3, 4, \dots \end{cases} \quad (21)$$

假设方程有如下形式的解:

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 + \tilde{u}_1 + \dots + \tilde{u}_s + \dots \quad (22)$$

定义向量系列 $\{s_0, s_1, \dots, s_s, \dots\}$, 其中 $s_0 = \tilde{u}_0, s_1 = \tilde{u}_0 + \tilde{u}_1, s_2 = \tilde{u}_0 + \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2$, 一般地:

$$s_i = \sum_{j=0}^i \tilde{u}_j, i=0, 1, 2, \dots, s, \dots \quad (23)$$

为了加速序列(23)的收敛, 使用向量 Epsilon 算法, 可以得到加速收敛后的特征向量近似解:

$$u = \epsilon_i^s \tilde{u}^s \quad (24)$$

在得到特征向量后, 利用瑞利商计算特征值:

$$\lambda_i = \frac{u_i^T K u_i}{u_i^T M u_i} \quad (25)$$

2 区间特征值分析

考虑结构动态问题中的特征值 λ_i 是结构参数 b_1, b_2, \dots, b_j 的函数。

令 λ_i 在 $b_1 = b_1^c, b_2 = b_2^c, \dots, b_j = b_j^c$ 点一阶泰勒展开:

$$\lambda_i(b_1, b_2, \dots, b_j) = \lambda_i(b_1^c, b_2^c, \dots, b_j^c) + \sum_{k=1}^j \frac{\partial \lambda_i}{\partial b_k} \Big|_{b_1=b_1^c, b_2=b_2^c, \dots, b_j=b_j^c} (b_k - b_k^c) \quad (26)$$

利用区间扩展可得下式

$$\lambda_i(b_1^l, b_2^l, \dots, b_j^l) = \lambda_i(b_1^c, b_2^c, \dots, b_j^c) + \sum_{k=1}^j \frac{\partial \lambda_i}{\partial b_k} \Big|_{b_1=b_1^c, b_2=b_2^c, \dots, b_j=b_j^c} (b_k^l - b_k^c) \quad (27)$$

另外, 当 $b_2 = b_2^c, b_3 = b_3^c, \dots, b_j = b_j^c$ 时, 原函数仅是关于 b_1 的函数, 将其在 $b_1 = b_1^c$ 点一阶泰勒展开:

$$\lambda_i(b_1, b_2^c, \dots, b_j^c) = \lambda_i(b_1^c, b_2^c, \dots, b_j^c) + \frac{d\lambda_i}{db_1} \Big|_{b_1=b_1^c, b_2=b_2^c, \dots, b_j=b_j^c} (b_1 - b_1^c) \quad (28)$$

同样利用区间扩展可得下式

$$\lambda_i(b_1^l, b_2^c, \dots, b_j^c) = \lambda_i(b_1^c, b_2^c, \dots, b_j^c) + \frac{d\lambda_i}{db_1} \Big|_{b_1=b_1^c, b_2=b_2^c, \dots, b_j=b_j^c} (b_1^l - b_1^c) \quad (29)$$

方程可变形为

$$\frac{d\lambda_i}{db_1} \Big|_{b_1=b_1^c, b_2=b_2^c, \dots, b_j=b_j^c} (b_1^l - b_1^c) = \lambda_i(b_1^l, b_2^c, \dots, b_j^c) - \lambda_i(b_1^c, b_2^c, \dots, b_j^c) \quad (30)$$

同理可得

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_i}{db_2} \Big|_{b_1=b_1^c, b_2=b_2^c, \dots, b_j=b_j^c} (b_2^l - b_2^c) &= \lambda_i(b_1^c, b_2^l, \dots, b_j^c) - \lambda_i(b_1^c, b_2^c, \dots, b_j^c) \\ &\vdots \\ \frac{d\lambda_i}{db_j} \Big|_{b_1=b_1^c, b_2=b_2^c, \dots, b_j=b_j^c} (b_j^l - b_j^c) &= \lambda_i(b_1^c, b_2^c, \dots, b_j^l) - \lambda_i(b_1^c, b_2^c, \dots, b_j^c) \end{aligned} \quad (31)$$

将式(30)、(31)系列代入式(27)可得

$$\begin{aligned} \lambda_i(b_1^l, b_2^l, \dots, b_j^l) &= \lambda_i(b_1^l, b_2^c, \dots, b_j^c) + \\ &\lambda_i(b_1^c, b_2^l, \dots, b_j^c) + \dots + \lambda_i(b_1^c, b_2^c, \dots, b_j^l) - \\ &(j-1)\lambda_i(b_1^c, b_2^c, \dots, b_j^c) \end{aligned} \quad (32)$$

当 $j=2$ 时, 表达式为

$$\lambda_i(b_1^l, b_2^l) = \lambda_i(b_1^l, b_2^c) + \lambda_i(b_1^c, b_2^l) - \lambda_i(b_1^c, b_2^c) \quad (33)$$

式中: $\lambda_i(b_1^l, b_2^c)$ 可认为是 b_1 在定义域 $[\underline{b}_1, \overline{b}_1]$ 中变化时, 函数 $\lambda_i(b_1, b_2^c)$ 的值域。

根据凸模型理论^[15], 特征值的极值将在不确定参数矩形的角点上取得(见图 1), 因此 $\lambda_i(b_1^l, b_2^l)$ 的精确解可通过不确定参数矩形角点值直接求解特征值问题得到

$$\begin{aligned} &[\min[\lambda_i(\underline{b}_1, \underline{b}_2), \lambda_i(\overline{b}_1, \underline{b}_2), \lambda_i(\underline{b}_1, \overline{b}_2), \\ &\lambda_i(\overline{b}_1, \overline{b}_2)], \max[\lambda_i(\underline{b}_1, \underline{b}_2), \\ &\lambda_i(\overline{b}_1, \underline{b}_2), \lambda_i(\underline{b}_1, \overline{b}_2), \lambda_i(\overline{b}_1, \overline{b}_2)]] \end{aligned} \quad (34)$$

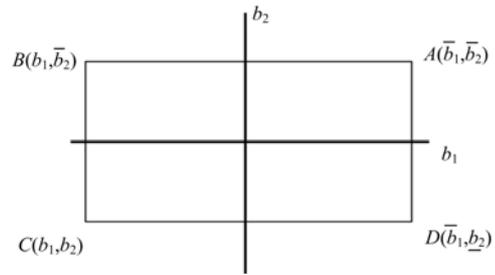


图 1 不确定参数矩形

Fig. 1 Rectangle of uncertain parameters

当参数个数为 m 时, 需重新计算 2^m 次动态问题有限元方程, 其计算量相当大。针对上述问题, 将问题降为一维, 根据上面的理论, $\lambda_i(b_1, b_2^c)$ 在 $[\underline{b}_1, \overline{b}_1]$ 中的极值也将在其定义域的两端取得, 因此 $\lambda_i(b_1, b_2^c)$ 的值域为

$$\begin{aligned} &[\min[\lambda_i(\underline{b}_1, b_2^c), \lambda_i(\overline{b}_1, b_2^c)], \\ &\max[\lambda_i(\underline{b}_1, b_2^c), \lambda_i(\overline{b}_1, b_2^c)]] \end{aligned} \quad (35)$$

即

$$\begin{aligned} \lambda_i(b_1^l, b_2^c) &= [\min[\lambda_i(\underline{b}_1, b_2^c), \lambda_i(\overline{b}_1, b_2^c)], \\ &\max[\lambda_i(\underline{b}_1, b_2^c), \lambda_i(\overline{b}_1, b_2^c)]] \end{aligned} \quad (36)$$

同理可得

$$\begin{aligned} \lambda_i(b_1^c, b_2^l) &= [\min[\lambda_i(b_1^c, \underline{b}_2), \lambda_i(b_1^c, \overline{b}_2)], \\ &\max[\lambda_i(b_1^c, \underline{b}_2), \lambda_i(b_1^c, \overline{b}_2)]] \end{aligned} \quad (37)$$

将式(36)、(37)代入式(33)可得

$$\begin{aligned} \lambda_i(b_1^l, b_2^l) &= [\min[\lambda_i(\underline{b}_1, b_2^c), \lambda_i(\overline{b}_1, b_2^c)] + \\ &\min[\lambda_i(b_1^c, \underline{b}_2), \lambda_i(b_1^c, \overline{b}_2)] - \lambda_i(b_1^c, b_2^c), \\ &\max[\lambda_i(\underline{b}_1, b_2^c), \lambda_i(\overline{b}_1, b_2^c)] + \end{aligned}$$

$$\max[\lambda_i(b_1^l, \underline{b}_2), \lambda_i(b_1^l, \overline{b}_2)] - \lambda_i(b_1^r, b_2^r) \quad (38)$$

式中: $\lambda_i(b_1^l, b_2^r)$ 、 $\lambda_i(\overline{b}_1, b_2^r)$ 、 $\lambda_i(b_1^l, \underline{b}_2)$ 、 $\lambda_i(b_1^l, \overline{b}_2)$ 这 4 个点的值可用 1.2 节的方法求出其近似解。

可以看出,当参数为 m 个时,只需进行 $2m$ 次特征值近似重分析就可得到 $\lambda_i(b_1^l, b_2^r)$ 的近似解,这将比用式(34)得到的精确解减少许多计算量。

3 本文方法的求解步骤

(1) 区间结构参数为 b_1^l, b_2^r 时,由 b_1^l, b_2^r 得 K^c 、 M^c ,根据 $K^c u^c = \lambda^c M^c u^c$,求解动态有限元方程,得特征值 λ_i^c 。

- (2) 用式(21)产生 Epsilon 初始向量序列。
- (3) 用式(6)~式(8)和式(24)产生特征向量。
- (4) 用式(25)计算特征值。
- (5) 用式(38)求得特征值的上下界。

4 算 例

图 2 所示为一个 40 层的框架结构,此结构的有限元模型包括 202 个节点,357 个梁单元,结构参数如下:杨氏模量 $E=2.1 \times 10^{11}$ Pa,质量密度 $\rho=7.8 \times 10^3$ kg/m³,梁截面的长 $H=0.8$ m,宽 $W=0.5$ m。

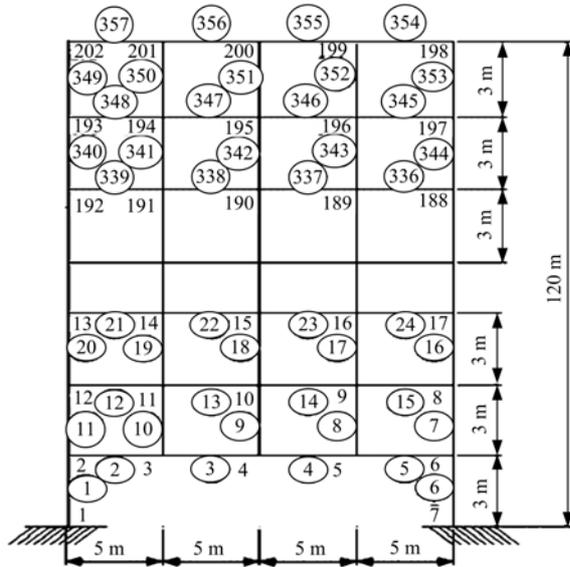


图 2 40 层框架结构

Fig. 2 40-story frame structure

现将杨氏模量和梁截面长作为区间结构参数,记为 E^I 和 H^I

$$E^I = E^c + \alpha E^c e$$

$$H^I = H^c + \beta H^c e$$

式中: $e = [-1, 1]$; 分别取 $\alpha = \beta = 10\%, 15\%, 20\%$ 三种情况进行分析,误差 e 定义为

$$e = |\text{近似解} - \text{精确解}| / \text{精确解} \times 100\%$$

根据上述定义,可得具体结果如表 1~表 3 所示。

表 1 当 $\alpha = \beta = 10\%$ 时特征值的上、下界

Table 1 Bounds of eigenvalues when $\alpha = \beta = 10\%$

| 初始解 | 近似解 | 精确解 | 下界误差/% | 上界误差/% |
|--------|------------------|------------------|--------|--------|
| 0.0268 | [0.0227, 0.0306] | [0.0230, 0.0309] | 1.30 | 0.97 |
| 0.174 | [0.1464, 0.1984] | [0.148, 0.200] | 1.08 | 0.80 |
| 0.252 | [0.2287, 0.2720] | [0.230, 0.273] | 0.57 | 0.37 |
| 0.495 | [0.4169, 0.5656] | [0.423, 0.571] | 1.44 | 0.95 |
| 0.516 | [0.4892, 0.5409] | [0.489, 0.541] | 0.04 | 0.02 |

表 2 当 $\alpha = \beta = 15\%$ 时特征值的上、下界

Table 2 Bounds of eigenvalues when $\alpha = \beta = 15\%$

| 初始解 | 近似解 | 精确解 | 下界误差/% | 上界误差/% |
|--------|------------------|------------------|--------|--------|
| 0.0268 | [0.0204, 0.0324] | [0.0211, 0.0329] | 3.32 | 1.52 |
| 0.174 | [0.1316, 0.2102] | [0.136, 0.214] | 3.24 | 1.78 |
| 0.252 | [0.2156, 0.2812] | [0.218, 0.283] | 1.10 | 0.64 |
| 0.495 | [0.3739, 0.5989] | [0.388, 0.610] | 3.63 | 1.82 |
| 0.516 | [0.4754, 0.5530] | [0.475, 0.553] | 0.08 | <0.01 |

表 3 当 $\alpha = \beta = 20\%$ 时特征值的上、下界

Table 3 Bounds of eigenvalues when $\alpha = \beta = 20\%$

| 初始解 | 近似解 | 精确解 | 下界误差/% | 上界误差/% |
|--------|------------------|------------------|--------|--------|
| 0.0268 | [0.0179, 0.0342] | [0.0193, 0.0351] | 7.25 | 2.56 |
| 0.174 | [0.1154, 0.2217] | [0.125, 0.228] | 7.68 | 2.76 |
| 0.252 | [0.2012, 0.2900] | [0.206, 0.293] | 2.33 | 1.02 |
| 0.495 | [0.3270, 0.6312] | [0.355, 0.650] | 7.89 | 2.89 |
| 0.516 | [0.4612, 0.5649] | [0.461, 0.565] | 0.04 | 0.02 |

5 结束语

提出了一种新的计算特征值区间的方法。由分析算例的结果可以看出,当两个参数的不确定性为 10% 时,特征值上、下界的计算误差均在 1% 左右;当两个参数的不确定性都增大到 20% 时,特征值的计算误差最大增至 7% 左右。鉴于不确定性 20% 已是较大的区间,由此可见,此方法的计算精度可以达到要求。

参考文献:

[1] 陈塑寰. 随机参数结构的振动理论[M]. 长春: 吉林科学技术出版社, 1992.

[2] Nagpal V K, Chamis C C, Rubinstein R, et al. Probabilistic structural analysis to quantify uncertainties associated with turbopump blades[J]. AIAA Journal, 1989, 27(6): 809-813.

[3] Elishakoff I. Convex modeling—a generalized of interval analysis for nonprobabilistic treatment of

- uncertainty [J]. *International Journal of Reliable Computing*, 1995(Suppl):76-79.
- [4] Elishakoff I, Eliseef P, Glegg S. Convex modeling of material uncertainty in vibrations of a viscoelastic structure[J]. *AIAA Journal*, 1994, 32:843-849.
- [5] Chiang W L, Dong W M, Wong F S. Dynamic response of structures with uncertain parameters: a comparative study of probabilistic and fuzzy set models [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1987, 2(2):82-91.
- [6] Wood K L, Autonsson E K, Beck J L. Representing imprecision on engineering design: comparing fuzzy and probabilistic calculus[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1990, 1(3-4):187-203.
- [7] Moore R E. *Interval Analysis*[M]. New York: Prentice-Hall, 1966.
- [8] Alefeld G, Herzberger J. *Introduction to Interval Computations* [M]. New York: Academic Press, 1983.
- [9] Chen S H, Qiu Z P. A new method for computing the upper and lower bounds on frequencies of structures with interval parameters [J]. *Mechanics Research Communication*, 1994, 21(2):583-592.
- [10] 陈塑寰. 结构动态设计的矩阵摄动理论[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [11] Yang Xiao-wei, Chen Su-huan, Lian Hua-dong, et al. A new method for estimating bounds of eigenvalues [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2001, 14: 242-250.
- [12] 杨晓伟, 陈塑寰. 结构参数大修改时的特征值重分析方法[J]. *力学学报*, 2001, 33(4):555-559.
Yang Xiao-wei, Chen Su-huan. Eigenvalue reanalysis method for large modified structures[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 33(4):555-559.
- [13] Chen S H, Wu X M, Yang Z J. Eigen solution reanalysis of modified structures using Epsilon-algorithm [J]. *Int J Numer Meth Engng*, 2006, 66:2115-2130.
- [14] 吴晓明, 陈塑寰. Epsilon 算法在结构模态重分析中的应用[J]. *吉林大学学报:工学版*, 2006, 36(4): 447-450.
Wu Xiao-ming, Chen Su-huan. Applications of Epsilon-algorithm in eigensolution reanalysis of structures[J]. *Journal of Jilin University(Engineering and Technology Edition)*, 2006, 36(4):447-450.
- [15] Chen S H, Guo K J, Chen Y D. A method for estimating upper and lower bounds of eigenvalues of closed-loop systems with uncertain parameters[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 27(6): 527-539.