第四章　对偶问题及对偶单纯形法

无论从理论方面, 还是实际应用方面, 对偶理论是线性规划的重要的基础理论之一。其主要内容是: 每一个线性规划问题 (称为原问题), 都有一个与之对应的线性规划问题 (称为对偶问题), 原问题和对偶问题之间存在着密切的关系, 在求出一个问题的解的同时也自动的给出了另一个问题的解。

第一节　对偶问题的提出

为了说明原问题和对偶问题间的关系, 首先介绍下面例题中的线性规划问题的对偶问题。

例 1. 某养鸡场所用的饲料由 A、B、C 三种配料组成, 表 4–1 给出了各种配料所含的营养成份、单位成本及 1 份混合饲料必须含有的各种营养成分。问如何配制混合饲料使饲料成本最小?

表 4–1

营养成分 / 配料	D	E	F	单位成本
A	1	1/2	2	6
B	1	1/2	1	3
C	1	1/4	1	2
1 份饲料应含量	20	6	10	

设

$$x_j = \text{混合饲料中第 } j \text{ 种配料的含量}, j = A, B, C,$$

则这个问题的线性规划模型是

$$\min \quad z = 6x_A + 3x_B + 2X_C \tag{4.1}$$

$$\text{满足} \quad \begin{cases} x_A + x_B + x_C \geq 20, \\ \frac{1}{2}x_A + \frac{1}{2}x_B + \frac{1}{4}x_C \geq 6, \\ 2x_A + x_B + x_C \geq 10, \\ x_j \geq 0, \text{对一切} j. \end{cases} \tag{4.2}$$

现设想有一个饲料厂, 制造含有这三种营养成分各 1 单位的营养丸。他们知道养鸡场对混合饲料的要求, 因此在制订营养丸的价格时, 每丸 D、E、F 营养丸的价格分别定为 q_1、q_2、q_3。养鸡场采购 1 单位的配料 A, 相当于对这 3 种营养丸分别采购 1,1/2,2 丸等等。因此饲料厂定营养丸的价格时, 必须有:

$$\begin{cases} q_1 + \frac{1}{2}q_2 + 2q_3 \leq 6, \\ q_1 + \frac{1}{2}q_2 + q_3 \leq 3, \\ q_1 + \frac{1}{4}q_2 + q_3 \leq 2, \\ q_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{4.3}$$

否则养鸡场就会向别处购买配料而不买营养丸。显然 (1.3) 就是饲料厂决定营养丸售价时的线性规划模型的约束条件方程。目标函数是要求相当于 1 份混合饲料的营养丸的

售价最大, 即

$$\max \quad w = 20q_1 + 6q_2 + 10q_3. \tag{4.4}$$

线性规划问题 (1.1)、(1.2) 和线性规划问题 (1.3)、(1.4) 之间有着密切的关系, 实际上这两个问题最优解的目标函数值相同 (根据两个问题追求的目标, 从直观上不难理解这一点)。

线性规划问题 (1.3) 和 (1.4) 就是原问题 (线性规划问题 (1.1) 和 (1.2)) 的对偶问题。实际上, 对每一个线性规划问题都伴随着另一个线性规划问题, 称为 **对偶问题**。原来的线性规划问题称为 **原始问题** (**或原问题**)。值得说明的是, 并不是对每一个线性规划问题 (即使是一个实际问题) 的对偶问题都可以象上面例题一样直观地从经济上加以解释。

第二节 建立对偶问题的规则

一、建立对偶问题的规则

比较线性规划问题 (1.1)、(1.2) 和线性规划问题 (1.3) 、(1.4), 不难发现原问题和对偶问题之间的一些关系。

一般地. 如果原问题为如下形式的线性规划问题:

$$\begin{aligned}
&\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
&\text{满足} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

则按照以下规则建立它的对偶问题:

(一)、原问题和对偶问题的决策变量的意义不同, 本书用 q_i 表示对偶问题的决策变量;

(二)、如果原问题的目标函数是 “max” 型, 则其约束条件方程必须是 “$\le$” 形式。此时对偶问题的目标函数是 “min” 型, 其约束条件方程全是 “$\ge$ ” 形式。反之亦然。这就是说, 在建立对偶问题之前, 原问题的约束方程中的不等号必须指向一律而且与追求目标函数最大或最小相对应;

(三)、对偶问题的目标函数的系数是原问题约束条件方程的右端的值 b_i;

(四)、对偶问题的系数矩阵为原问题的系数矩阵的转置矩阵;

(五)、对偶问题的约束条件方程的右端值是原问题目标函数中决策变量的系数 c_j; 但在建立对偶问题之前, 若原问题的松弛变量或多余变量的 c_j 不为 0, 则将它看成实际变量。

根据以上规则, 原问题 (1.5) 的对偶问题是:

$$\min w = b_1q_1 + b_2q_2 + \ldots + b_mq_m$$

$$
满足 \begin{cases} a_{11}q_1 + a_{21}q_2 + \ldots + a_{m1}q_m \geq c_1 \\ a_{12}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{m2}q_m \geq c_2 \\ \ldots \\ a_{1n}q_1 + a_{2n}q_2 + \ldots + a_{mn}q_m \geq c_n \\ q_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, m \end{cases} \tag{4.6}
$$

如果把原问题和对偶问题列在一个表中, 它们之间的关系就更加清楚, 从横向看是原问题, 从纵向看是对偶问题。

x_j / q_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	原始约束	min w
q_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	$\leq$	b_1
q_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	$\leq$	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
q_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	$\leq$	b_m
对偶约束	$\geq$	$\geq$	$\ldots$	$\geq$		
max z	c_1	c_2	$\ldots$	c_n		

把表中的数 a_{ij} 的每一行与 x_j 对应的乘起来相加后不大于这一行旁边的数 b_i，就是原问题的一个约束条件；最后一行的 c_j 与 x_j 对应的乘起来相加就是原问题的目标函数。类似地，把数 a_{ij} 的每一列与 q_i 对应的乘起来相加后不小于 c_j，就是对偶原问题的一个约束条件；最后一列的 b_i 与 q_i 对应的乘起来相加就是对偶原问题的目标函数为了讨论方便, 也可将原问题写成下列形式:

$$
\begin{aligned} & \max\ z = CX; \\ & 满足 \begin{cases} AX \leq b, \\ X \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.7}
$$

式 (1.7) 的对偶问题是:

$$
\begin{aligned} & \min\ w = Qb; \\ & 满足 \begin{cases} QA \geq C, \\ Q \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.8}
$$

或

$$
\begin{aligned} & \min\ w = b^T Q^T; \\ & 满足 \begin{cases} A^T Q^T \geq C^T, \\ Q \geq 0. \end{cases} \end{aligned}
$$

其中$Q = (q_1, q_1, \ldots, q_m)$.

二、原问题不符合上述规则的处理

建立对偶问题之前, 必须对原问题进行处理, 使之符合前述要求:

(一)、若原问题是求目标函数最大, 而约束条件方程为“$\geq$”形式, 则将该约束条件方程两端乘以 -1, 把约束条件变成“$\leq$”形式。若原问题是求目标函数最小, 而约束条件方程为“$\leq$”形式, 则做同样的处理。

(二)、原问题的每一个约束条件方程对应对偶问题的一个决策变量 q_i。如果第 i 个约束条件为不等式, 则限定 $q_i \geq 0$; 如约束条件方程是“=”这种形式, 有两种处理方法:

1. 将等式约束条件变为“$\geq$”和“$\leq$”两个约束条件方程, 再按 (一) 处理;

2. 原问题第 i 个约束条件是“=”形式, 不加变动, 对偶问题的决策变量 q_i 为自由变量;

(三)、原问题的每个决策变量 x_j 和对应的系数列向量 $P_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$, 对应对偶问题的一个约束条件。如果 $x_j \geq 0$, 则对应的对偶问题的行约束为不等式; 如果 x_j 为自由变量, 则对应的对偶问题的约束为“=”型约束;

(四)、如原问题的松弛变量或多余变量的 c_j 值不为 0, 可以把原约束条件方程作为等式约束条件处理。例如松弛变量表示要存贮费的多余物资。就是这种情况。

例 2. 建立如下线性规划问题的对偶问题:

$$\min\ z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3;$$
$$\text{满足} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 5, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_j \geq 0, \text{对一切} j. \end{cases}$$

解 将第 2 个和第 3 个约束条件处理后得

$$\min\ z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3;$$
$$\text{满足} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 5, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 2, \\ -x_1 - x_2 - x_3 \geq -2, \\ x_j \geq 0, \text{对一切} j. \end{cases}$$

设对偶变量为 q_1,q_2,q_3 和 q_3'。因为最后两个变量都是对应着原问题的第 3 个约束条件方程, 所以它们的下标都是 3。则对偶问题为:

$$\max\ w = 5qx_1 - 3q_2 + 2q_3 - 2q_3';$$
$$\text{满足} \begin{cases} q_1 - 2q_2 + q_3 - q_3' \leq 2, \\ 2q_1 + 3q_2 + q_3 - q_3 \leq 4, \\ -3q_1 + 2q_2 + q_3 - q_3 \leq 3, \\ q_i \geq 0, \text{对一切} i. \end{cases}$$

第三节 对偶问题的基本性质

一、对称性

定理 1. 对偶问题的对偶是原问题。

证明: 设原问题是:

$$\max \quad z = CX$$
$$\text{满足} \quad \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

则对偶问题为:

$$\min \quad w = Qb$$
$$\text{满足} \quad \begin{cases} QA \geq C \\ Q \geq 0 \end{cases}$$

将上述对偶问题的约束条件 (非负约束除外) 两边取负号, 因为 $\min\ w = -\max\ (-w)$, 可得到

$$\max \quad (-w) = -b^T Q$$
$$\text{满足} \quad \begin{cases} -QA \leq -C \\ Q \geq 0 \end{cases}$$

根据建立对偶问题的规则, 此问题的对偶问题为:

$$\min \quad (-z) = -CX$$
$$\text{满足} \quad \begin{cases} -AX \geq -b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

因为 $\min\ (-z) = -\max\ z$, 因此有

$$\max \quad z = CX$$
$$\text{满足} \quad \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

这就是原问题。

二、弱对偶性

定理 2. 设 $\overline{X}$ 是原问题 (1.7) 的可行解, $\overline{Q}$ 是对偶问题 (1.8) 的可行解, 则有 $C\overline{X} \leq \overline{Q}b$.

证明 设 $\overline{X}$ 是原问题 (1.7) 的可行解, 则 $AX \leq b$。若 $\overline{Q} \geq 0$ 是对偶问题 (1.8) 的可行解, 用 $\overline{Q}$ 左乘上式两端得 $\overline{Q}A\overline{X} \leq \overline{Q}b$。因为 $\overline{Q}A \geq C$, 用 $\overline{X}$ 右乘此式两端得 $\overline{Q}A\overline{X} \geq C\overline{X}$, 从而

$$C\overline{X} \leq \overline{Q}A\overline{X} \leq \overline{Q}b.$$

由弱对偶性, 可得到如下重要结果。

推论 1. 若原问题可行, 但其目标函数值无上界, 则对偶问题不可行。

证明 用反证法。反设对偶问题可行, $\overline{Q}$ 为对偶问题的可行解, 则由定理 2 可知对原问题的任意可行解 X 都有 $CX \leq \overline{Q}b$, 即原问题的目标函数值有上界, 矛盾, 所以对偶问题不可行。

类似的可证明如下推论。

推论 2. 若对偶问题可行, 但其目标函数值无下界, 则原问题不可行。

推论 1 和推论 2 的逆也成立.

推论 3. 若原问题可行, 而对偶问题不可行, 则原问题的目标函数值无界。

推论 4. 若对偶问题可行, 而原问题不可行, 则对偶问题的目标函数值无界。

三、可行解是最优解的性质

定理 3. 设 $\overline{X}$ 是原问题 (1.7) 的可行解, $\overline{Q}$ 是对偶问题 (1.8) 的可行解, 若 $C\overline{X} = \overline{Q}b$, 则 $\overline{X}$ 和 $\overline{Q}$ 分别是原问题和对偶问题得最优解。

证明: 只需证明对原问题的得任一可行解 X 都有 $CX \leq \overline{X}$; 对对偶问题的任一可行解 Q 都有 $Qb \geq \overline{Q}b$。由弱对偶性, 对原问题的任一可行解 X 有 $CX \leq \overline{Q}b = C\overline{X}$, 所以 $CX \leq C\overline{X}$, 可见 $\overline{X}$ 是原问题的最优解。同样的方法可证 $\overline{Q}$ 为对偶问题的最优解。

四、对偶定理

定理 4. 若原问题有最优解, 那么对偶问题一定有最优解, 且原问题和对偶问题的最优目标函数值相等。

证明: 原问题 (1.7) 的标准型的系数矩阵为 $A' = (A, I)$, 其中单位矩阵 I 为松弛变量的系数矩阵。设 $\overline{X}$ 为原问题 (1.7) 的最优解,B 为其对应的基矩阵。令 $C' = (C, 0, \ldots, 0)$ 为标准型中目标函数中决策变量的系数。则由最优检验准则可知最优解 $\overline{X}$ 对应的检验数 $C' - C_B B^{-1}(A, I) \leq 0$, 即

$$C' - C_B B^{-1}(A, I) = C' - (C_B B^{-1} A, C_B B^{-1}) = (C - C_B B^{-1} A, -C_B B^{-1}) \leq 0,$$

从而

$$C - C_B B^{-1} A \leq 0, \quad -C_B B^{-1} \leq 0.$$

令 $\overline{Q} = C_B B^{-1}$, 由上式可知 $\overline{Q} \geq 0$, 且 $C - \overline{Q}A \leq 0$ 即 $\overline{Q}A \geq C$。可见 $\overline{Q}$ 为对偶问题 (1.8) 的可行解且对应的目标函数值为 $w = \overline{Q}b = C_B B^{-1} b$。而原问题的最优解 $\overline{X}$ 对应的目标函数值为 $z = C\overline{X} = C_B B^{-1} b$, 从而 $\overline{Q}b = C\overline{X}$。由定理 3 可知 $\overline{Q}$ 为对偶问题的最优解, 且与原问题的最优目标函数值相同。

如果原问题的目标函数为 "min" 型, 同样可证明原问题和对偶问题的最优解的目标函数为 $C_B B^{-1} b$。

定理 5. 若 $\overline{X}$ 为原问题 (1.7) 的一满足最优检验的基本解, 则 $\overline{Q} = C_B B^{-1}$ 为对偶问题的一可行解, 且这两个解的目标函数的值相同。其中 B 为基本解 $\overline{X}$ 对应的基矩阵。

由上一定理的证明易见结论成立。

从上面定理的证明可以看出, 对偶问题 (1.8) 的最优解 $\overline{Q} = C_B B^{-1}$, 这恰为为原问题 (1.7) 最优解表中松弛变量的机会费用 z_s, 或者说是原问题最优解表中松弛变量检验数 $c_S - z_S$ 的负数, 即

$$q_i = z_{n+i}.$$

如果原问题是求目标函数值最小, 对偶问题是求目标函数值最大, 由于原问题多余变量的系数构成一负单位矩阵, 因此对偶问题的最优解是原问题最优解表中多余变量的机会费用 z_S 的负数, 或者说是最优解表中多余变量的检验数 $c_S - z_S$, 即

$$q_i = -z_{n+i}.$$

例 1 原问题的最优单纯形表　　　　　　表 4–2

$c_j \to$			6	3	2	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_3	16	0	0	1	-2	4	0
0	x_6	10	-1	0	0	-1	0	1
3	x_2	4	1	1	0	1	-4	0
z_j			3	3	2	-1	-4	0
$z_j - c_j$			3	0	0	1	4	0

例 1 对偶问题的最优解表　　　　　　表 4–3

$c_j \to$			20	6	10	0	0	0
c_B	q_B	c	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	q_4	3	0	0	1	1	-1	0
6	q_2	4	0	1	0	0	4	-4
20	q_1	1	1	0	1	0	-1	2
z_j			20	6	20	0	4	16
$c_j - z_j$			0	0	-10	0	-4	-16

原问题的最优解为 $x_1 = 0$,$x_2 = 4$,$x_3 = 16$。与此对应, 对偶问题的松弛变量的 $z_{m+1} = 0$, $z_{m+2} = 4$, $z_{m+3} = 16$, 其中 $m = 3$。

对偶问题的最优解为 $q_1 = 1$,$q_2 = 4$,$q_3 = 0$。与此对应, 原问题的多余变量的 $z_{n+1} = -1$, $z_{n+2} = -4$, $z_{n+3} = 0$, 其中 $n = 3$。

由上可见, 当一个线性规划问题是求目标函数值最小, 约束方程全是 “$\geq$” 时, 求解时要用大 M 法或两阶段法, 比较麻烦。如果建立此问题的对偶问题再求解, 就容易得多。当然此种情况下的较有效的算法是下节将要介绍的对偶单纯形法。

第四节　对偶单纯形法

对原问题:

$$\max \quad z = CX$$
$$满足 \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

和对偶问题:

$$\min \quad z = Qb$$
$$满足 \begin{cases} QA \geq C \\ Q \geq 0 \end{cases}$$

由第三节定理 5, 原问题的每一满足最优检验的基本解 $\overline{X}$ 都对应着对偶问题的一基本可行解 $\overline{Q} = C_B B^{-1}$, 且这两个解对应的目标函数值相同。当 $\overline{X}$ 为原问题的基本可行解时, 根据定理 4, 原问题和对偶问题同时达到最优。基于这种思路, 我们可用另一种算法, 使在单纯形法的每次迭代的基本解都满足最优检验, 但不一定满足非负约束, 迭代时使不满足非负约束的变量个数逐步减少。一旦全部基变量都满足非负约束, 就得到最优解, 这种算法称为 **对偶单纯形法**。

对偶单纯形法的计算步骤:

记 S_N 为非基变量的下标的集合。

第一步 找到一个满足最优检验的初始基本解;

第二步 检验当前解是否可行。若可行, 已得最优解, 否则转入下一步;

第三步 选择 b'_i 最小一行的变量作为换出变量, 记这一行为 i^*, 转入下一步;

第四步 检查 a'_{i^*j}，若 a'_{i^*j} 全大于或等于 0, 则问题无解，停止计算。否则，选择使下式达到最小的 j^* 对应的变量作为换入变量:

$$\min\{\frac{c_j - z_j}{a'_{i^*j}}\Big| a'_{i^*j} < 0, \text{其中 } j \text{ 为非基变量的下标}\} = \frac{c_{j^*} - z_{j^*}}{a'_{i^*j^*}}$$

第五步 5. 以 $a_{i^*j^*}$ 为枢轴进行转轴运算, 转第二步。

第四步中选择换入变量的原则是选择能够使得最小的 b'_i 增加，并且不破坏最优检验的非基变量为换入变量。如果第 i^* 行中的 $a'_{i^*j} \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$, 则问题无解。因为单纯形表中的 a'_{ij} 的意义是将 x_j 增加 1 单位所引起的第 i 行基变量的变化。如 $a'_{ij} > 0$, 表示基变量取值减少，而 $a'_{ij} < 0$ 表示基变量取值增加。因单纯形表中 i^* 行的 b'_{i^*} 为负数，必须增加到 0, 才能使得该行的基变量成为换出变量，因此必须 $a'_{i^*j} < 0$。若第 i^* 行的 a'_{i^*j} 都是正数，则引进任一非基变量都不能使得 i^* 行的基变量变为 0 而离去，此基变量永远不能满足非负约束，所以此问题无解。

我们仍以例 1 的原问题为例说明对偶单纯形法的计算。例 1 中原问题的标准型如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3; \\ \text{满足} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 20 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 - x_5 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_6 = 10 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, 6 \end{cases} \end{aligned}$$

解: 选择 x_4, x_5, x_6 为基变量, 令 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, 则易得出 $x_4 = -20, x_5 = -6, x_6 = -10$。

为了使初始基本解的基变量的系数矩阵为单位矩阵, 用 -1 乘 3 个约束方程。因为是求目标函数值最小, 用 $z_j - c_j \leq 0$ 检验最优。初始单纯形表如表 4-4。

表 4–4

$c_j \rightarrow$			6	3	2	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	-20	-1	-1	-1	1	0	0
0	x_5	-6	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	0
0	x_6	-10	-2	-1	-1	0	0	1
z_j			0	0	0	0	0	0
$z_j - c_j$			-6	-3	-2	0	0	0

表中所有检验数 $z_j - c_j \leq 0$, 已达最优, 但不可行。选择 x_4 为换出变量,$i^* = 1$。

$$\min\{\frac{-6}{-1}, \frac{-3}{-1}, \frac{-2}{-1}\} = 2, j^* = 3$$

以 a'_{13} 为枢轴进行转轴运算, 得表 4–5。

表 4–5

$c_j \to$			6	3	2	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_3	20	1	1	1	-1	0	0
0	x_5	-1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	1	0
0	x_6	10	-1	0	0	-1	0	1
z_j			2	2	2	-2	0	
$z_j - c_j$			-4	-1	0	-2	0	0

表 4–5 中 $b'_2 = -1 \leq 0$, 令 $i^* = 2$。

$$\min\{\frac{-4}{-1/4}, \frac{-1}{-1/4}, \frac{-2}{-1/4}\} = 4, j^* = 2$$

以 a'_{22} 为枢轴进行转轴运算, 得表 4–6。

表 4–6

$c_j \to$			6	3	2	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_3	16	0	0	1	-2	4	0
3	x_2	4	1	1	0	1	-4	0
0	x_6	10	-1	0	0	-1	0	1
z_j			3	3	2	-1	-4	0
$z_j - c_j$			-3	0	0	-1	-4	0

表 4-6 满足最优检验且可行, 已得最优解。

第五节 对偶变量的经济意义 — 影子价格

在第一章第三节中, 我们用图解法求出了第一章例 1 的最优解 (见图 1-1)。在实际决策中, 决策者需要考虑的一个问题是增加某种资源是否有利。从图 1-1 可见, 若增加 B 车间的可用工时或市场限额, 则目标函数值增加, 而增加 A 车间的可用工时数, 目标函数值不增加。下面对一般的问题考虑这种变化。

设有如下形式的原问题:

$$\begin{aligned} &\min\ z = CX \\ &\text{满足} \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

和对偶问题:

$$\begin{aligned} &\max\ w = Qb \\ &\text{满足} \begin{cases} QA \geq C \\ Q \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

若 B 为原问题的最优解 X' 对应的基矩阵,X'_B 为基变量组成的向量, C_B 为基变量在目标函数中对应的系数向量。$Q' = C_B B^{-1}$ 为对偶问题的最优解。由前面的定理可知, 最

优目标函数值为:

$$z = C_B X_B = C_B B^{-1} b = Q' b$$

也即

$$z = q_1' b_1 + q_2' b_2 + \ldots + q_m' b_m$$

由此得

$$\frac{\vartheta z}{\vartheta b_i} = q_i' \quad \text{或} \frac{\vartheta z}{\vartheta b} = q'$$

可见约束条件方程右端的 b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ 增加一单位时, 目标函数 z 的变化量为 q_i' $(i = 1, 2, \ldots, m)$。

定义 1. 约束条件方程右端的 $b_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ 增加一单位时, 最优目标函数 z 的变化量称为资源 $i (i = 1, 2, \ldots, m)$ 的 **影子价格**。

影子价格是针对某一种资源而言的 (与决策变量无关), 而问题中其它数据不变。由上面的讨论可知, 在求出线性规划问题的最优解后, 资源 i 的影子价格就是第 i 种资源的机会费用 z_{n+i} 或 $-z_{n+i}$。

第六节 对偶单纯形法的一个应用 (增加约束条件)

在求出线性规划问题的最优解以后, 又增加一个约束条件, 此时可以用对偶单纯形法求解, 不必对原问题从头做起。其步骤如下:

第一步 检验原来的最优解是否满足新增加的约束条件。若满足, 则原最优解就是新问题的最优解; 若不满足, 就进行下一步;

第二步 将新增加的约束条件加入松弛变量或多余变量后加到原来的最优单纯形表中去, 令原来的基变量和新增加的松弛变量或多余变量组成新的基。进行初等变换, 将基变量对应的系数矩阵变为单位矩阵。显然此时得到的是一个满足最优检验的不可行的基本解;

第三步 利用对偶单纯形法求最优解。

例 3. 第一章例 2 在求出最优解 $x_1 = 20, x_2 = 20, x_3 = 0$(表 2-3) 后, 增加一个市场约束条件 $x_1 \leq 15$。显然原最优解不满足该约束条件, 进行第二步。对 $x_1 \leq 15$, 加入松弛变量 x_6 得

$$x_1 + x_6 = 15, x_6 \geq 0 \tag{4.9}$$

得表 4–7。

表 4–7

$c_j \rightarrow$			40	45	24	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
45	x_2	20	0	1	$-1/3$	1	$-2/3$	0
40	x_1	20	1	0	1	-1	1	0
0	x_6	15	1	0	0	0	0	1

进行初等变换, 使 a_{31} 为 0, 得表 4-8.

表 4–8

$c_j \to$			40	45	24	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
45	x_2	20	0	1	$-1/3$	1	$-2/3$	0
40	x_1	20	1	0	1	-1	1	0
0	x_6	-5	0	0	-1	1	-1	1
z_j			40	45	25	5	10	0
$c_j - z_j$			0	0	-1	-5	-10	0

表 4-8 满最优检验, 但 $x_6 = -5$, 不可行, 进行第三步, 用对偶单纯形法, 在 a_{33} 上转轴, 得最优解表 4-9。

表 4–9

$c_j \to$			40	45	24	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
45	x_2	$65/3$	0	1	0	$2/3$	$-1/3$	$-1/3$
40	x_1	15	1	0	0	0	0	1
24	x_3	5	0	0	1	-1	1	-1
z_j			40	45	24	6	9	1
$c_j - z_j$			0	0	0	-6	-9	-1

从以上叙述可见, 对偶单纯形法可以应用于下述两种情况:

1. 对约束条件方程全是 "$\geq$" 型的线性规划问题, 不必加人工变量用大 M 法或两阶段法求解, 用对偶单纯形法求解简便一些。

2. 在后面介绍到的解整数规划问题的分枝定界法中, 就会遇到对原问题增加一个约束条件方程的情况, 此时可利用本节介绍的方法, 不必对问题重新计算。

习题

1. 写出下列线性规划问题的对偶问题:

(1).

$$\begin{array}{ll} \min & z = 20x_1 + 30x_2 + 40x_3; \\ 满足 & \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 100, \\ x_1 + x_2 \leq 20, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases} \end{array}$$

(2).

$$\begin{array}{ll} \min & z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3; \\ 满足 & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 5, \\ 2x_1 + x_3 \leq 4, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0, x_4 为自由变量 \end{cases} \end{array}$$

(3).

$$\begin{array}{ll} \min & z = 4x_1 - 3x_2 + 8x_3; \\ 满足 & \begin{cases} -2 \leq x_1 \leq 6, \\ 4 \leq x_2 \leq 14, \\ -12 \leq x_3 \leq -8. \end{cases} \end{array}$$

2. 用对偶单纯形法解下列线性规划问题:

(1).

$$\begin{array}{ll} \min & z = 7x_1 + 4x_2 + 12x_3; \\ 满足 & \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 6, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 36, \\ x_j \geq 0, 对一切 j. \end{cases} \end{array}$$

(2).

$$\begin{array}{ll} \min & z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5; \\ 满足 & \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \leq -3, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \leq -2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 \leq 4, \\ x_j \geq 0, 对一切 j. \end{cases} \end{array}$$

3. 应用对偶理论, 证明下列线性规划问题是可行的, 但无最优解:

$$\begin{array}{ll} \min & z = x_1 - x_2 + x_3; \\ 满足 & \begin{cases} x_1 - x_3 \geq 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ x_j \geq 0, 对一切 j. \end{cases} \end{array}$$

4. 应用对偶单纯形法, 证明下列线性规划问题是不可行的:

$$\max \quad z = -4x_1 - 3x_2;$$
$$\text{满足} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ -x_2 \le -1, \\ -x_1 + 2x_2 \le 1, \\ x_j \ge 0, \text{对一切} j. \end{cases}$$

5. 某线性规划问题及最优单纯形表如表 4–10:

$$\max \quad z = 10x_1 + 8x_2 + 17x_3;$$
$$\text{满足} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{7}{8}x_3 + x_4 = 25, \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{9}{8}x_3 + x_5 = 45, \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{11}{4}x_2 + \frac{25}{8}x_3 + x_6 = 145, \\ x_j \ge 0, \text{对一切} j. \end{cases}$$

表 4–10

$c_j \rightarrow$			40	45	24	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
8	x_2	40	0	1	1/2	−2	2	0
10	x_1	30	1	0	3/2	3	−1	0
0	x_6	20	0	0	1	4	−5	1
z_j			1	8	19	14	6	0
$c_j - z_j$			0	0	−2	−14	−6	0

现增加下列约束条件, 求新问题的最优解:

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 150.$$

6. 考虑下列线性规划问题:

$$\min \quad z = 5x_1 + 20x_2 + 8x_3;$$
$$\text{满足} \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 20, \\ x_1 - x_3 = 0, \\ x_j \ge 0, \text{对一切} j. \end{cases}$$

要求 (1). 建立该问题的对偶问题;

(2). 求对偶问题的最优解;

(3). 根据对偶问题的最优解表指出原问题的最优解;

(4). 用对偶单纯形法求原问题的最优解，验证 (3) 的结果。