

# 水平层状海洋-地球模型中地震面波振型解\*

陈蔚天 陈晓非\*\*

(北京大学地球物理学系, 北京 100871)

**摘要** 提出了一种求解水平层状海洋-地球模型中面波振型问题的新算法. 这种算法具有理论上的简洁和计算上高效特性以及在高频情况下数值计算上的稳定性, 从而彻底消除了高频情况下数值计算上的精度失真问题, 为研究海洋-地球模型中面波传播及相关问题提供了一个有力的工具.

**关键词** 面波振型解 水平层状海洋-地球模型 地震面波

含有液体层的水平层状介质中的地震面波问题是地震学中的一个经典问题, 对于研究地球的结构、确定震源参数以及合成理论地震图都有重要应用<sup>[1-3]</sup>. 这方面最具代表性的工作是计算任意多层液、固体层状介质中地震面波问题的 Haskell 矩阵方法<sup>[4,5]</sup>以及传播矩阵方法<sup>[6]</sup>. 由于 Haskell 矩阵与传播矩阵方法在高频情况下存在数值计算的不稳定性问题, 人们又提出了一些改进方法<sup>[7-10]</sup>, 但均未从根本上解决这一问题. Kennett 等人从完全不同的角度出发, 采用反射-透射系数, 提出了一种数值计算上稳定的算法来求解层状介质中的面波振型问题<sup>[11]</sup>.

陈晓非在 Luco 和 Apsel 的广义反射-透射系数方法<sup>[12]</sup>基础上提出了一种系统、有效的算法来求解固体层状介质中的面波振型问题<sup>[13]</sup>. 这种算法不仅具有理论上的简洁和计算上的高效特性, 而且彻底消除了高频情况下数值计算的不稳定性问题. 然而由于只考虑了固体情况, 陈的算法不能用于计算海洋-地球模型中的面波振型问题. 本文将推广陈所提出的算法, 使其也适用于包含多层液体层的层状海洋-地球模型.

## 1 基本方程及其通解

由于海洋中不同深度的温度、压力和盐度的不同, 液体部分可分为不同层. 固体部分根据不同深度密度  $\rho$  和弹性常数  $\lambda, \mu$  也划分为不同层. 本文所考虑的水平层状海洋-地球模型可参照文献[13]中的图 1, 所不同的是第 1 至第  $L$  层为液体. 在本文中, 我们将根据面波振型是齐次弹性动力学方程(不含源项)在给定边界条件下的非零解这一基本原则<sup>[13]</sup>, 系统地导出水平层状海洋-地球模型中面波振型解.

在频率域上, 均匀各向同性的多层海洋-地球模型中的齐次弹性动力学方程可表述如下.

在液体层中:

$$-\rho^{(j)}\omega^2\mathbf{u}^{(j)}(\mathbf{x},\omega)=\lambda^{(j)}\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}^{(j)}(\mathbf{x},\omega), \quad j=1,2,\dots,L; \quad (1)$$

在固体层中:

$$-\rho^{(j)}\omega^2\mathbf{u}^{(j)}(\mathbf{x},\omega)=(\lambda^{(j)}+2\mu^{(j)})\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}^{(j)}(\mathbf{x},\omega)-\mu^{(j)}\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}^{(j)}(\mathbf{x},\omega), \quad (2)$$

2001-01-20 收稿, 2001-02-27 收修改稿

\* 国家杰出青年科学基金(DYF49625406)和国家重点基础研究规划发展研究(G1998040702)资助项目

\*\* 通讯联系人

$j = L+1, L+2, \dots, N$ . 其中  $\rho^{(j)}, \mu^{(j)}, \lambda^{(j)}$  分别为第  $j$  层的密度和 Lamé 常数, 在液体层中  $\mu^{(j)}$  为零. 由于液体层中的 SH 波场恒为零, 而固体层中 SH 波的解与纯固体层中的 SH 波的解一致, 因此本文将只考虑海洋-地球模型中 P-SV 波场的解.

为了有效地求解方程(1)和(2), 我们利用横向波函数矢量基  $R_k^m(r, \theta), S_k^m(r, \theta)$  和  $T_k^m(r, \theta)$  将波场展开<sup>[1]</sup>, 如此一来, 方程(1)和(2)被转化为如下关于由展开系数函数  $u_R(z), u_S(z), \sigma_R(z)$  和  $\sigma_S(z)$  所定义的位移-应力矢量的一阶常微分方程组如下.

在液体层( $j = 1, 2, \dots, L$ )中,

$$\frac{d}{dz} f^{(j)}(z) = A_F^{(j)} f^{(j)}(z), \tag{3}$$

$$f^{(j)}(z) = [u_R^{(j)}(z), \sigma_R^{(j)}(z)]^T, \tag{3a}$$

$$A_F^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 & (\rho^{(j)}\omega^2 - \lambda^{(j)}k^2)/(\lambda^{(j)}\rho^{(j)}\omega^2) \\ -\rho^{(j)}\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3b}$$

$$u_S^{(j)}(z) = \frac{k}{\rho^{(j)}\omega^2} \sigma_R^{(j)}(z), \tag{3c}$$

$$\sigma_S^{(j)}(z) = 0. \tag{3d}$$

在固体层 ( $j = L+1, L+2, \dots, N$ )中,

$$\frac{d}{dz} y^{(j)}(z) = A_S^{(j)} y^{(j)}(z), \tag{4}$$

$$y^{(j)}(z) = [u_S^{(j)}(z), u_R^{(j)}(z), \sigma_S^{(j)}(z), \sigma_R^{(j)}(z)]^T. \tag{4a}$$

$$A_S^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 & k & 1/\mu^{(j)} & 0 \\ -k\lambda^{(j)}\xi^{(j)} & 0 & 0 & \xi^{(j)} \\ k^2\zeta^{(j)} - \omega^2\rho^{(j)} & 0 & 0 & k\lambda^{(j)}\xi^{(j)} \\ 0 & -\omega^2\rho^{(j)} & -k & 0 \end{bmatrix}, \tag{4b}$$

其中,  $\xi^{(j)} = 1/[\lambda^{(j)} + 2\mu^{(j)}]$  和  $\zeta^{(j)} = 4\mu^{(j)}[\lambda^{(j)} + \mu^{(j)}]/[\lambda^{(j)} + 2\mu^{(j)}]$ . 与上述常微分方程组相应的边界条件可用位移-应力矢量表示为:

$$\sigma_R^{(1)}(z^{(0)}) = 0; \tag{5a}$$

$$f^{(j)}(z^{(j)}) = f^{(j+1)}(z^{(j)}), \quad j = 1, 2, \dots, L-1; \tag{5b}$$

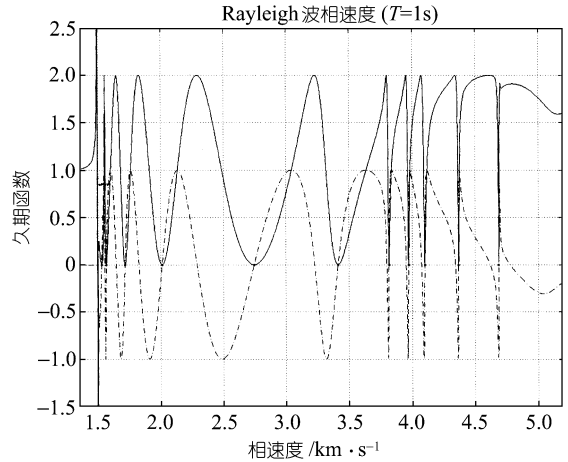


图 1 周期 1 s 时久期函数与波慢度倒数的关系以及其根的分布

介质参数如表 1 所示. 图中实线与虚线分别为久期函数的实部与虚部, 黑点为相应的根的分布

$$\begin{bmatrix} f_1^{(L)}(z^{(L)}) \\ 0 \\ f_2^{(L)}(z^{(L)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2^{(L+1)}(z^{(L)}) \\ y_3^{(L+1)}(z^{(L)}) \\ y_4^{(L+1)}(z^{(L)}) \end{bmatrix}; \quad (5c)$$

$$\mathbf{y}^{(j)}(z^{(j)}) = \mathbf{y}^{(j+1)}(z^{(j)}), \quad j = L+1, L+2, \dots, N; \quad (5d)$$

$$\|\mathbf{y}^{(N+1)}(z)\| < +\infty \quad \text{当 } z \rightarrow +\infty. \quad (5e)$$

根据常微分方程理论, 方程组(3)和(4)的解可表示为<sup>[1]</sup>

$$\mathbf{f}^{(j)}(z) = \mathfrak{S}^{(j)} \mathbf{K}^{(j)}(z) \mathbf{c}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, L-1, L; \quad (6)$$

及

$$\mathbf{y}^{(j)}(z) = \mathbf{E}^{(j)} \mathbf{\Lambda}^{(j)}(z) \mathbf{C}^{(j)}, \quad j = L+1, L+2, \dots, N, N+1. \quad (7)$$

$\mathbf{E}^{(j)}$  和  $\mathbf{\Lambda}^{(j)}(z)$  的具体表达式参见文献[13], 而

$$\mathfrak{S}^{(j)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \omega^2 \rho^{(j)} (\eta^{(j)})^{-1} & -\omega^2 \rho^{(j)} (\eta^{(j)})^{-1} \end{bmatrix}, \quad (8a)$$

$$\mathbf{K}^{(j)}(z) = \text{diag}\{e^{-\eta^{(j)}(z-z^{(j-1)})}, e^{-\eta^{(j)}(z^{(j)}-z)}\}, \quad (8b)$$

$$\eta^{(j)} = \sqrt{k^2 - \omega^2 \rho^{(j)} / \lambda^{(j)}}, \quad \text{且 } \text{Re}\{\eta^{(j)}\} \geq 0, \quad (8c)$$

$$\mathbf{c}^{(j)} = [c_{fd}^{(j)}, c_{fu}^{(j)}]^T, \quad (8d)$$

$$\mathbf{C}^{(j)} = [c_{pd}^{(j)}, c_{sd}^{(j)}, c_{pu}^{(j)}, c_{su}^{(j)}]^T. \quad (8e)$$

## 2 广义反射-透射系数

为利用广义反射-透射系数(简称广义  $R/T$  系数)来求解常系数矢量  $\mathbf{c}^{(j)}$  和  $\mathbf{C}^{(j)}$ , 我们将分别讨论在液体-液体界面和液体-固体界面上的广义  $R/T$  系数及其计算公式.

### 2.1 液体-液体界面上的广义 $R/T$ 系数

与固体层情况类似, 在引入广义  $R/T$  系数之前, 我们先来定义修正的反射-透射系数(简称为修正的  $R/T$  系数). 修正的  $R/T$  系数被用来描述在两层介质之间的界面上的反射与透射现象, 而忽略其他介质层的影响. 第  $j$  个液体-液体界面上修正的  $R/T$  系数由下式定义

$$\begin{cases} c_{fu}^{(j)} = R_{du}^{(j)} c_{fd}^{(j)} + T_u^{(j)} c_{fu}^{(j+1)}, \\ c_{fd}^{(j+1)} = T_d^{(j)} c_{fd}^{(j)} + R_{ud}^{(j)} c_{fu}^{(j+1)}, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, L-1. \quad (9)$$

由液体-液体界面上位移-应力矢量的连续性边界条件(5b), 得

$$\begin{bmatrix} T_d^{(j)} & R_{ud}^{(j)} \\ R_{du}^{(j)} & T_u^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{(j+1)} & -\varepsilon_{12}^{(j)} \\ \varepsilon_{21}^{(j+1)} & -\varepsilon_{22}^{(j)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{(j)} & -\varepsilon_{12}^{(j+1)} \\ \varepsilon_{21}^{(j)} & -\varepsilon_{22}^{(j+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\eta^{(j)}[z^{(j)}-z^{(j-1)}]} & 0 \\ 0 & e^{-\eta^{(j+1)}[z^{(j+1)}-z^{(j)}]} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$j=1, 2, \dots, L-1$ . 这里的  $\varepsilon_{nm}^{(j)}$  是矩阵  $\mathfrak{S}^{(j)}$  的矩阵元. 在修正的  $R/T$  系数基础之上, 我们可定义广义  $R/T$  系数. 第  $j$  个液体-液体界面上的广义  $R/T$  系数可通过如下公式来定义

$$\begin{cases} c_{fd}^{(j+1)} = \hat{T}_d^{(j)} c_{fd}^{(j)}, \\ c_{fu}^{(j)} = \hat{R}_{du}^{(j)} c_{fd}^{(j)}, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, L-1. \quad (11)$$

将(11)式代入(9)式, 我们得到

$$\begin{cases} \hat{T}_d^{(j)} = [I - R_{ud}^{(j)} \hat{R}_{du}^{(j+1)}]^{-1} T_d^{(j)}, \\ \hat{R}_{du}^{(j)} = R_{du}^{(j)} + T_u^{(j)} \hat{R}_{du}^{(j+1)} \hat{T}_d^{(j)}, \end{cases} \quad j=L-1, L-2, \dots, 2, 1. \quad (12)$$

(12)式给出了利用修正的  $R/T$  系数计算广义  $R/T$  系数的递推公式. 由于海洋-地球模型的表面是一自由面, 只存在反射波, 因此该自由面上的广义  $R/T$  系数可定义如下

$$c_{fd}^{(1)} = \hat{R}_{ud}^{(0)} c_{fu}^{(1)}. \quad (13)$$

利用自由表面应力为零的边界条件(5a), 可得

$$\hat{R}_{ud}^{(0)} = e^{-\eta^{(1)}[z^{(1)}-z^{(0)}]}. \quad (14)$$

### 2.2 液体-固体介面上的广义 $R/T$ 系数

由(12)式可以看出, 欲计算液体-液体面上的广义  $R/T$  系数, 须先知道固体-液体介面上的  $\hat{R}_{du}^{(L)}$ , 本节中将给出  $\hat{R}_{du}^{(L)}$  的具体算法. 液体-固体介面在海洋-地球模型中是一个特殊的介面, 在该介面上部只有  $P$  波而在其下部不仅有  $P$  波而且有  $S$  波. 该介面上的修正的  $R/T$  系数由如下公式定义

$$\begin{cases} c_u^{(L)} = R_{du}^{(L)} c_d^{(L)} + T_u^{(L)} C_u^{(L+1)}, \\ C_d^{(L+1)} = T_d^{(L)} c_d^{(L)} + R_{ud}^{(L)} C_u^{(L+1)}. \end{cases} \quad (15)$$

这里  $c_u^{(L)} = c_{fu}^{(L)}$  和  $c_d^{(L)} = c_{fd}^{(L)}$  均为标量,  $C_u^{(L+1)} = [C_{pu}^{(L+1)}, C_{su}^{(L+1)}]^T$  及  $C_d^{(L+1)} = [C_{pd}^{(L+1)}, C_{sd}^{(L+1)}]^T$  为  $2 \times 1$  的列向量. 因而  $R_{du}^{(L)}$  是标量,  $R_{ud}^{(L)}$  是  $2 \times 2$  的矩阵,  $T_u^{(L)}$  是  $1 \times 2$  的行向量,  $T_d^{(L)}$  是  $2 \times 1$  的列向量. 利用连续性边界条件(5c), 得

$$\begin{bmatrix} T_d^{(L)} & R_{ud}^{(L)} \\ R_{du}^{(L)} & T_u^{(L)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{21}^{(L+1)} & e_{22}^{(L+1)} & -\varepsilon_{12}^{(L)} \\ e_{31}^{(L+1)} & e_{32}^{(L+1)} & 0 \\ e_{41}^{(L+1)} & e_{42}^{(L+1)} & -\varepsilon_{22}^{(L)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{(L)} & -e_{23}^{(L+1)} & -e_{24}^{(L+1)} \\ 0 & -e_{33}^{(L+1)} & -e_{34}^{(L+1)} \\ \varepsilon_{21}^{(L)} & -e_{43}^{(L+1)} & -e_{44}^{(L+1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-\eta^{(L)}[z^{(L)}-z^{(L-1)}]} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\gamma^{(L+1)}[z^{(L+1)}-z^{(L)}]} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\nu^{(L+1)}[z^{(L+1)}-z^{(L)}]} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

相应地, 液体-固体介面上的广义  $R/T$  系数由下式定义

$$\begin{cases} C_d^{(L+1)} = \hat{T}_d^{(L)} c_d^{(L)}, \\ c_u^{(L)} = \hat{R}_{du}^{(L)} c_d^{(L)}, \end{cases} \quad (17)$$

其中,  $\hat{T}_d^{(L)}$  是  $2 \times 1$  列向量,  $\hat{R}_{du}^{(L)}$  是标量. 结合(16)和(17)式, 可得

$$\begin{cases} \hat{T}_d^{(L)} = \{I - R_{ud}^{(L)} \hat{R}_{du}^{(L+1)}\}^{-1} T_d^{(L)}, \\ \hat{R}_{du}^{(L)} = R_{du}^{(L)} + T_u^{(L)} \hat{R}_{du}^{(L+1)} \hat{T}_d^{(L)}. \end{cases} \quad (18)$$

上式中的广义反射系数  $\hat{R}_{du}^{(L+1)}$  是一  $2 \times 2$  矩阵, 可由固体层介质中的广义  $R/T$  系数计算公式确定. 固体层部分的广义  $R/T$  系数的定义及计算公式在陈的论文中已有详细论述<sup>[13]</sup>, 这里不再重复.

### 3 面波振型解：频散曲线和本征函数

根据广义  $R/T$  系数的定义，常系数  $c^{(j)}$  和  $C^{(j)}$  可简洁地表示为

$$\begin{cases} c_{fd}^{(j)} = \hat{T}_d^{(j-1)} \hat{T}_d^{(j-2)} \dots \hat{T}_d^{(2)} c_{fd}^{(1)}, \\ c_{fu}^{(j)} = \hat{R}_{du}^{(j)} c_{fd}^{(j)}, \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, L; \tag{19a}$$

$$\begin{cases} C_d^{(j)} = \hat{T}_d^{(j-1)} \hat{T}_d^{(j-2)} \dots \hat{T}_d^{(L)} c_{fd}^{(L)}, \\ C_u^{(j)} = \hat{R}_{du}^{(j)} C_d^{(j)}, \end{cases} \quad j=L+1, L+2, \dots, N; \tag{19b}$$

以及

$$C_d^{(N+1)} = \hat{T}_d^{(N)} \hat{T}_d^{(N-1)} \dots \hat{T}_d^{(L)} c_{fd}^{(L)}. \tag{19c}$$

相应地，液体层中的位移-应力矢量可被表示为

$$f^{(j)}(z) = \mathfrak{S}^{(j)} \mathbf{K}^{(j)}(z) \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{R}_{du}^{(j)} \end{bmatrix} \hat{T}_d^{(j-1)} \hat{T}_d^{(j-2)} \dots \hat{T}_d^{(1)} c_{fd}^{(1)}, \quad j=1,2,\dots, L-1, L; \tag{20a}$$

固体层中的位移-应力矢量亦可被表示为

$$y^{(j)}(z) = \mathbf{E}^{(j)} \mathbf{\Lambda}^{(j)}(z) \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \hat{R}_{du}^{(j)} \end{bmatrix} \hat{T}_d^{(j-1)} \hat{T}_d^{(j-2)} \dots \hat{T}_d^{(L)} \hat{T}_d^{(L-1)} \dots \hat{T}_d^{(1)} c_{fd}^{(1)}, \quad j = L+1, \dots, N, N+1. \tag{20b}$$

从(20a)和(20b)式我们不难看出，欲获得位移-应力矢量的解，必须求出常系数  $c_{fd}^{(1)}$ 。根据广义  $R/T$  系数  $\hat{R}_{du}^{(1)}$  和  $\hat{R}_{ud}^{(0)}$  的定义，我们有  $c_{fd}^{(1)} = \hat{R}_{ud}^{(0)} c_{fu}^{(1)}$  和  $c_{fu}^{(1)} = \hat{R}_{du}^{(1)} c_{fd}^{(1)}$ ，亦即

$$\{1 - \hat{R}_{ud}^{(0)} \hat{R}_{du}^{(1)}\} c_{fd}^{(1)} = 0. \tag{21}$$

另一方面，根据面波振型解的定义，常系数  $c_{fd}^{(1)}$  必须为一非零值以保证最后的解为非零解，这将导致如下的频散方程

$$1 - \hat{R}_{ud}^{(0)} \hat{R}_{du}^{(1)} = 0. \tag{22}$$

由于  $\hat{R}_{ud}^{(0)}$  和  $\hat{R}_{du}^{(1)}$  均为频率和波慢度的函数，我们可由(22)式确定在给定频率下的各阶相速度及简正振型。需要指出的是，尽管频散方程(22)在形式上只包含顶层介质的广义  $R/T$  系数，但其他层介质的影响已经通过递推关系包含在  $\hat{R}_{du}^{(1)}$  里了。图 1 画出了周期  $T=1.0$  s 时久期函数“ $1 - \hat{R}_{ud}^{(0)} \hat{R}_{du}^{(1)}$ ”与波慢度倒数的关系及其根的分布。所采用的介质模型参数列于表 1。图中分别用实线和虚线表示久期函数的实部与虚部，用黑点标示根的分布。图 2 绘出了该介质模型在 0 至 4 Hz 频率范围内的频散曲线。如图 3 所示，随着频率的增大，Stoneley 震相清楚地

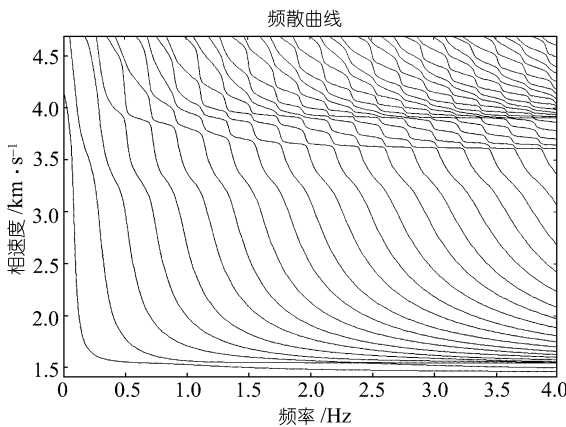


图 2 海洋-地球模型中面波振型的频散曲线  
介质参数如表 1 所示

显现出来. 它的相速度接近 Stoneley 波速度  $C_{St}$ , 且随着频率的增加, Stoneley 震相的相速度与  $C_{St}$  渐趋一致.

有了各个振型的相速度后, 可以由 (20a) 和 (20b) 式计算出特定频率 (或周期) 下的本征位移与本征应力. 图 4 分别绘出了上述介质模型在频率为 1 Hz 时 Rayleigh 振型的本征位移与本征应力的水平、垂直分量. 可以看到除了在固体-液体介面上的水平应力分量是不连续的以外, 其他各个分量都是连续的, 这与所要求满足的边界条件完全符合. 在自由表面上, 归一化后的应力分量残余值<sup>[13]</sup>均小于  $10^{-6}$ , 表明我们算法具有很高的精度.

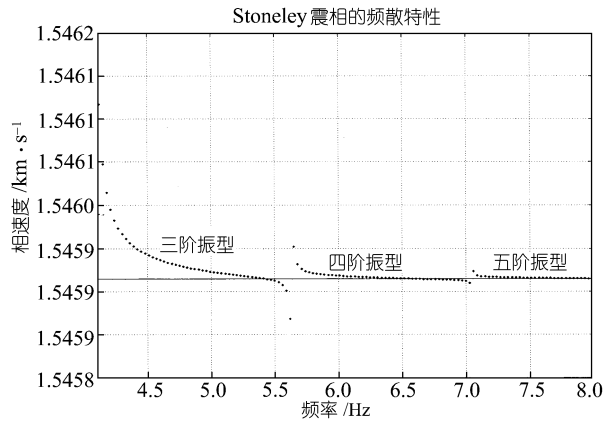


图 3 Stoneley 震相的频散特性与 Stoneley 波相速度  $C_{St}$  的关系

表 1 海洋-地球模型参数

层序号	层厚度/km	密度/g · cm <sup>-3</sup>	S 波速度/km · s <sup>-1</sup>	P 波速度/km · s <sup>-1</sup>
1	0.50	1.0250	0.0	1.500
2	1.00	1.0270	0.0	1.450
3	2.50	1.0285	0.0	1.550
4	6.00	2.4000	3.600	6.000
5	10.00	3.5000	3.900	6.700
6	∞	3.3000	4.700	8.200

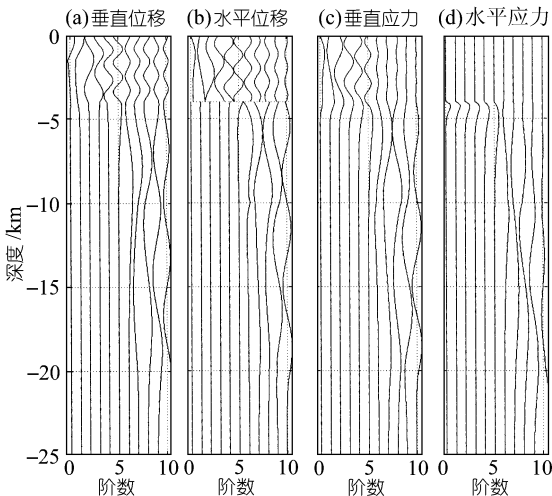


图 4 周期为 1 s 时各个振型的本征函数  
介质参数如表 1 所示. (a) 为垂直位移, (b) 为水平位移, (c) 为垂直应力, (d) 为水平应力

### 4 结语

本文中, 我们将陈晓非基于广义反射-透射系数方法所提出的计算平行层状固体地球介质中面波振型问题的方法<sup>[13]</sup>推广为包含液体层的平行层状液体-固体的情况, 以求解水平层状海洋-地球模型中的面波振型问题. 与以往的算法相比, 我们的方法具理论简洁、计算效率高以及适用于任意频率的高精度性. 首先, 我们从简正振型是自由弹性动力学方程在给定边界条件下的非零解这一基本原则出发, 自然地导出了求解水平层状海洋-地球模型中面波振型问题的理论公式. 其次, 由于使用了广义  $R/T$  系数, 我们的算法彻底消除了高频情况下数值计算中的精度失真问题, 因而不仅具有较高的计算效率, 而且对于任意频率都是稳定的和精确的. 因此, 可以预期

这种新的算法将为研究海洋-地球模型中面波传播及相关问题提供一个有力的工具。

### 参 考 文 献

- 1 Aki K, Richards P G. Quantitative Seismology: Theory and Methods. San Francisco: W. H. Freeman, 1980
- 2 宋海斌, 马在田, 张关泉, 等. 利用平面波地震记录同时反演层状介质纵、横波速度. 中国科学, D 辑, 1996, 26(3): 282
- 3 Chen X F. Seismogram synthesis in multi-layered half-space: (1) Theoretical formulations. Earthq Res (in China), 1999, 13: 149~174
- 4 Haskell N A. The dispersion of surface waves on multi-layered media. Bull Seism Soc Am, 1953, 43: 17~34
- 5 Harkrider D G. Surface waves in multi-layered elastic media I. Rayleigh and love waves from buried sources in a multi-layered half-space. Bull Seism Soc Am, 1964, 54: 627~679
- 6 Gilbert F, Backus G. Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. Geophysics, 31: 326~332
- 7 Abo-Zena A M. Dispersion function computations for unlimited frequency values. Geophys J R astr Soc, 1979, 58: 91~1741
- 8 Knopoff L. A matrix method for elastic wave problems. Bull Seism Soc Am, 1964, 54: 431~438
- 9 Cormier V F, Mandal B, Harvey D. Incorporation of velocity gradients in the synthesis of complete seismograms by the locked mode method. Bull Seism Soc Am, 1991, 81: 897~930
- 10 李幼明, 束沛镒. 层状介质中地震波频散函数和体波广义反射系数的计算. 地球物理学报, 1982, 25: 130
- 11 Kennett B L N, Kerry N J. Seismic waves in a stratified half-space. Geophys J R astr Soc, 1979, 57: 557~583
- 12 Luco J E, Apsel R J. On the Green's function for a layered half-space. Part I. Bull Seism Soc Am, 1983, 73: 909~929
- 13 Chen X F. A systematic and efficient method of computing normal modes for multi-layered half-space. Geophys J Int, 1993, 115: 391~409