第 15 卷 第 7 期 强 激 光 与 粒 子 束 Vol. 15, No. 7
2003 年 7 月 HIGH POWER LASER AND PARTICLE BEAMS Jul., 2003

文章编号: 1001-4322(2003)07-0713-04

一维晶化束的辐射能损与束流冷却*

罗诗裕, 胡西多, 邵明珠, 吴木营, 陈少文

(东莞理工学院 计算机系, 广东 东莞 523106)

摘 要: 用 Jacobian 椭圆函数求解了一维晶化束的非线性动力学方程,并用第一类全椭圆积分表示了粒子振动周期。在经典物理学框架内,讨论了储存环中作相对论运动的带电粒子的辐射能损,以及由于辐射能损导致的束流冷却。结果表明,由于辐射损失束流将进一步冷却。

关键词: 晶化束; 储存环; 相对论; 带电粒子; 辐射能损; 束流冷却

中图分类号: TL501; TL594 **文献标识码:** A

经典物理学表明,任何一个带电粒子在磁场中作加速运动时,都将自发地向外辐射电磁波。美国费米国家实验室的超高能质子加速器(Tevatron)的质子能量可以达到 TeV 以上。可以预期,以这种速度运动的高能质子在加速过程中将不断向外辐射能量。当然,同相对论粒子能量相比,辐射引起的能量损失完全可以忽略,但是,对于束流冷却来说却是值得考虑的。

通常,应用和实验都要求加速器能提供能量高、强度大和品质好的束流。遗憾的是,有些指标(比如强度和能量)很难兼得。储存环技术使这一矛盾得到了缓减。但是由于常规加速器提供的束流品质差,要求储存环积累太强的束流也会遇到困难。因为随着束流强度的增加,空间电荷效应和内束散射将导致束流不稳定。为此,在 20 世纪 70 年代人们提出了束流冷却技术,并在高能物理、天体物理和重离子聚变中找到了重要应用。

束流冷却通常是指加速器技术中用电子束进行的冷却。所谓电子束冷却就是将温度相对较低的电子束与温度较高的离子束一道运动,由于离子与电子之间不断交换能量,最后达到热平衡使离子变冷。实际上,加速器技术中的束流冷却通常是在储存环的一个直线段上安装一个冷却器来完成的。当能量很高的带电粒子通过冷却器时,恰好有一束温度较低的电子同它一道运动,并将带电粒子完全浸泡在冷的电子云中。当离子和电子不断碰撞失去横向能量时,束流就被冷却。目前,中科院近代物理所正在它的重离子储存环(HIRFL-CSR)上安装束流冷却装置。

文献[1]在线性近似下考虑了周期冷却效应,把粒子运动方程化为熟知的 Mathieu 方程,导出了束流冷却时间。值得注意的是,当束流足够冷,比如系统的耦合参数大于 170 时,束流处于固体状态,我们把这种束流称为"晶化束(CB)"。在储存环中作周期运动的晶化束,同样将向外辐射电磁能量。我们把这种辐射称为晶化束的电磁辐射(RCB)。文献[2~5]曾对一维晶化束的非线性动力学问题进行过讨论。本文将在经典物理框架内,对一维晶化束的电磁辐射作进一步分析。结果表明,束流在被电子束冷却的同时,由于辐射能损将加速自身的冷却。

1 运动方程

当储存环中的粒子数比较低(比如,对于 GSI 的实验储存环大约为 10^6 数量级)时,晶化束退化为一维库仑链,相邻粒子之间的距离约为 10^{-5}m。假设粒子只有横向位移,且粒子之间的距离相等。选择粒子的平衡轨道作为自然坐标,并设 x 是粒子离开平衡轨道的横向距离。如果不考虑磁场公差和磁场梯度公差,则粒子的横向运动方程可表示为[1~3]

$$m_0\gamma\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\kappa x + \frac{Z^2e^2}{4\pi\varepsilon_0 d^3\gamma^2}\left\{\sum_{k\neq0}\frac{1-\cos\Delta k}{|k|^3} - \frac{9a^2}{2d^2}\sum_{k\neq0}\frac{(1-\cos\Delta k)\sin^2\Delta k}{|k|^5}\right\}x - \frac{3Z^2e^2}{8\pi\varepsilon_0\gamma^2d^5}\left\{\sum_{k\neq0}\frac{(1-\cos\Delta k)^3-3(1-\cos\Delta k)\sin^2\Delta k}{|k|^5}\right\}x^3 \tag{1}$$

式中: m_0 是粒子静止质量, Z 是粒子原子序数, e 是电子电荷, d 是相邻粒子间距, a 是粒子横向相干振幅,其大

* **收稿日期**: 2002-10-12; **修订日期**: 2003-04-14
作者简介: 罗诗裕(1940-),男,教授,主要研究方向为加速器束流动力学; E-mail: oul901@163.com。

小由初值确定, γ 是相对论因子, 而

$$\Delta = 2\pi n/N \tag{2}$$

$$\kappa = m_0 \gamma \nu_B^2 \omega_c^2 \tag{3}$$

N 是总粒子数, n 是系统相干振动模式数, $k = j - i$ (i 和 j 是粒子编号) 为整数。ω_c 是储存环中粒子的回旋频率, ν_B 是粒子 Betatron 振动频率, 注意到 k 必须为整数, 式(1)中的 $\cos\Delta k$ 和 $\sin\Delta k$ 只取下列简单值

$$\cos\Delta k = \begin{cases} -1, & k = p(2m+1) \\ \cos(\pi/p), & k = p(m+1/p) \\ 1, & k = 2pm \end{cases} \tag{4}$$

$$\sin\Delta k = \begin{cases} 0, & k = p(2m+1) \\ \sin(\pi/p), & k = p(m+1/p) \\ 0, & k = 2pm \end{cases} \tag{5}$$

其中 p 和 m 是任意整数。令

$$X = x/d, \qquad s = vt/d \tag{6}$$

v 是粒子速度, 则方程(1)化为无量纲形式

$$\frac{d^2X}{ds^2} + \omega_0^2 X + bX^3 = 0 \tag{7}$$

$$\omega_0^2 = \frac{d^2}{v^2 m_0 \gamma}\left[\kappa - A_1\left(s_1 - \frac{9a^2}{2d^2}s_3\right)\right] \tag{8}$$

$$b = \frac{3A_1 d^3}{2m_0 v^2 \gamma}(s_2 - 3s_3) \tag{9}$$

$$A_1 = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \gamma^2 d^3} \tag{10}$$

$$s_1 = \sum_{k \neq 0} \frac{1 - \cos\Delta k}{|k|^3} = \frac{4}{p^3}\lambda(3) - 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{p}\right)\xi(3) \tag{11}$$

$$s_2 = \sum_{k \neq 0} \frac{(1 - \cos\Delta k)^3}{|k|^5} = \frac{16}{p^5}\lambda(5) + 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{p}\right)^3 \xi(5) \tag{12}$$

$$s_3 = \sum_{k \neq 0} \frac{(1 - \cos\Delta k)\sin^2\Delta k}{|k|^5} = 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{p}\right)\left(\sin^2\frac{\pi}{p}\right)\xi(5) \tag{13}$$

$$\xi(n) = \sum_{m=0} \frac{1}{(mp+1)^n} \tag{14}$$

$$\lambda(n) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\zeta(n) \tag{15}$$

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \tag{16}$$

$\zeta(n)$ 是辐角为 n 的 Riemann-Zeta 函数。

2 方程的解与粒子运动周期

注意到方程(7)中的 b 大于零, 可见方程(7)所描述的系统是一个具有硬弹簧特性的非线性系统, 也是一个无阻尼项和无受迫项的 Duffing 方程。如果系统的初值取

$$X(0) = X_0, \qquad dX(0)/ds = 0 \tag{17}$$

则方程(7)的解可以表示为[6~8]

$$X = X_0 \mathrm{cn}(u) \tag{18}$$

其中

$$u = \sqrt{\omega_0^2 + bX_0^2}\, s \tag{19}$$

而 $\mathrm{cn}(u)$ 是 Jacobian 椭圆函数。于是粒子振动周期可表示为

$$T = 4F(\kappa_1)/\sqrt{\omega_0^2 + bX_0^2} \tag{20}$$

其中 $F(\kappa_1)$ 是第一类椭圆积分,而

$$\kappa_1^2 = bX_0^2/2(bX_0^2 + \omega_0^2) \tag{21}$$

是椭圆函数的模。

3　辐射频率的相对论效应

3.1　相对论效应

无论系统是线性还是非线性都存在质量的相对论效应。为了计算方便,以线性系统为例,在线性近似下,方程(7)化为

$$\frac{d^2 X}{ds^2} + \omega_0^2 X = 0 \tag{22}$$

其中

$$\omega_0 = \Omega_0 \gamma^{-1/2} \tag{23}$$

$$\Omega_0 = \frac{d}{v}\sqrt{\frac{\kappa}{m_0}} \tag{24}$$

Ω_0 是非相对论情况下的粒子自由振动频率,ω_0 是相对论情况下的粒子自由振动频率。(23)式表明,由于质量的相对论效应使粒子的振动频率随 $\gamma^{-1/2}$减小。

3.2　Doppler 效应

考虑到 Doppler 效应, l 次谐波的辐射频率可表示为

$$\omega_l = \frac{l\omega_0}{1 - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathrm{n}} \tag{25}$$

其中 n 是电磁辐射方向,$\beta = v/c$ 是粒子无量纲运动速度,c 是光速。当辐射方向与粒子运动方向的夹角很小时,(25)式可近似地表示为

$$\omega_l = 2l\omega_0\gamma^2 \tag{26}$$

将式(23)代入式(26),可得粒子最大辐射频率

$$\omega_{l,\max} = 2l\Omega_0\gamma^{3/2} \tag{27}$$

在线性近似下,Ω_0 由式(24)给出,在非线性近似下由式(20)推出,即

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi\sqrt{\omega_0^2 + bX_0^2}}{2F(\kappa_1)} \tag{28}$$

4　结果与讨论

对于 l 次谐波的最大辐射频率由式(27)和式(28)给出。将式(27)代入式(28),可将 RCB 的最大辐射频率(能量)表示为[4]

$$\omega_{l,\max} = \frac{l\sqrt{\omega_0^2 + bX_0^2}}{F(\kappa_1)}\gamma^{3/2} \tag{29}$$

或

$$E_{\max} = h\omega_l/2\pi = \frac{hl\sqrt{\omega_0^2 + bX_0^2}}{2\pi F(\kappa_1)}\gamma^{3/2} \tag{30}$$

其中 h 是普朗克常数。(30)式表明,RCB 的最大辐射频率(能量)与 $\gamma^{3/2}$成正比。事实上,由式(23)和式(26)可以看出,粒子的相对论效应起着双重作用。一方面,由于质量的相对论效应,使粒子的振动频率随 $\gamma^{-1/2}$减小;另一方面,由于 Doppler 效应又使得辐射能量随 γ^2 增加。考虑到目前世界上还不能够把重离子加速到相对论能量,因此,储存环中重离子晶化束的电磁辐射能量很低,通常都不考虑。当然,同相对论粒子能量相比,这种辐射引起的能量损失也可以完全忽略。但是,对于束流冷却来说却是值得考虑的。比如,选择一组参数: $\gamma = 10^3 \sim 10^4$, $\nu_B = 3.4$,平均环半径 $R = 100$m,再注意到能量和温度的可能转换,在不同初值条件下,束流温度可以降低几度,十几度,甚至几十度。

注意到在束流冷却过程中起主要作用的是电子束,因此晶化束的辐射损失只是有助于束流温度的降低。

此外,本文也假定了全部辐射损失都转化为温度效应。实际上,辐射损失还有可能使电子束加热,或者转化为其它形式的能量。不过,可以肯定的是,由于辐射能损,束流温度的确可以降低。这不仅有助于束流冷却,而且也有助于缓解束流冷却所遇到的技术问题,因为,束流温度要求越低,冷却技术要求越高。关于这方面的问题和束流加热机制,我们将另外讨论。

参考文献:

[1] Luo S Y, Hofmann I. Dynamics of a one-dimensional Coulomb chain in a storage ring[R]. GSI-Report, 89-21, 1989.

[2] Hofmann I, Luo S Y. Crystalline Ion Beams[R]. GSI-Report, 89-1, 1989.

[3] 罗诗裕, 邵明珠. 一维库仑系统的相干纵振动[J]. 数学物理学报, 1993, **13**(1):391. (Luo S Y, Shao M Z. Longitudinal coherent oscillation for 1-dimensional Coulomb system. *Acta Mathematica Scientia*, 1993, **13**(1):391)

[4] 罗诗裕, 邵明珠. 正电子面沟道辐射的经典描述[J]. 中国激光, 1986, **13**(10):607. (Luo S Y, Shao M Z. Classical description of planar channeling radiation for positron. *Chinese Journal of Lasers*, 1986, **13**(10):607)

[5] 罗诗裕, 邵明珠. 正弦平方势及其面沟道辐射的一般特征[J]. 数学物理学报, 1986, **6**(3):255. (Luo S Y, Shao M Z. Sine-squared potential and properties of planar channeling radiation of charged particles. *Acta Mathematica Scientia*, 1986, **6**(3):391)

[6] Schemoller T. Numerical simulation of the adiabatic acceleration of electron beams[J]. *Nucl Instr and Meth*, 2000, **A441**:50-53.

[7] 罗诗裕, 马如康, 邵明珠. 形变超晶格的沟道效应与系统的相平面特征[J]. 原子核物理评论, 2002, **19**(4):407. (Luo S Y, Ma R K, Shao M Z. Channeling effects and phase planar properties for strained superlatties. *Nucl Phys Rev*, 2002, **19**(4):407)

[8] 林钧锋, 周小方, 罗诗裕, 等. 应变超晶格的退道效应与系统的全局分叉[J]. 原子核物理评论, 2003, **20**(1):55. (Lin J F, Zhou X F, Luo S Y, et al. Dechanneling effects and global bifurcation for strained superlattice with weak-periodic modulade. *Nucl Phys Rev*, 2003, **20**(1):55)

Radiation energy loss and cooling of one-dimensional crystallization beam

LUO Shi-yu, HU Xi-duo, SHAO Ming-zhu, WU Mu-ying, CHEN Shao-wen

(Department of Computer, Dongguan University of Technology, Dongguan 523106, China)

Abstract: Suppose only the focussing and the Coulomb force act on an ion, where the focussing force is linear and the Coulomb force is non-linear. When the two forces are balanced, the critical spacing between ions can be obtained. In this paper the radiation energy loss and the cooling of the one-dimensional crystallization beam are discussed. The coherent transverse equation of particle motion has been reduced to Duffing equation with the hard-spring properties in the frame of Newton mechanics. This non-linear equation has been solved exactly by a Jacobian elliptical function, and the motion period of a particle has been expressed exactly by the first-kind complete elliptical integral. The energy loss and the beam cooling by the electro-magnetic radiation of a charged particle in a storage ring have been discussed in a super-relativistic case. It is that the radiation energy loss of the one-dimensional crystallization beam will result further in the beam cooling.

Key words: Crystallization beam; Storage ring; Relativity; Charged particle; Radiation energy loss; Beam cooling