

隐含变量新反演方法及在海洋资料中的应用*

魏恩泊^① 田纪伟^② 许金山^②

(^① 上海理工大学动力工程学院, 上海 200093; ^② 青岛海洋大学物理海洋实验室, 青岛 266003)

摘要 利用混沌系统单物理参量时间序列的重构相空间点条件概率密度及其标准化分析, 提出了一种新的隐含变量标准化资料的反演方法. 通过应用于 Lorenz 混沌系统和 4 维 Rössler 混沌系统, 对该方法在反演相关系数的定量分析及反演功率谱的定性分析两方面进行检验, 结果表明: 该方法可靠, 简单易行, 具有较强的反演能力. 同时, 对南海的表层水温进行分析得到了南海风速的标准化资料及其功率谱.

关键词 重构相空间 条件概率密度 标准化

近 10 年来随着重构相空间理论的迅速发展, 隐含物理参量的信息提取方法研究已成为目前非线性资料分析的重要课题. 诸如: Breeden 等人^[1]的含有一个或多个未知物理参量的系统方程反演技术, Gouesbet 和 Sceller 等人^[2-5]提出的从单时间序列资料重构连续动力系统的向量场方法等. 这些方法大都基于对原始动力系统的恢复来反演系统隐含变量的信息. 1995 年 Ortega^[6]利用嵌入理论提出了隐含频率检测方法, 虽然该方法在隐含频率检测方面具有一定的效果, 但是该方法不能从单时间序列提取隐含物理参量的标准化资料及其功率谱. 由于某物理参量时间序列隐含了系统其他物理参量的非线性相互作用信息, 因而从单时间序列的重构相空间反演系统其他物理参量标准化资料及其功率谱是可能的. 本文依据物理空间与重构相空间的拓扑同胚特性, 对从单时间序列的重构相空间中反演隐含物理参量的标准化资料及其功率谱进行了研究, 提出了利用重构相空间点的条件概率密度时间序列及其标准化分析和 Fourier 变换来反演隐含物理参量的标准化资料和功率谱的一种新方法.

1 反演方法

目前虽然有大量研究基于从重构相空间中提取系统的不变量(如: 相关维数、Lyapunov 指数、Kolmogorov 熵等), 但对于如何从单时间序列提取隐含物理参量信息的研究较少, 而且尚无较好的方法. 由于 Tankes^[7]相空间重构理论保证了只要嵌入维数足够大以致于在重构相空间中展示奇怪吸引子的伸展和折叠结构, 那么就可保持原动力系统的拓扑结构不变. 此外, Eckman 和 Ruelle^[8]的奇怪吸引子各态历经理论表明了混沌动力系统许多可能的不变分布中相空间点的自然概率密度是稳定的. 因此, 上述理论保证了系统的信息可从单时间序列的重构相空间中提取. 本文引进了重构相空间的点条件概率密度, 并通过对该条件概率密度时间序列进行标准化分析来反演隐含在该物理参量的系统其他参量的标准化资料.

设 $x(i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 是系统的某物理参量的时间序列, 利用时间延迟坐标或导数嵌入坐

1999-09-10 收稿

* 国家自然科学基金项目(批准号: 49476254)和上海市博士后基金联合资助

标^[9](当延迟时间很小时)重构 m 维相空间 $S=\{v(i)\}$,

$$v(i) = (x(i), x(i+\tau), \dots, x(i+(m-1)\tau)) \quad (\text{或者 } v(i) = (x(i), x'(i), \dots, x^{(m-1)}(i))) \\ = (v_1(i), v_2(i), \dots, v_m(i)),$$

其中 τ 为延迟时间, m 为嵌入维数. 令 σ_k 表示 $v_k(i)$ 的标准方差, t_k 表示 $|v_k(i)-v_k(j)| \leq \mu_k \sigma_k$ 的描述 ($k \leq m$, μ_k 为可调参数). 如果考察以重构相空间的任意相点 i 为中心的一个微元体, 并且用标号 i 表示该微元体, 那么分量 $v_1(j)$ 落在该微元体 i 内的条件概率密度为

$$P_i(t_1/(t_2, t_3, \dots, t_m)) = \frac{n_i(t_1/(t_2, t_3, \dots, t_m))}{\sum_{i=1}^l n_i(t_1/(t_2, t_3, \dots, t_m))}, \quad (1)$$

其中 $l = N - (m-1)\tau$ 为资料有效长度, $n_i(t_1/(t_2, t_3, \dots, t_m))$ 表示当微元体 i 中 $m-1$ 个分量 ($k=2, 3, \dots, m$) 分别落在 $|v_k(j)-v_k(i)| \leq \mu_k \sigma_k$ 时, 分量 $v_1(j)$ 落在 $|v_1(j)-v_1(i)| \leq \mu_1 \sigma_1$ 的点数. 由于微元体是随时间变化的, 因而条件概率密度时间序列 $p_i(t_1/(t_2, t_3, \dots, t_m))$ 考察了重构相空间的所有不同密度的不同区域在约束条件 (t_2, t_3, \dots, t_m) 作用下, 沿着重构相空间的 $v_1(i)$ 轴的自然概率密度变化, 而且这种密度刻化了系统的某些特定周期转道的复发动^[6,8]. 事实上, 对于一个 m 维相空间的奇怪吸引子, 系统的隐含变量的信息可通过 $m-1$ 维超“平面”在奇怪吸引子上截取, 所截得的每一点的概率密度是唯一的^[9], 并且服从 δ 分布(当 $x=a$ 时 $\delta(x-a)$ 为无穷大; 否则 $\delta(x-a)$ 为零). 在(1)式中, 参量 μ_k 表示了 m 维重构相空间中某微元体的各轴向的变化尺度倍数. 依据重构相空间与物理空间的拓扑同胚特性, 适当选取 μ_k , 可在重构相空间中充分展示奇怪吸引子在各轴向的不同变化尺度, 并且使 $p_i(t_1/(t_2, t_3, \dots, t_m))$ 刻化了隐含物理参量的演变规律. 因此在重构相空间中通过计算每点的条件概率密度可得到系统隐含物理参量的周期振荡规律, 并且对条件概率密度时间序列进行标准化分析可近似得到隐含物理参量的标准化资料, 标准化分析定义为

$$y_i = \frac{p_i - \bar{p}}{\sqrt{\frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (p_i - \bar{p})^2}}, \quad (2)$$

其中 $\bar{p} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l p_i$, $p_i = p_i(t_1/(t_2, t_3, \dots, t_m))$.

2 应用

利用 Runge-Kutta 方法数值求解 Lorenz 混沌系统

$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$, $\dot{y} = -y - rx - xz$, $\dot{z} = -bz + xy$, 其中 $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ 和 4 维 Rössler 混沌系统^[10]

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + 0.25y + w, \quad \dot{z} = 3 + xz, \quad \dot{w} = -0.5z + 0.05w,$$

积分步长分别为 0.04 和 0.001, 并选取有效资料长度为 16384(采样时间间隔为各自的积分步长).

由于 Lorenz 系统的 x 分量(或 y 分量)功率谱隐含了 z 分量的频率信息(见图 1(a), (b), 其中 y 分量的功率谱与 x 分量功率谱基本一致), 因此选取 x 分量的时间序列, 利用时间导数坐标嵌入法^[9] 重构三维相空间 $(x(i), \dot{x}(i), \ddot{x}(i))$, 其中 $\dot{x}(i)$, $\ddot{x}(i)$ 可用中心差分格式求得. 为了充分体现 Lorenz 奇怪吸引子在重构相空间中各轴向的不同变化尺度^[11], 取 $\mu_1 = 1.5$, $\mu_2 = \mu_3 = 1.0$, 利用(1)式计算条件概率

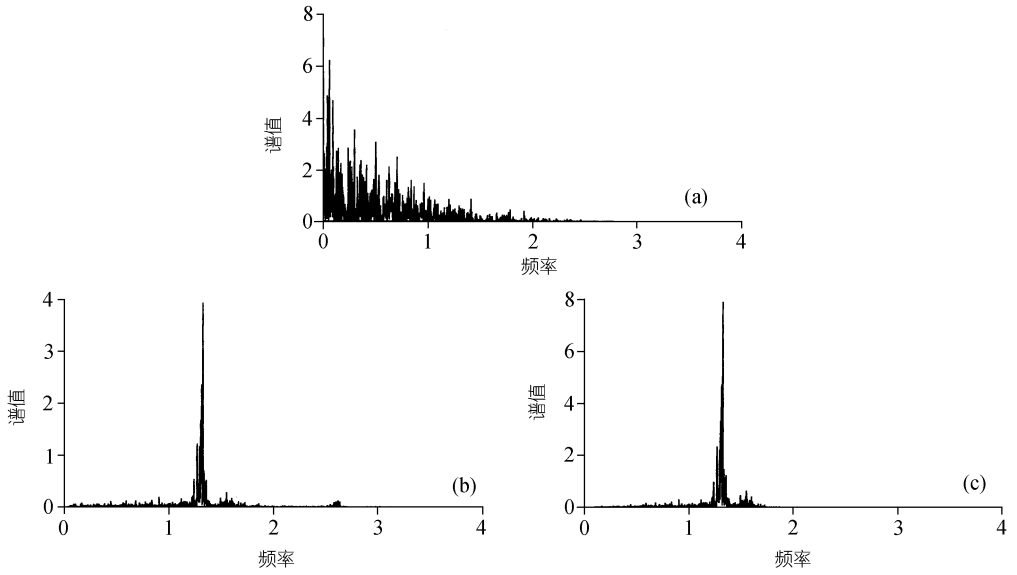


图 1 Lorenz 系统 x 分量(a), z 分量(b)及由 x 分量反演的 z 分量(c)功率谱

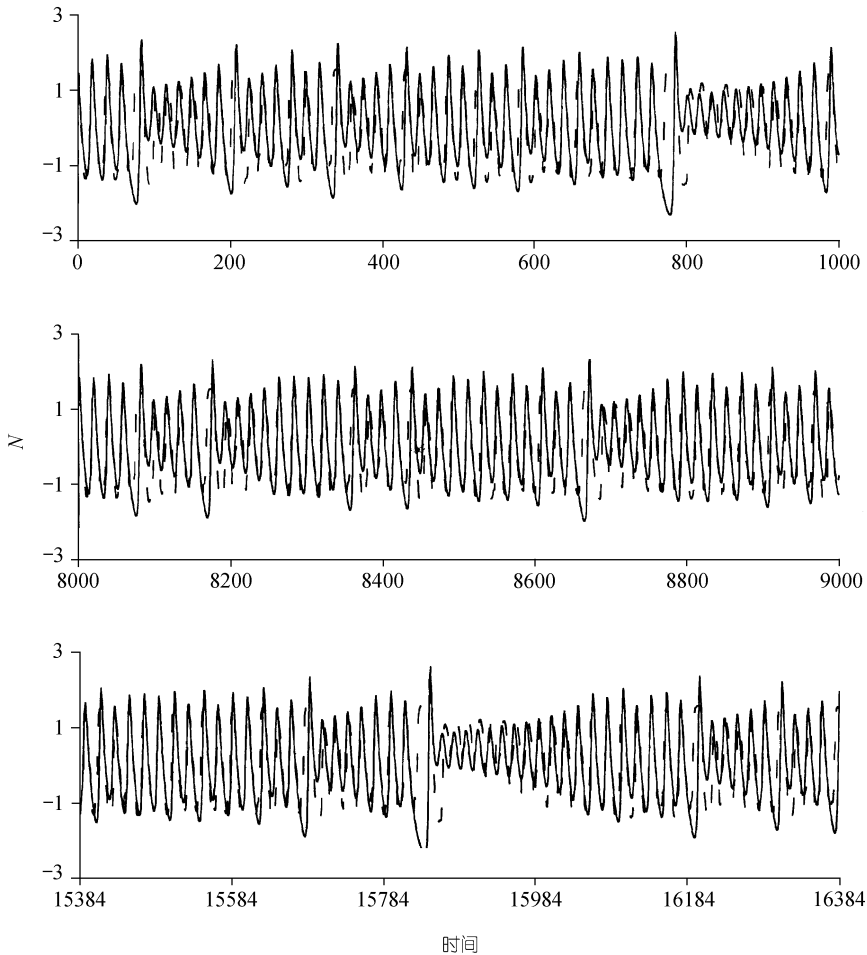


图 2 Lorenz 系统 z 分量标准化资料(实线)及由 x 分量反演的 z 分量标准化资料(虚线)

密度时间序列 $p_i(x/\langle \dot{x}, \ddot{x} \rangle)$, 再由(2)式计算可反演出 z 分量的标准化资料见图 2. 由图 2 时间域上的原 z 分量的标准化资料与 x 分量反演出的分量的标准化资料比较, 可知其相关系数为 0.83. 反演误差出现主要是因为资料的长度有限以及奇怪吸引子存在各种不同尺度的振幅, 限制了对大振幅尺度的充分提取. 两者在频域上比较见图 1(c)(即由 x 分量反演出的 z 分量标准化资料功率谱), 图 1(c)和图 1(b)基本一致(两者功率谱的相关系数为 0.99), 表明了从 x 分量反演出的 z 分量的各种尺度周期(或各种尺度频率), 从而得到了 z 分量的功率谱.

分析四维 Rössler 混沌系统, 由于 x 分量和 w 分量的功率谱图 3(a), (b)可知 x 分量隐含于 w 分量的频率信息, 因而选取 x 分量的时间序列提取 w 分量的标准化资料. 利用 x 分量的时间序列以及时间延迟坐标法重构四维相空间($x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau), x(t+3\tau)$), 其中 $\tau = 80\Delta t$, Δt 为采样时间间隔. 取 $\mu_1=1.5$, $\mu_2=1.2$, $\mu_3=1.0$ 和 $\mu_4=1.2$ 计算重构相空间的点条件概率密度, 并由(2)式标准化得到 w 分量的标准化资料见图 4. 由于条件概率密度探测了系统周期变化, 并没有考察系统的初始相位, 因而反演出的标准化资料可能与系统的某物理参量相差一个相位 π , 因此图 4 中反演出的标准化资料乘以 $e^{i\pi}$ 以校正其相位. 反演所得的标准化资料与 w 分量的标准化资料的相关系数为 0.80. 振幅的反演误差主要出现在大尺度振幅上, 这是因为 w 分量的大尺度振幅

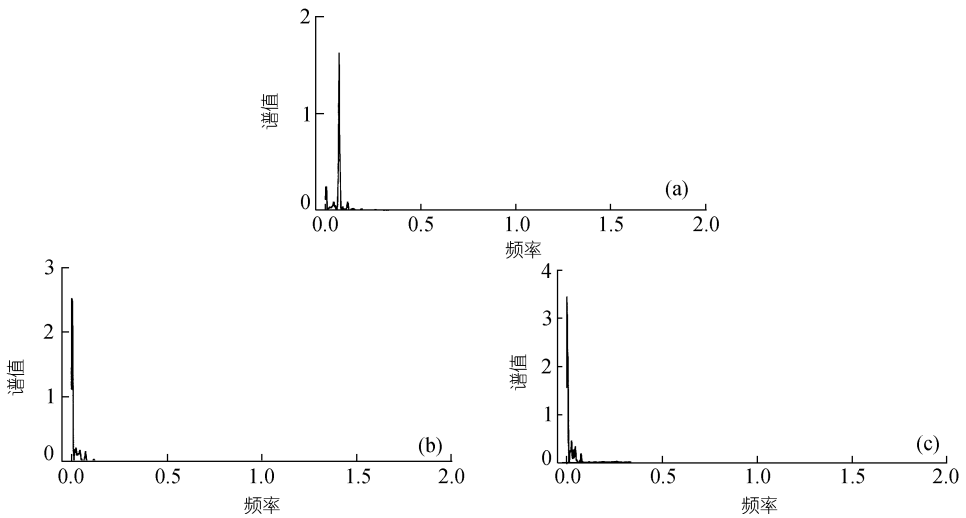


图 3 Rossler 系统 x 分量(a), w 分量(b)及由 x 分量反演的 w 分量(c)功率谱

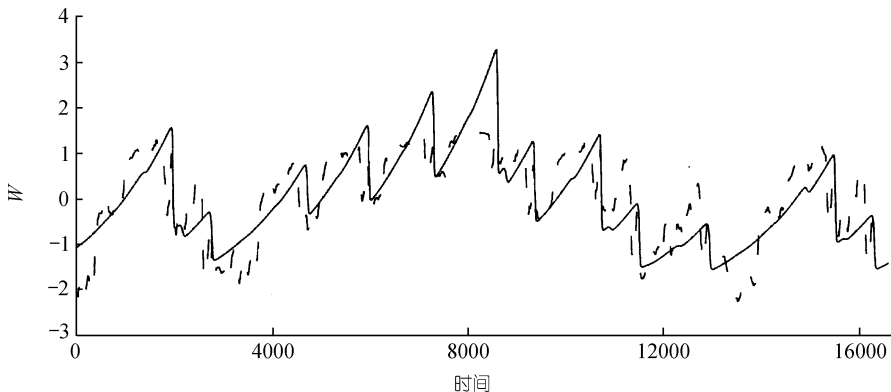


图 4 Rossler 系统 w 分量标准化资料(实线)及由 x 分量反演的 w 分量标准化资料(虚线)

所对应的周期较大(约为资料长度的一半), 资料长度的有限性不足以精确抽取该尺度振幅. 在频域上比较见图 3(c)(在频域上不用相位差校正), 反演出的 w 分量功率谱与 w 分量功率谱完全一致(两者功率谱的相关系数为 0.98), 说明该方法有效地反演隐含变量的功率谱.

为了对海洋资料进行分析, 选取了南海(114.37° E, 21.9° N)1979 ~ 1995 年的表层水温(SST)和海面 10 m 处风速的同化资料(采样时间间隔为 5 d, 有效资料长度约为 1220). 该资料的功率谱见图 5, 可见水温隐含了风速的信息, 因此利用表层水温反演风速. 由相关积分法计算重构

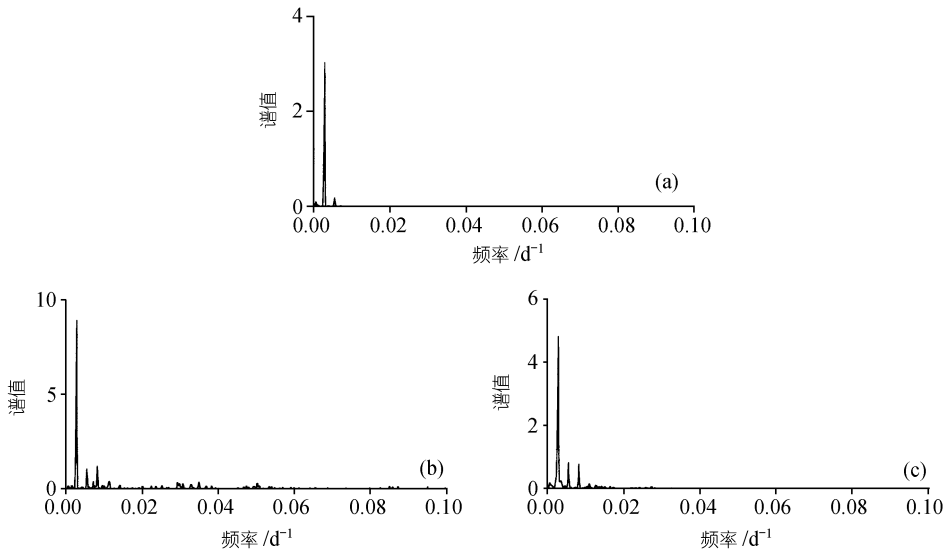


图 5 南海表层水温(a), 风速(b)及由表层水温反演的风速(c)功率谱

相空间维数^[12,13], 得到 SST 的相关维数约为 5.3. 在资料不含噪音的情况下, 只要重构 $m(m \geq 5.3)$ 维相空间就足以恢复系统的几何特征. 然而, 由于实际资料的噪音使计算所得相关维数偏大, 因而 SST 资料的最小嵌入维数应不小于 5. 利用 SST 资料重构五维和六维相空间反演风速得到相近的结果. 现以 SST 的五维重构相空间($x(t), x(t+\tau), \dots, x(t+4\tau)$)(延迟时间 $\tau = 75$ d)为例分析其反演结果. 取 $\mu_1 = 1.4, \mu_2 = 1, \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 1.7$, 利用(1)和(2)式得风速的标准化资料见图 6, 原始风速标准化资料与由 SST 反演出的风速两者的相关系数为 0.47. 由于原始风速资料含有噪音以及风速超高频具有随机特性, 导致反演风速与原始风速的相关系数比 Lorenz 和 Rössler 系统的反演相关系数小. 在频域上比较反演出的风速的功率谱见图 5(c)与图 5(b)一致(两者功率谱的相关系数为 0.96). 由南海其他站位的 SST 资料同样可反演出相应的风速资料及其功率谱(本文略). 通过上述反演结果分析可知, 由南海表层水温可反演出南海海面 10 m 处风速资料及其功率谱, 表明在南海海气相互作用过程中表层水温隐含风速的信息, 而且两者在同一系统内.

3 结论

本文利用重构相空间的点条件概率密度提出了隐含物理参量标准化资料及功率谱反演方法. 通过应用于 Lorenz 混沌系统及四维 Rössler 混沌系统可知, 该方法在隐含变量的标准化资料反演方面具有一定的效果, 特别是对隐含变量的功率谱提取相当精确. 该方法不仅为研究

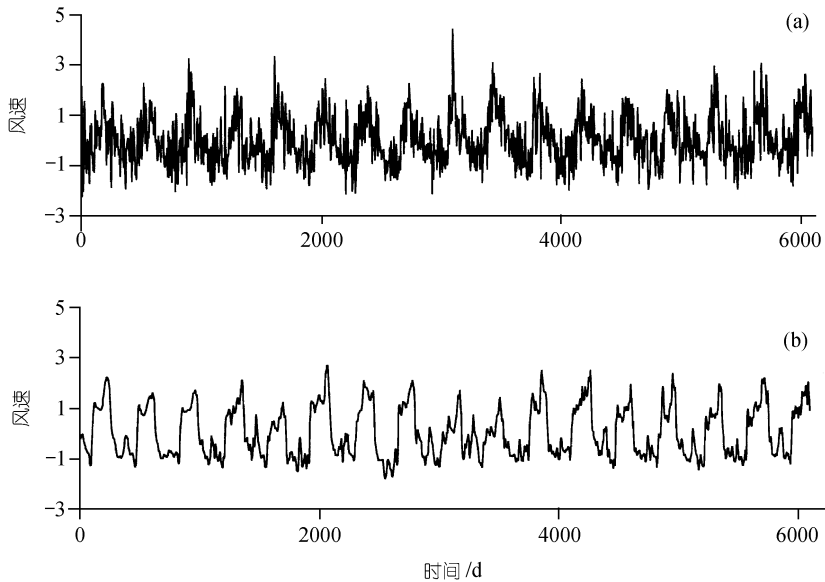


图 6 南海风速标准化资料(a)及由表层水温反演的风速标准化资料(b)

从单时间序列反演系统未知物理参量提供了有效途径, 而且为封闭系统的未知物理参量的选取提供了可靠依据. 该方法涉及 μ_k , τ , m 3 个参量, μ_k 描述了奇怪吸引子固有的各坐标轴的几何尺度, 并且有较大的选择范围. 延迟时间 τ 和嵌入维数 m 是重构相空间的重要参量, 两者需要精确计算以便准确获得系统的信息^[14,15]. 在海洋资料应用中, 通过对南海的表层水温进行分析, 得到了南海风速的标准化资料及其功率谱. 阐明了表层水温与风速在同一系统之内, 为研究南海海气相互作用系统提供了可靠依据, 同时指出了表层水温和海面 10 m 处风速是该系统不可缺少的两个物理参量.

参 考 文 献

- 1 Breeden J L, Hübler A. Reconstructing equation of motion from experimental data with unobserved variables. *Phys Rev A*, 1990, 42: 5817 ~ 5826
- 2 Gouesbet G. Reconstruction of standard and inverse vector fields equivalent to a Rössler system. *Phys Rev A*, 1991, 44: 6264 ~ 6280
- 3 Gouesbet G. Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series. *Phys Rev A*, 1991, 43: 5321 ~ 5331
- 4 Gouesbet G. Reconstruction of vector fields: The case of the Lorenz system. *Phys Rev A*, 1992, 46: 1784 ~ 1796
- 5 Sceller L L, Letellier C, Gouesbet G. Global vector field reconstruction including a control parameter dependence. *Phys Lett A*, 1996, 211: 211 ~ 216
- 6 Ortega G J. A new method to detect hidden frequencies in chaotic time series. *Phys Lett A*, 1995, 209: 351 ~ 355
- 7 Takens F. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol 898. Berlin: Springer-Verlag, 1981. 366 ~ 381
- 8 Eckmann J P, Ruelle D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev Mod Phys*, 1985, 57: 617 ~ 656
- 9 Packard N H, Crutchfield J P, Farmer J D, et al. Geometry from a time series. *Phys Rev Lett*, 1980, 45: 712 ~ 716
- 10 Rössler O E. An equation for hyperchaos. *Phys Lett A*, 1979, 71: 155 ~ 157
- 11 Manua R, Savit R. Model misspecification test, model building and predictability in complex systems. *Phys D*, 1996, 93: 78 ~ 100
- 12 Grassberger P. Measuring the strangeness of strange attractor. *Phys D*, 1983, 9: 189 ~ 208
- 13 Grassberger P, Procaccia I. Dimension and entropies of strange attractor from a fluctuating dynamics approach. *Phys D*, 1984, 13: 34 ~ 54
- 14 Fraser A M, Swinney H L. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Phys Rev A*, 1986, 33: 1134 ~ 1140
- 15 Judd K, Alistairmees. Embedding as a modeling problem. *Phys D*, 1998, 120: 273 ~ 286