

引气混凝土气泡尺寸分布的三维重构*

陈惠苏^{1,2} 孙伟^{1,2}

1. 东南大学江苏省土木工程材料重点实验室 南京 211189
2. 东南大学材料科学与工程学院 南京 211189

摘要 基于体视学和几何概率理论给出了引气混凝土三维气泡尺寸重构方法,由二维平面上气泡截面圆的直径分布计算气孔的实际尺寸分布,并生成了一个多尺度分布的立方体模型结构验证了该三维重构方法的合理性.然后,使用邻近粒子表面最近间距的解析解研究了气泡细度和混凝土含气量对邻近气泡表面最近间距平均值的影响,并与用传统方法得到的气泡间距因子进行了比较.结果表明,在含气量相同的条件下,用传统方法得到的气泡间距因子是邻近气泡表面最近间距平均值的 3-4 倍.该方法的给出,为从二维截面上获得的引气混凝土中的气泡截面圆信息获取实际气泡在三维空间中的气泡间距信息提供了依据.

关键词 无机非金属材料, 引气混凝土, 间距因子, 气泡, 尺寸分布, 三维重构

分类号 TU528

文章编号 1005-3093(2007)06-0613-09

3-dimensional reconstruction of size distribution of air voids in air-entrained concrete

CHEN Huisu^{1,2**} SUN Wei^{1,2}

1. Jiangsu Key Laboratory of Construction Materials, Southeast University, Nanjing 211189
2. College of Materials Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 211189

* Supported by National Nature Science Foundation No.50708018, Ministry of Communications of the People's Republic of China No.2006ZB12 and Key Engineering Project of Jiangsu Province No.STDQ-04HT20SY-010. Manuscript received November 22, 2006; in revised form April 24, 2007.

**To whom correspondence should be addressed, Tel:(025)52090645,
E-mail:chenhuisu@hotmail.com, chenhs@seu.edu.cn

ABSTRACT By virtue of stereological approach and geometrical probability theory, this paper presents 3-dimensional reconstruction methodology of size distribution of air voids based on the information of 2-dimensional size distribution of intersecting circle on section plane of concrete. The validity of the 3-dimensional reconstruction technology was verified by a multi-size sphere packing model structure with periodic boundaries. Then, the previous proposed analytical solution of the nearest surface spacing between particles was employed to investigate the influence of air void fineness as well as air content on the distribution of the nearest surface spacing between neighboring voids. The mean value of the nearest surface spacing obtained based on the above mentioned analytical solution was compared with spacing factor based on the traditional approach. The result demonstrates that the value of spacing factor derived from traditional approach is 3-4 times the mean value of the nearest surface spacing at the same air void content. Development of such framework provides a clue to quantify the spatial distribution of air voids based on the information obtained from section plane of concrete.

KEY WORDS inorganic non-metallic materials, air-entrained concrete, spacing factor, air voids, size distribution, 3-dimensional reconstruction

引气混凝土中的气泡间距是表征引气混凝土抗

冻融循环能力的重要指标^[1,2],但是混凝土各组分的
不透明性给直接取得气泡尺寸分布和气泡在 3 维空间
中的分布造成困难.研究人员大多使用线采样方式
在混凝土样品截面上取得浆体的体积分数和气泡的
比表面积,将二者的商作为气泡间距因子;或者在假
定所有气泡尺寸完全相同和气泡按照立方体网格形
式均匀分布在三维空间且每个气泡都位于立方体的

* 国家自然科学基金 50708018, 交通部西部交通建设科技项目
2006ZB12 和江苏省重大工程项目 STDQ-04HT20SY-010 资助
项目.
2006 年 11 月 22 日收到初稿; 2007 年 4 月 24 日收到修改稿.
本文联系人: 陈惠苏, 教授

角点上的条件下,以位于对角线方向上的两个气泡内边界之间最短线段长度的一半作为气泡间距因子^[1,3,4].但是由这两种方法得到的气泡间距只是一种近似,因为截面分析法或等径球假设不能真实反映引气混凝土中气泡的空间分布^[5,6].文献[7]给出了计算邻近集料表面最近间距分布的公式,根据混凝土中集料的粒径分布和集料体积分数便可计算出邻近集料表面最近间距的分布.采用体视学中的面采样(area sampling)、线采样(line sampling)、或者点采样(point sampling)方式可计算出气泡体积分数^[8],本文先给出由截面圆的直径分布求取气泡直径分布的方法,生成模型结构验证该方法的合理性,再用该方法研究实际混凝土中的气泡间距分布.

1 气泡直径分布的三维重构

1.1 理论基础

为了获取血球的真实尺寸分布,Wicksell^[9,10]研究了如何由截面上圆的尺寸分布求取三维空间中球的尺寸分布,体视学研究人员也研究过这类问题^[8,11].但是,关于引气混凝土中气泡空间分布特征的研究成果^[12,13]表明,如何获取气泡实际尺寸分布问题并未引起足够的重视.因此,有必要给出由截面圆的直径分布求取气泡直径分布的方法.

为方便起见,假定混凝土中的气泡皆为球形,并做如下约定:大写字母 R 和 D 分别表示球(三维空间)的半径和直径,小写字母 r 和 d 分别表示截面圆(二维空间)的半径和直径; $f_{2d}(r)$ 表示截面圆半径的数量基概率密度函数(number based probability density function), $f_{3D}(R)$ 表示球半径的数量基概率密度函数; $f_{2d}(d)$ 和 $f_{3D}(D)$ 分别表示截面圆直径和球直径的数量基概率密度函数.

根据图 1,用任一平面截取半径为 R 的球,则获取出半径为 r 的截面圆的概率 $f_{2d}(r)$ 为

$$f_{2d}(r)dr = \begin{cases} dz/R & \text{for } r \leq R \\ 0 & \text{for } r > R \end{cases} \quad (1)$$

因为 $z(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$, 所以有

$$\frac{dz}{dr} = \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad (2)$$

由式(1)和式(2)可得

$$f_{2d}(r)dr = \begin{cases} \frac{r}{R\sqrt{R^2 - r^2}} dr & \text{for } r \leq R \\ 0 & \text{for } r > R \end{cases} \quad (3)$$

$$f_{2d}(r)dr = \begin{cases} \frac{1}{R}[\sqrt{R^2 - (r - dr)^2} - \sqrt{R^2 - r^2}] & \text{for } r \leq R \\ 0 & \text{for } r > R \end{cases} \quad (6)$$

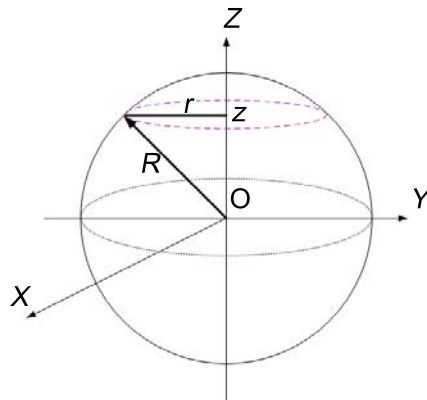


图 1 球与截面

Fig.1 Sphere and Sectioning Circle

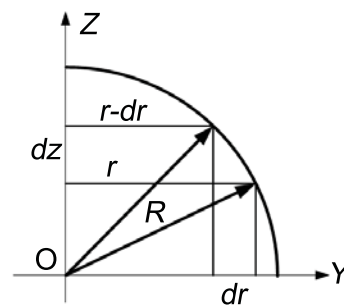


图 2 在截面圆半径增量恒定条件下, dz 取值范围随 z 位置的变化

Fig.2 Range dz varies with z if circle radius class dr is kept constant

改变式(3)的符号,是为了保证概率为正.由式(3)可看出,截面圆的概率密度不仅与球的半径 R 有关,还与截圆的半径 r 有关.

如果 dr 保持不变,则根据图 2 可得切片的厚度 dz 为

$$dz = z(r - dr) - z(r) \quad (4)$$

因为 $z(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$, $z(r - dr) = \sqrt{R^2 - (r - dr)^2}$, 所以有

$$dz = \sqrt{R^2 - (r - dr)^2} - \sqrt{R^2 - r^2} \quad (5)$$

由式(1)和式(5)得

再式 (3) 和式 (6) 得

$$\sqrt{R^2 - (r - dr)^2} - \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr \quad (7)$$

由于气泡和球形粒子在数学表达上是等价的, 引气混凝土中的气泡系统可以看作一个多尺度分布的球形粒子体系. 假定单位体积立方体样品内有 N_{V1} 个半径为 R_1 的球体, 采用截面分析法截取立方体时单位面积截面上所截粒子的数量为 N_{A1} , 则根据体视学知识可得二者之间的关系为 [8]

$$N_{A1} = N_{V1} \cdot 2R_1 \quad (8)$$

于是, 在 N_{V1} 个半径为 R_1 的单位体积立方体的单位面积截面上截圆半径为 r 的数量为

$$\begin{aligned} N_{A1}(r) &= N_{A1} f_{2d}(r) dr \\ &= N_{V1} \cdot 2R_1 \cdot \left\{ \frac{1}{R_1} [\sqrt{R_1^2 - (r - dr)^2} - \sqrt{R_1^2 - r^2}] \right\} \\ &= N_{V1} \cdot 2 \cdot [\sqrt{R_1^2 - (r - dr)^2} - \sqrt{R_1^2 - r^2}] \end{aligned} \quad (9)$$

在含有 N_{V2} 个半径为 R_2 的球的单位立方体中, 根据式 (8) 可得单位面积截面上所截粒子的数量 N_{A2} 为

$$N_{A2} = N_{V2} \cdot 2R_2 \quad (10)$$

于是, 在通过这个立方体的单位面积截面上截圆半径为 r 的数量为

$$\begin{aligned} N_{A2}(r) &= N_{A2} f_{2d}(r) dr \\ &= N_{V2} \cdot 2 \cdot [\sqrt{R_2^2 - (r - dr)^2} - \sqrt{R_2^2 - r^2}] \end{aligned} \quad (11)$$

同理, 对于第三个包含 N_{V3} 半径为 R_3 的单位体积立方体有

$$N_{A3} = N_{V3} \cdot 2R_3 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} N_{A3}(r) &= N_{A3} f_{2d}(r) dr \\ &= N_{V3} \cdot 2 \cdot [\sqrt{R_3^2 - (r - dr)^2} - \sqrt{R_3^2 - r^2}] \end{aligned} \quad (13)$$

将三类球混在一起放到同一个单位体积的立方体中, 则在这个立方体中球体的总数量为

$$N_V = N_{V1} + N_{V2} + N_{V3} = \sum N_{Vi} \quad (14)$$

其中 N_V 为单位体积样品内球体的数量. 于是, 通过该单位体积立方体的任意截面上单位截面面积上截得的粒子的数量为

$$N_A = N_{A1} + N_{A2} + N_{A3} = \sum N_{Ai} \quad (15)$$

其中 N_A 为单位面积截面上截圆的数量. 该单位面积截面上截圆半径在 $[r - dr, r]$ 的数量为

$$N_A(r) = N_{A1}(r) + N_{A2}(r) + N_{A3}(r) \quad (16)$$

对球和圆采用相同的区间分配规则, 即 $\Delta R = \Delta r$, 则球半径可以表示为

$$R_j = j \cdot \Delta R = j \cdot \Delta r \quad (17)$$

同理, 圆半径也可以表达为

$$r_i = i \cdot \Delta r \quad (18)$$

这样, 对一个多尺度球形粒子体系组成的单位体积立方体, 根据式 (9) 所有半径为 R_j 的球对单位面积截面上半径为 $[r_i - \Delta r, r_i]$ 的截圆的数量贡献为

$$\begin{aligned} N_{Aj}(r_i) &= \\ N_{Vj} \cdot 2 \cdot [\sqrt{R_j^2 - (r_i - dr)^2} - \sqrt{R_j^2 - r_i^2}] \end{aligned} \quad (19)$$

其中 N_{Vj} 为单位体积立方体中半径为 R_j 的球的数量; $N_{Aj}(r_i)$ 为单位面积截面上由半径为 R_j 的球所截取的半径为 $[r_i - \Delta r, r_i]$ 的截圆的数量.

将式 (19) 代入式 (16), 可求得各尺度球形粒子对单位面积截面上半径为 $(r_i, r_i - \Delta r)$ 的截圆数量的贡献, 因为所有 $R_j < r_i$ 对半径为 r_i 截圆是没有贡献的, 采用式 (16) 对每一类截圆数量求和运算时必须保证 $R_j \geq r_i$. 因此, 整个单位面积截面上半径为 $[r_i - \Delta r, r_i]$ 的数量为

$$\begin{aligned} N_A(r_i) &= \sum_{j=i}^m N_{Aj}(r_i) \\ &= \sum_{j=i}^m 2N_{Vj} [\sqrt{R_j^2 - (r_i - dr)^2} - \sqrt{R_j^2 - r_i^2}] \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $m = R_{\max}/\Delta R$, $i = r_i/\Delta R = r_i/\Delta r$, R_{\max} 为整个体系的最大球的半径.

由于半径为 R_j 的球的数量基概率密度函数可以表达为

$$f_{3D}(R_j) = \frac{N_{Vj}}{N_V} \quad (21)$$

如果假定单位面积截面上截圆的数量为 N_A , 则半径为 r_i 的截圆的数量基概率密度函数为

$$f_{2d}(r_i) = \frac{N_A(r_i)}{N_A} \quad (22)$$

根据体视学理论 [8], 对于多尺度分布的球形粒子体系, 单位面积截面上截圆的数量 (N_A) 与单位体积内球体的数量 (N_V) 之间的关系为

$$N_A = N_V \cdot 2\bar{R} \quad (23)$$

其中 $\bar{R} = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} R f_{3D}(R) dR$, R_{\max} 和 R_{\min} 分别为体系中粒子的最大和最小半径, 显然 $R_{\max} = r_{\max}$. 于

是有

$$\begin{aligned}
 f_{2d}(r_i) &= \frac{N_A(r_i)}{N_A} \\
 &= 2 \sum_{j=i}^m \frac{N_{Vj} [\sqrt{R_j^2 - (r_i - dr)^2} - \sqrt{R_j^2 - r_i^2}]}{2\bar{R}N_V} \\
 &= \frac{1}{\bar{R}} \sum_{j=i}^m \frac{N_{Vj}}{N_V} [\sqrt{R_j^2 - (r_i - dr)^2} - \sqrt{R_j^2 - r_i^2}] \\
 &= \frac{1}{\bar{R}} \sum_{j=i}^m f_{3D}(R_j) [\sqrt{R_j^2 - (r_i - dr)^2} - \sqrt{R_j^2 - r_i^2}]
 \end{aligned} \quad (24)$$

其中的求和过程须保证 $R_j \geq r_i$.

将式 (7) 代入式 (24) 得

$$f_{2d}(r)dr = \frac{1}{\bar{R}} \int_r^{R_{\max}} f_{3D}(R) \cdot \frac{r \cdot dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} dR \quad (25.a)$$

于是截面圆半径的数量基概率密度分布函数可以表示为

$$f_{2d}(r) = \frac{r}{\bar{R}} \int_r^{R_{\max}} f_{3D}(R) \cdot \frac{dR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad (25.b)$$

或

$$f_{2d}(d) = \frac{d}{\bar{D}} \int_d^{D_{\max}} f_{3D}(D) \cdot \frac{dD}{\sqrt{D^2 - d^2}} \quad (25.c)$$

其中 $\bar{D} = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} D f_{3D}(D) dD$, D_{\max} 和 D_{\min} 分别为体系中粒子的最大和最小直径, $D_{\max} = d_{\max}$.

使用式 (25.c), 可由球体直径数量基概率密度函数求得截面圆直径的数量基概率密度函数. 在已知球体尺寸分布的条件下这个公式非常有用, 例如 Zheng 等用 (25.c) 研究集料的边壁效应范围^[14], Stroeven 等研究裂纹的粗糙度和传输路径的曲折性问题^[15]. 另外, Zheng 等在已知水泥粒径分布的条件下用式 (25.c) 研究了浆体与集料之间初始界面过渡区的厚度问题^[16]. 但是通常得到的是气泡截面圆的尺寸分布函数 $f_{2d}(d)$, 而气泡的尺寸分布函数 $f_{3D}(D)$ 是待求量. 于是需要对式 (25.c) 进行变换.

根据 Gorenflo 等的描述^[17], 对于 $0 < x < b$, Abel 积分 $g(x) = \int_x^b \frac{u(t)dt}{\sqrt{t^2 - x^2}}$ 的解为 $u(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{tg(t)dt}{\sqrt{t^2 - x^2}}$, $0 < x < b$. 于是式 (25.c) 可以变换为

$$f_{3D}(D) = -\frac{2\bar{D}}{\pi} \frac{d}{dD} \int_D^{D_{\max}} \frac{f_{2d}(d)}{\sqrt{d^2 - D^2}} dd \quad (26)$$

以上得到的是截面圆直径的数量基概率密度函数, 式 (26) 中的球体平均直径是未知的.

因为

$$\begin{aligned}
 \bar{D} &= \int_0^{d_{\max}} \frac{f_{2d}(d)}{d} dd \\
 &= \int_0^{d_{\max}} \int_d^{D_{\max}} \frac{f_{3D}(D)}{\sqrt{D^2 - d^2}} dD dd \\
 &= \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} dD \int_0^D \frac{f_{3D}(D)}{\sqrt{D^2 - d^2}} dd \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} f_{3D}(D) dD = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned} \quad (27)$$

所以

$$\bar{D} = \frac{\pi}{2 \int_0^{d_{\max}} \frac{f_{2d}(d)}{d} dd} = \frac{\pi}{2 \int_0^{D_{\max}} \frac{f_{2d}(d)}{d} dd} \quad (28)$$

结合式 (26) 和 (28) 可由二维截面圆直径的数量基概率密度函数获得体系中实际球体直径的数量基概率密度函数, 这种方法称为球体直径的三维重构技术.

1.2 合理性的验证

为验证上述三维重构模型的合理性, 本节生成一个边长为 30 mm 的周期边界的立方体容器, 然后将一定体积的粒径范围为 0.125–5 mm 的球形粒子采用随机方式将按照从大到小的顺序丢进容器中, 生成的结构模型中粒子的数量为 348589, 固相的体积分数为 58.7976%, 模型结构标记为 Fuller0.125–5–30–58.7976. 模型结构的粒径分布结果在图 3 中给出.

图 3 给出了体积基累计概率分布曲线, 而式 (25) 和式 (26) 是数量基概率密度函数. 另外, 根据 Bertolini 等的结果^[18], 引气混凝土中的气泡尺寸小于 1 mm, 尺寸大的气泡达到几个毫米^[4], 而绝大部分气泡尺寸为 10–100 μm ^[4]. 这里模型结构中的粒子尺寸范围为 0.125–5 mm, 与实际的气泡尺寸范围不符, 但是球体尺寸的绝对值对验证结果没有实质影响.

以下采用系列截面分析法 (serial sectional analysis approach) 获取截面圆直径的数量基概率密度函数 $f_{2d}(d)$ 分布:

- (1) 确定截面圆直径所处的区间范围 $[d_{\min}, d_{\max}]$;
- (2) 用式 (29) 将整个截面圆的直径区间 $[d_{\min}, d_{\max}]$ 分成 M 个子区间;

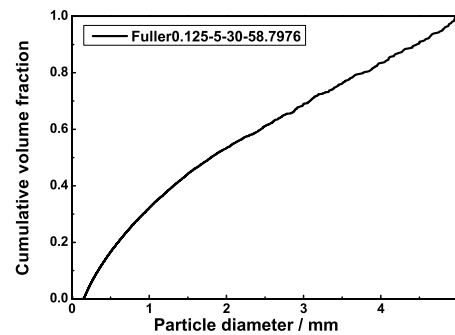


图 3 模型结构的粒径分布

Fig.3 Particle size distribution in model structures

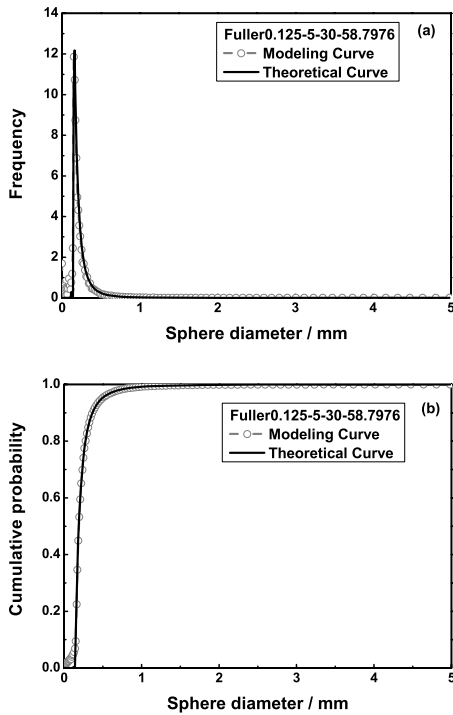


图 4 基于三维重构模型获得的模拟结果与实际分布之间的比较

Fig.4 Comparison of modeling result based on 3d reconstruction model and actual value (a) probability density curve, (b) accumulative probability curve

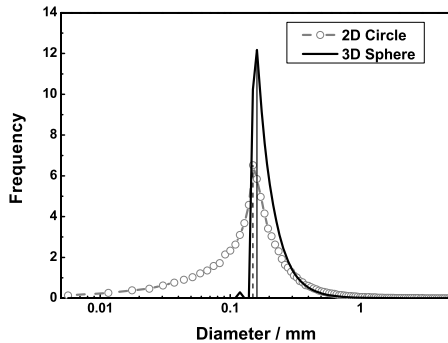


图 5 球及其截面直径的数量基概率密度分布曲线

Fig.5 Number-based probability density distribution of intersecting circle diameter and sphere diameter

$$d_i = (2^{i \times (\frac{5.0}{M}) - 1.0}) \frac{d_{\max} - d_{\min}}{(2^{5.0} - 1.0)} + d_{\min},$$

$$0 \leq i \leq M \quad (29)$$

其中 $\Delta d_i = d_{i+1} - d_i$, $d_i \in [d_{\min}, d_{\max}]$, $d_0 = d_{\min}$, $d_M = d_{\max} = D_{\max}$, $i=0, 1, \dots, M$; M 表示子区间的数量。

(3) 在系列截面分析法中判断所有截面上每个截面直径所属的子区间 $[d_i, d_{i+1}]$, 并进行频率累计 $N_i = N_i + 1$. 假定模型结构中总的截面数量为 N , 则 N_i/N 就表示属于子区间 $[d_i, d_{i+1}]$ 的区间概率, $N_i/(\Delta d_i \times N)$ 就表示该区间上某一点的频率. 为方便起见, 假定子区间 $[d_i, d_{i+1}]$ 上的频率相等, 均为 $N_i/(\Delta d_i \times N)$. 当 M 足够大时, 这个假定是合理的.

应用上述方法可得到截面圆直径的数量基概率密度函数 $f_{2d}(d)$ 分布. 将上述边长为 30 mm 的模型结构切 30 层, 并将整个截面圆直径范围分成 100 份, 采用上述算法得到截面圆直径的数量概率密度曲线和累计概率分布曲线. 再根据系列截面分析法所得到的截面圆直径的分布和式 (25)–式 (28), 得到球体直径数量基概率分布 (图 4).

给出概率密度曲线的原因是, 概率密度曲线比累计概率曲线能更精细地反映出预测的可靠性. 为方便起见, 称图 4 中基于三维重构技术获得的球体直径分布结果为模拟结果, 而根据模型结构中每个球的直径信息所获得的结果成为理论结果. 由图 4 可见, 模拟曲线与理论曲线能很好地吻合. 因此, 只要知道了混凝土截面上气泡圆的直径分布情况, 就可用气泡直径三维重构技术预测引气混凝土中气泡的直径分布.

值得注意的是, 数量最高的截面圆直径尺寸与数量最大的球体直径尺寸是否重叠. Pigeon 等^[4]注意到, 用截面分析法得到的气泡截面圆直径数量概率密度曲线峰值位置对应的直径比实际气泡直径数量概率密度曲线峰值位置对应的直径小. 针对图 3 中的模型样品, 图 5 给出了截面圆直径的数量基概率密度曲线和实际球体直径的概率密度曲线结果. 可以看出, 截面圆直径分布曲线峰值对应的直径数值比球体直径分布曲线峰值位置对应的直径数值小.

2 邻近气泡表面最近间距分布

对于由多尺度分布的球形集料构成的模型混凝土体系, 文献 [7] 给出了计算邻近集料表面最近间距分布的解析解, 并验证了该解析解的可靠性 (图 6), 这个方法后来也用于研究新拌浆体中胶凝材料粒径分布对胶凝材料堆积密实度的影响^[19]. 本文使用文献 [7] 给出的公式预测引气混凝土中邻近气泡最近间距的分布.

2.1 邻近气泡表面最近间距的理论解

根据文献 [7], 引气混凝土中邻近气泡表面最近间距的概率密度函数 $f_P(x)$ 可以表达为

$$f_P(x) = f_{R_{\min}}^R h_p(x+R) f_{3D}(R) dR \quad (30)$$

其中 $f_{3D}(R)$ 为引气混凝土中气泡半径的数量基概率

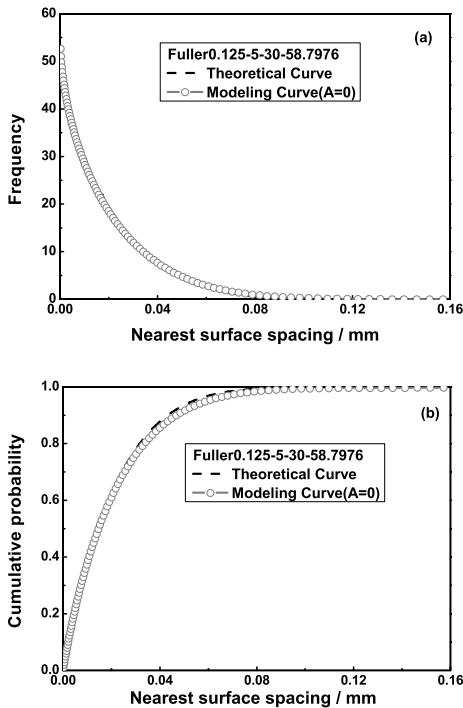


图6 邻近集料表面最近间距分布实际值与模拟结果之间的比较 [7]

Fig.6 Comparison of modeling result with actual value in the distribution of nearest surface spacing between neighboring aggregates (re-draw from Ref^[7])

密度函数, R 为气泡半径, x 为参考粒子表面与邻近粒子表面的最近间距, $h_p(x+R) = \frac{2\varphi S}{D} [3a_0(\frac{x+R}{D})^2 + 2a_1(\frac{x+R}{D}) + a_2] \cdot \exp\{-2\varphi S[a_0\frac{(x+R)^3-R^3}{(D)^3} + a_1\frac{(x+R)^2-R^2}{(D)^2} + a_2\frac{x}{D}]\}$.

其中 φ 为引气混凝土的气泡体积分数, \bar{D} 为气泡的数量平均直径, $\bar{D} = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} D f_{3D}(D) dD$, $S = \frac{\bar{D}^2}{\bar{D}^3}$, \bar{D}^2 为气泡数量平均直径的 2 阶原点矩, $\bar{D}^2 = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} D^2 f_{3D}(D) dD$, \bar{D}^3 为气泡数量平均直径的 3 阶原点矩, $\bar{D}^3 = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} D^3 f_{3D}(D) dD$, $a_0 = [4B(1-\varphi)(1-\varphi+3\varphi S) + 4A\varphi^2 S^2]/(1-\varphi)^3$ ($A=0$ 时为 Percus-Yevick(P-Y) 近似 [20], $A=2$ 时为 Carnahan-Starling(C-S) 近似 [21], $A=3$ 为 Scaled-Particle(S-P) 近似 [22]), $a_1 = [6B(1-\varphi) + 9\varphi S]/(1-\varphi)^2$, $a_2 = 3/(1-\varphi)$; $B = (\bar{D}^2)/(\bar{D}^2)$.

因此, 只要已知气泡直径的数量基概率密度函数以及混凝土的含气量, 就可使用式 (30) 计算邻近气泡表面最近间距的分布. 而邻近气泡表面最近间距的平均值 \bar{l}_P 可以表达为

$$\bar{l}_P = \int_0^{x_{\max}} x f_p(x) dx \quad (31)$$

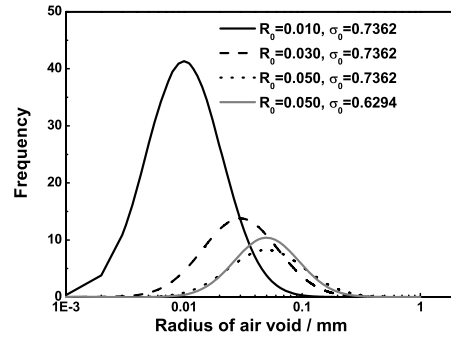


图7 基于零阶对数分布函数得到的气泡半径概率密度曲线

Fig.7 Probability density curves of air void radius distribution based on zeroth-order logarithm

其中 x_{\max} 为可能的最大表面间距, 可用试算法得到.

2.2 应用举例

因为可用零阶对数分布 (zeroth-order logarithmic distribution) 表示引气混凝土中气泡的半径数量基概率密度函数 [2,23,24], 本文以该分布函数来研究引气混凝土中的邻近气泡表面最近间距的分布问题. 零阶对数概率密度函数的形式为

$$f_{3D}(R) = \frac{\exp[-\frac{1}{2}(\frac{\ln(R/R_0)}{\sigma_0})^2]}{\sqrt{2\pi}\sigma_0 R_0 \exp(\sigma_0^2/2)} \quad (32)$$

其中 $f_{3D}(R)$ 为气泡半径的数量基概率密度函数, R_0 为概率密度曲线的峰值半径 (modal radius), σ_0 为标准差 (standard deviation of the logarithms).

图 7 给出了 4 个参数不同的气泡半径概率密度分布函数实例. 为方便起见, 本文对这 4 种模型分布计算了气泡的比表面积 (将气泡比表面积定义为气泡的总表面积除以气泡的总体积), 结果列于表 1.

由图 7 的曲线和表 1 可以看出, 曲线峰值对应的横坐标数值越小, 气泡尺寸越小, 气泡的比表面积也越大; 在峰值对应横坐标数值相通的条件, 标准差越小, 气泡比表面积越大.

因此, 在保持模型混凝土中的含气量相同的前提下, 研究气泡细度对邻近气泡表面最近间距分布的影响; 也可以在保证气泡尺寸分布恒定的前提下, 研究引气混凝土含气量对邻近气泡表面最近间距分布的影响. 根据 Marchand 等提供数据 [1], 引气混凝土中的含气量通常为 1.5%~8%. 工程上为了保证混凝土的抗冻性, 一般取含气量为 4%~6%. 本文取含气量为 5% ($\varphi=5\%$), 研究气泡细度对邻近气泡表面最近间距分布的影响. 由图 8 可见, 曲线的峰值所对应的邻近气泡表面最近间距数值随着气泡细度的增加而减小,

表 1 在含气量为 5% 的混凝土中气泡细度对邻近气泡表面最近间距平均值的影响

Table 1 Influence of air void fineness on mean value of the nearest surface spacing between neighboring voids in model air-entrained concrete with air content of 5% by volume of concrete

| Value of parameters of zeroth-order logarithm | | Specific surface area of air void | Mean value of the nearest surface spacing |
|---|------------|-----------------------------------|---|
| R_0/mm | σ_0 | $/\text{mm}^{-1}$ | $/\text{mm}$ |
| 0.010 | 0.7362 | 45.03 | 0.0507 |
| 0.030 | 0.7362 | 15.46 | 0.1494 |
| 0.050 | 0.7362 | 10.03 | 0.2355 |
| 0.050 | 0.6294 | 15.15 | 0.1586 |

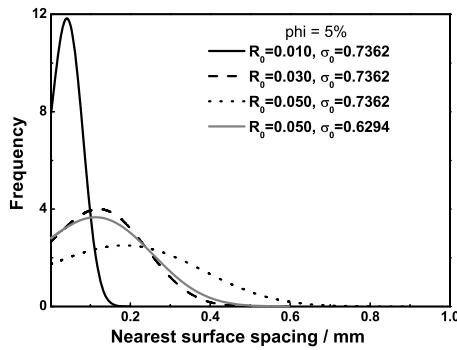


图 8 含气量为 5% 的模型混凝土中气泡细度对邻近气泡表面最近间距分布的影响

Fig.8 Influence of air void fineness on the distribution of the nearest surface spacing between neighboring air voids in model concrete with air void content of 5%

而曲线峰值对应的纵坐标随着气泡细度的增加而增加。另外, 尽管模型样品“ $R_0=0.050, \sigma_0=0.7362$ ”和模型样品“ $R_0=0.050, \sigma_0=0.6294$ ”的气泡峰值对应的横坐标相同, 但后者的气泡比表面积与模型样品“ $R_0=0.030, \sigma_0=0.7362$ ”的比表面积相近。因此, 模型样品“ $R_0=0.050, \sigma_0=0.6294$ ”和模型样品“ $R_0=0.030, \sigma_0=0.7362$ ”之间的邻近气泡表面最近间距的概率密度分布曲线也相近。同时, 表 1 表明, 模型样品“ $R_0=0.030, \sigma_0=0.7362$ ”的气泡比表面积比模型样品“ $R_0=0.050, \sigma_0=0.6294$ ”的略高, 所以图 8 中前者概率密度分布曲线峰值位置对应的纵坐标数值比后者的略大。另外对表 1 中模型样品“ $R_0=0.030, \sigma_0=0.7362$ ”和模型样品“ $R_0=0.050, \sigma_0=0.6294$ ”的比较表明, 气泡比表面积越大, 其邻近气泡表面最近间距的平均值也越小。这说明, 影响邻近气泡表面最近间距分布情况及其平均值的主要因素是气泡的比表面积。

以图 7 中的 4 个模型样品为例, 研究混凝土中含

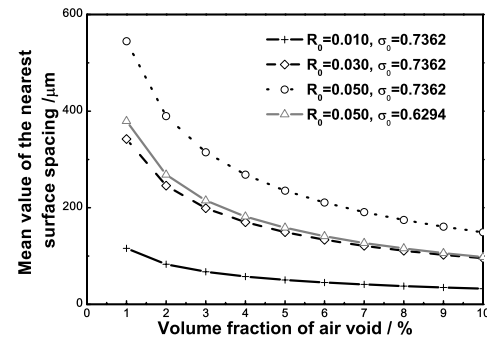


图 9 不同气泡细度下模型混凝土中气泡含量对邻近气泡表面最近间距平均值的影响

Fig.9 Influence of air void content on mean value of the nearest surface spacing between neighboring voids in model concrete with different fineness of air voids

气量的影响。对于不同程度分布的气泡, 图 9 给出了邻近气泡表面最近间距平均值随引气混凝土中含气量之间的变化关系。

由图 9 可以看出, 在气泡尺寸分布固定的条件下, 随着混凝土中含气量的增加, 邻近气泡表面最近间距的平均值减小。结合表 1 中的气泡比表面积数据可以看出, 在含气量相同的条件下, 气泡比表面积越大, 邻近气泡表面最近间距的平均值越小。对于模型样品“ $R_0=0.050, \sigma_0=0.7362$ ”和“ $R_0=0.050, \sigma_0=0.6294$ ”, 尽管二者的峰值气泡直径 R_0 相同, 但前者气泡细度比后者高, 所以在在同样含气量下前者的邻近气泡表面最近间距的平均值比后者小。另外, 由于模型样品“ $R_0=0.030, \sigma_0=0.7362$ ”和模型样品“ $R_0=0.050, \sigma_0=0.6294$ ”的比表面积接近, 在图 9 中二者的邻近气泡表面最近间距的平均值与含气量之间的关系曲线也接近。因此, 影响引气混凝土气泡间距的因素, 一个是含气量, 另一个是气泡细度。含气量增加和气泡细度增加都导致邻近气泡表面间距的减小。

2.3 与传统方法的比较

传统方法 [3,25] 是在光学显微镜下取得混凝土截面上邻近气泡截面之间的间距, 取其平均值作为气泡间距因子 (spacing factor); 或假定所有气泡为等径球并按照简单立方排列, 计算对角线上两个球的表面间距. 这两种方法统称为 Powers 间距因子 (Powers spacing factor), 其表达式为

$$\bar{L} = \frac{V_p}{\alpha\varphi}, \quad \text{for } V_p/\varphi < 4.342 \quad (33a)$$

$$\bar{L} = \frac{3}{\alpha} [1.4(\frac{V_p}{\varphi} + 1)^{1/3} - 1], \quad (33b)$$

for $V_p/\varphi < 4.342$

其中 φ 为混凝土含气量; α 为气泡的比表面积, 即单位体积气泡所具有的表面积 (mm^{-1}); V_p 为浆体的体积分数.

ASTM C457^[3] 和 EN408-11^[25] 采用线采样方式获取邻近气泡表面间距, 在两个气泡间合法采样线将穿过集料, 因此式 (33a) 和式 (33b) 的浆体体积分数实际上为 $(1-\varphi)$. 对于符合 “ $R_0=0.050$, $\sigma_0=0.7362$ ” 零阶对数分布 (式 (32)) 的气泡, 图 10 中给出了在含气量不同的条件下用传统方法 (即式 (33)) 得到的气泡间距因子和用本文提出的方法得到的邻近气泡表面最近间距平均值.

由图 10 可见, 在气泡尺寸分布和混凝土含气量不变的条件下, 由 Powers 间距因子得到的平均气泡间距明显大于用本文提出的方法得到的邻近气泡表面最近间距的平均值. 在含气量相同的条件下, 由 Powers 气泡间距因子得到的结果大概是采用本文方法得到的邻近气泡表面最近间距平均值的 3-4 倍. 因为在 Powers 间距因子方法中, 如果采用随机线采样方式得到气泡间距取平均, 那么显然经过相邻两个气泡的随机线并不总是通过这两个气泡的中心, 必然导

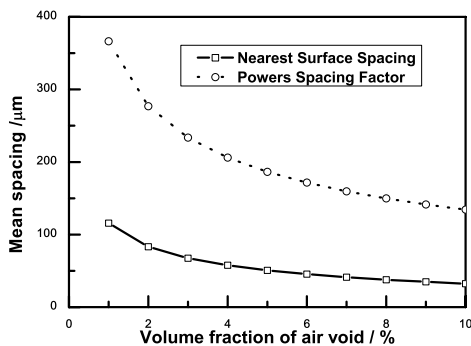


图 10 不同气泡间距计算方法之间的比较

Fig.10 Comparison of mean air void spacing between different approaches

致由此得到的气泡间距值大于本文研究的邻近气泡之间的最近表面间距值; 如果假定所有气泡为等径球然后按照简单立方排列 (simple cubic array), 其对角线上的两个气泡的最近表面间距也显然大于立方体边长上两个气泡的表面间距. 所以, 实际上 ASTM C457 和 EN408-11 所采用的 Powers 间距因子方法都高估了引气混凝土中气泡间距.

3 结 论

1. 基于体视学和几何概率理论给出了由二维平面上气泡截面圆的直径分布计算气孔实际尺寸分布的三维气泡尺寸重构方法, 可从截面圆的直径分布得到混凝土中气泡的尺寸分布.

2. 使用本文给出的计算邻近气泡表面最近间距分布的解析解方法, 可得到实际气泡在三维空间中间距的信息.

参 考 文 献

- 1 J.Marchand, R.Pleau, R.Gagné, Deterioration of concrete due to freezing and thawing, In Materials Science of Concrete IV, edited by J.Skalny, S.Mindess (Westerville, The American Ceramic Society, 1995) p.283
- 2 K.Snyder, K.Natesaiyer, K.Hover, The stereological and statistical properties of entrained air voids in concrete: a mathematical basis for air void system characterization, In Materials Science of Concrete VI, edited by S.Mindess, J.Skalny (Westerville, The American Ceramic Society, 2001) p.129
- 3 ASTM C457-98, Standard Test Method for Microscopical Determination of Parameters of the Air-Void System in Hardened Concrete. (West Conshokocken, American Society for Testing and Materials, 1998) p.14
- 4 M.Pigeon, R.Pleau, *Durability of Concrete in Cold Climates*, (London, Champman & Hall, 1995) p.5, p.99, p.163
- 5 CHEN Huisu, SUN Wei, P.Stroeven, M.Stroeven, Computer simulation of the nearest surface distance distribution between neighbor aggregate grains in concrete, Journal of the Chinese Ceramic Society., **32**(4), 429(2001) (陈惠苏, 孙 伟, P.Stroeven, M.Stroeven, 混凝土中邻近集料表面最近间距分布的计算机模拟, 硅酸盐学报, **32**(4), 429(2004))
- 6 CHEN Huisu, SUN Wei, JIANG Jinyang, P.Stroeven, M.Stroeven, Numerical simulation of the nearest surface spacing distribution between neighboring aggregate grains in mortar, Acta Materiae Compositae Sinica, **22**(4), 100(2005) (陈惠苏, 孙 伟, 蒋金洋, P.Stroeven, M.Stroeven, 砂浆中邻近集料表面最近间距分布的数值模拟, 复合材料学报, **22**(4), 100(2005))

- 7 H.S.Chen, W.Sun, P.Stroeven, L.J.Sluys, Analytical solution of the nearest surface spacing between neighboring aggregate grains in cementitious composites, *Journal of the Chinese Ceramic Society*, **33**(7), 859(2005)
(陈惠苏, 孙 伟, P.Stroeven, L.J.Sluys, 水泥基复合材料邻近集料表面最近间距分布的解析解, *硅酸盐学院*, **33**(7), 859(2005))
- 8 E.E.Underwood, *Quantitative Stereology* (Menlo Park, Addison-Wesley, 1970), pp.23-47, pp.85-97, pp.117-133
- 9 S.D.Wicksell, The corpuscle problem: a mathematical study of a biometric problem, *Biometrika*, **17**(1/2), 84(1925)
- 10 S.D.Wicksell, The corpuscle problem: a case of ellipsoidal corpuscles, *Biometrika*, **18**(1/2), 152(1926)
- 11 E.R.Weibel, *Stereological Method Vol.2: Theoretical Foundations* (London, Academic Press, 1980) p.175
- 12 U.H.Jakobsen, C.Pade, N.Thaulow, D.Brown, S.Sahu, O.Magnusson, S.de Buck, G.de Schutter, Automated air void analysis of hardened concrete- a round robin study, *Cem. Concr. Res.*, **36**(8), 1444(2006)
- 13 D.Zalocha, J.Kasperkiewicz, Estimation of the structure of air entrained concrete using a flatbed scanner, *Cem. Concr. Res.*, **35**(10), 2041(2005)
- 14 J.J.Zheng, C.Q.Li, M.R.Jones, Aggregate distribution in concrete with wall effect, *Mag. Concr. Res.*, **55**(3), 257(2003)
- 15 P.Stroeven, A stereological approach to roughness of fracture surfaces and tortuosity of transport paths in concrete, *Cem. Concr. Comp.*, **22**(5), 331(2000)
- 16 J.J.Zheng, C.Q.Li, X.Z.Zhou, Characterization of microstructure of interfacial transition zone in concrete, *ACI Material J.*, **102**(4), 265(2005)
- 17 R.Gorenflo, S.Vessella, *Abel Integral Equations: Analysis and Applications*, (Berlin, Springer-Verlag, 1991), p.24
- 18 L.Bertolini, B.Elsener, P.Pedferri, R.Polder, *Corrosion of Steel in Concrete: Prevention, Diagnosis, Repair* (Weinheim, Wiley-VCH, 2004) p.5
- 19 CHEN Huisu, SUN Wei, ZHOU Yanchang, P.Stroeven, L.J.Sluys, Quantitative characterization of microstructure of binder particle packing system in fresh cement paste, *Acta Materiae Compositae Sinica*, **24**(1), 127(2007)
(陈惠苏, 孙 伟, 周焱昌, P.Stroeven, L.J.Sluys, 新拌水泥浆体胶凝材料粒子堆积体系微观结构的定量表征, *复合材料学报*, **24**(1), 127(2007))
- 20 J.K.Percus, G.J.Yevick, Analysis of classical statistical mechanics by means of collective coordinates, *Phys. Rev.*, **110**(1), 1(1958)
- 21 J.L.Lebowitz, E.Helfand, E.Praesegaard, Scaled particle theory of fluid mixtures, *J. Chem. Phys.*, **43**(3), 774(1965)
- 22 G.A.Mansoori, N.F.Carnahan, K.E.Starling, T.W.Leland Jr, Equilibrium thermodynamic properties of the mixture of hard spheres, *J. Chem. Phys.*, **54**(4), 1523(1971)
- 23 W.F.Espenscheid, M.Kerker, E.Matijević, Logarithmic distribution functions for colloidal particles, *J. Phys. Chem.*, **68**(11), 3093(1964)
- 24 K.Natesaiyer, K.C.Hover, K.A.Snyder, Protected-paste volume of air-entrained cement paste, part I, *ASCE, J. Mater. in Civil Eng.*, **4**(2), 166(1992)
- 25 European Standard, EN 480-11:2005. Admixtures for Concrete, Mortar and Grout-Test Methods, Part II: Determination of Air Void Characteristics in Hardened Concrete (Brussels, European Committee for Standardization, 2005) p.23