第 21 卷 第 5 期　　材 料 研 究 学 报　　Vol.21 No.5
2 0 0 7 年 10 月　　CHINESE JOURNAL OF MATERIALS RESEARCH　　October 2 0 0 7

梯度依赖的混凝土弹塑性非局部损伤的本构模型 *

杨 璐 [1,2]　朱浮声 [2]　沈新普 [1]

1. 沈阳工业大学建工学院 沈阳 110023
2. 东北大学资土学院 沈阳 110001

摘 要 以连续介质力学和不可逆热力学为基础, 提出了新的混凝土弹塑性损伤本构模型. 在该模型中采用了塑性应变 ε_{p}、各向同性损伤标量 D 以及应变梯度 $\nabla\varepsilon$ 作为内变量, 其中应变梯度反应了损伤的非局部性质, 本模型是梯度依赖的非局部损伤模型, 严格满足热力学的基本方程. 应用梯度依赖弹塑性非局部损伤本构模型得出的结果比已有的混凝土损伤塑性模型更为合理.

关键词 材料科学基础学科, 弹塑性, 本构模型, 不可逆热力学, 损伤, 非局部的

分类号 TU528.01　　**文章编号** 1005-3093(2007)05-0477-05

A gradient-dependent constitutive models of concrete for elasto plasticity nonlocal damage

YANG Lu[1,2]　ZHU Fusheng[2**]　SHEN Xinpu[1]

1.Shenyang Univercity of Technology, Shenyang 110023

2.Northeastern University, Shenyang 110001

* Supported by National Natural Science Foundation of China No.10472072 and Science Foundation For Youth of Department of Education, Liaoning Province No.05L310.

Manuscript received December 20, 2006; in revised form June 4, 2007.

** To whom corresponence should be addressed, Tel:(024)83682877, E–mail:neuzfs@etang.com

ABSTRACT A new elastoplastic constitutive model is presented in the framework of irreversible thermodynamics. There are three internal variables in this model, i.e. plastic strain ε^P, isotropic damage variable D and strain gradient $\nabla\varepsilon$ which describes the nonlocal character of damage, thus this is a gradient-dependent model. The new constitutive relations strictly meet the basic formulations of thermodynamically consistent theory. Results obtained by gradient-dependent nonlocal damage model are more reasonable than the existing results obtained by convetional damamge model coupled with plasticity for concrete.

KEY WORDS foundational discipline in materials science, elastoplasticity,constitutive model, irreversible thermodynamics, damage, nonlocal model

材料的损伤是使材料破坏的渐进物理过程. 对于混凝土材料, 损伤可能是产生的微裂纹、微孔隙或其他夹杂物质所占据的空间在外载荷作用下长大, 汇合形成宏观裂纹, 宏观裂纹继续扩展, 导致结构强度继续降低, 最终失去承载力, 结构完全破坏的过程. 在损伤本构模型的建立过程中, 物体内存在的损伤 (微缺陷), 可以看作连续的变量场 (损伤场), 因而可以用连续介质的概念和方法来研究微缺陷的发展及其对材料力学性能的影响. 因此, 这个理论可以将材料 (包括混凝土) 模型化, 用一系列状态变量及其演化规律来描述材料的损伤状态以及损伤的演化规律,从而得出合理的损伤本构关系 [1].

根据连续介质的非局部理论 [3]: 物体内一个点的非弹性力学行为不仅取决于外载荷作用下该点的力学量 (如应力、应变等), 而且与该点邻域内的点的力学量有关. 变形的一阶梯度不足以描述复杂材料的运动学及材料的力学行为. 因此, 有必要建立非简单材料的非局部理论, 以消除这种经典损伤模型的网格依赖性, 同时计入裂纹间的相互影响. 1909 年, Cosserat 首先提出了著名的 Cosserat 本构理论 [2]. 20 世纪六十年代, 在高阶变形梯度等方面有了进一步的发展 [3]. 限于求解手段, 二十世纪八十年代以前, 上述理论一直仅限于材料的理论研究, 在固体力

* 国家自然科学基金 10472072 和辽宁省教育厅青年基金 05L310 资助项目.

2006 年 12 月 20 日收到初稿; 2007 年 6 月 4 日收到修改稿.

本文联系人: 朱浮声, 教授

学结构分析中没有重大应用实例的报道. 20 世纪八十年代以来, 非局部本构理论重新受到了重视. 目前已有的非局部本构理论模型除了 Cosserat 模型外, 还有 “面积加权平均” 的非局部非弹性模型和 “梯度依赖” 的非局部模型:

在 “面积加权平均” 的非局部非弹性模型中, 引入了材料的特征尺寸的概念, 同时引入权函数来表示物质点间力学量相互影响的数学关系, 从而确定了局部化区域的宽度, 并有效地消除了数值结果的网格依赖性; “梯度依赖” 的非局部模型的理论及应用研究是目前国际上最为活跃的本构研究课题. 由于数学上并没有严格的理论来规范本构行为中梯度依赖项的细节 (阶数及形式等), 目前的文献中有多种不同的梯度依赖形式. Aifantis[4] 提出了一个梯度依赖塑性理论, 可能这是此类模型中形式最简单的一个, 在这个模型中 Aifantis 将一个附加系数 c 引用到塑性屈服条件 f^P 之中, 即 $f^P=\overline{\sigma}-[\sigma_s(\overline{\varepsilon}^p)-c\nabla^2\overline{\varepsilon}^p]\leq 0$, 其中 $\overline{\sigma}$ 为等效应力, $\overline{\varepsilon}^p$ 为等效塑性应变, $\sigma_s(\overline{\varepsilon}^p)$ 为流动应力, 对于硬化材料它可以被看作为 $\overline{\varepsilon}^p$ 的函数, $c=c(\overline{\varepsilon}^p)$ 是梯度系数. 在这个模型中 $\overline{\varepsilon}^p$ 的二阶梯度用来解释一点附近点的位错运动的影响, 而参数 c 用来体现局部化特征, 例如局部剪切带的厚度等, 它可能为一常量也可能为一变量. Aifantis 梯度依赖模型能够模拟应变软化引起的局部化. 这一模型被许多学者所应用. Aifantis 在一系列文章中证明了在局部化过程中高阶应变梯度的关键作用. 这一类模型数学表达形式简单, 由于 Aifantis 等在经典塑性理论的本构中引入了等效应变的拉普拉斯算子, 在他们的理论中没有定义应变梯度的功共轭量, 所以其热力学理论不完善. 但由于实践上实用有效, 得到了广泛应用. De Borst 等 [5] 将 Aifantis 的梯度依赖模型应用到混凝土标量损伤与塑性耦合的模型中, 建立了梯度依赖的损伤塑性耦合模型, 并进一步结合面积加权平均非局部理论的思想, 提出了隐式的梯度依赖模型. de Borst 的梯度依赖模型数值解和试验值的载荷位移图形, 说明该模型数值解与试验值比较接近 [5], 但数值结果表明其所得到的局部化区域的 “变形集中” 效果不明显.

目前的文献中, 还有以下混凝土损伤模型: Nedjar 模型 [6] 于引入了另外的内变量演化率, 因此其计算和模拟更加复杂, 给出的结果表明该模型的损伤局部化程度不高 [5], 不象试验结果中那么明显. 李锡夔 [7] 提出了用于塑性理论的 Aifantis 类的 “等效塑性应变” 的梯度依赖的混合有限元算法, 内状态变量的 Laplacian 的确定基于它在求积点邻域的最小二乘方多项式近似, 其数值结果较合理地反映了变形软化塑性下的变形局部化现象. 文献 [8] 中对混凝土的损伤本构模型有详实分析以及在文献 [9] 讨论的模型和方法都以连续介质力学和不可逆热力学为基础. 但是, 这两种模型都未提及损伤梯度依赖项的非局部共轭力问题. 本文在已有文献的基础上引入等效应变梯度并定义等效应变梯度的功共轭量, 提出新的混凝土弹塑性非局部损伤本构模型.

1 梯度依赖非局部损伤模型的建立

本文提出一个新的混凝土梯度依赖非局部损伤模型, 采用 3 个内变量: 塑性应变 ε_{p}、各向同性损伤 D、应变梯度 $\nabla\varepsilon$, 其中应变梯度反应了损伤的非局部性质. 只选取一个非局部内变量一是为了简单, 另一原因是 S.Murakami(2000) 曾证明用一个非局部内变量就可以描述材料的非局部效应.

将塑性应变 ε_{p}、各向同性损伤 D 和应变梯度 $\nabla\varepsilon$ 这 3 个内变量代入积分形式 Clansins–Duhem 不等式, 可得

$$\iiint_{\Omega}\frac{1}{\theta}[(\sigma-\rho\frac{\partial u}{\partial\varepsilon}):\dot{\varepsilon}+\rho(\theta-\frac{\partial u}{\partial s})\dot{s}-$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial\varepsilon_{\mathrm{p}}}:\dot{\varepsilon_p}-\rho\frac{\partial u}{\partial D}\dot{D}-\rho\frac{\partial u}{\partial(\nabla\varepsilon)}(\nabla\dot{\varepsilon})]d\Omega\geq 0 \qquad (1)$$

在小变形条件下有

$$\varepsilon=\varepsilon_e+\varepsilon_{\mathrm{p}} \qquad (2)$$

$$\dot{\varepsilon}=\dot{\varepsilon}_e+\dot{\varepsilon}_{\mathrm{p}} \qquad (3)$$

$$u=\Psi+\theta s \qquad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial\varepsilon}=-\frac{\partial u}{\partial\varepsilon_{\mathrm{p}}} \qquad (5)$$

其中 Ψ 为 Helmholtz 自由能函数, 式 (1) 可改写为

$$\iiint_{\Omega}\frac{1}{\theta}[(\sigma-\rho\frac{\partial u}{\partial\varepsilon}):\dot{\varepsilon}+\rho(\theta-\frac{\partial u}{\partial s})\dot{s}-$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial\varepsilon_{\mathrm{p}}}:\dot{\varepsilon_p}-\rho\frac{\partial u}{\partial D}\dot{D}-\rho\frac{\partial u}{\partial(\nabla\varepsilon)}(\nabla\dot{\varepsilon})]d\Omega\geq 0 \qquad (6)$$

采用损伤及其广义力的经典定义

$$Y=-\rho\frac{\partial\Psi}{\partial D} \qquad (7)$$

$$\Psi=\Psi^{local}(D,\varepsilon)+\Psi^{grad}(\nabla\varepsilon) \qquad (8)$$

并取 $\rho\Psi^{local}$ 和 $\rho\Psi^{grad}$ 为如下形式 [9]

$$\rho\Psi^{local}=\frac{E(1-D)}{2(1+\nu)}\times$$

$$[\frac{v}{1-2v}(tr\varepsilon_{\mathrm{e}})^2+(\varepsilon_{\mathrm{e}})^2]+\frac{1}{2}Q\tilde{r}^2 \qquad (9)$$

$$\rho\Psi^{grad}=\frac{1}{2}(1-D)(\nabla\varepsilon)\cdot\mathbf{P}\cdot(\nabla\varepsilon) \qquad (10)$$

其中 Q 为对应于 r 的功共轭力, E 为材料的弹性模量, v 为泊松比,

$$\mathbf{P}_{ij} = c^2\delta_{ij} \tag{11}$$

$$\tilde{r} = \sqrt{1-D}r \tag{12}$$

r 为积累塑性应变. 于是

$$Y = -\rho\frac{\partial\Psi}{\partial D} = \rho\{\frac{1}{2}\frac{E}{(1+v)}[\frac{v}{1-2v}(tr\varepsilon_{\mathrm{e}})^2 I + (\varepsilon_{\mathrm{e}})^2] + \frac{1}{2}Qr^2 + \frac{1}{2}(1-D)(\nabla\varepsilon)\cdot\mathbf{P}\cdot(\nabla\varepsilon)\} \tag{13}$$

其中 I 为单位矩阵.

由 (1) 和 (9) 得:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{E(1-D)}{1+v}(\frac{v}{1-2v}tr\varepsilon_{\mathrm{e}}I + \varepsilon_{\mathrm{e}}) \\ &= 2(1-D)\mu\varepsilon_{\mathrm{e}} + (1-D)\lambda(tr\varepsilon_{\mathrm{e}})I\end{aligned} \tag{14}$$

$$R = \tilde{Q}r \tag{15}$$

$$\tilde{Q} = (1-D)Q \tag{16}$$

采用如下形式的损伤势函数 F[9]:

$$F = \tilde{Q} + \frac{S}{s+1}(\frac{Y}{S})^{s+1}(1-D)^{\phi} \tag{17}$$

其中 s, S, ϕ 是材料参数, D 是损伤变量, Y 是损伤共轭力, $\tilde{Q}$ 为有效应力空间中定义的非弹性势的塑性部分 [10]:

$$\tilde{Q} = \alpha_Q\tilde{I}_1 + \tilde{J}_2 - [k - k_\infty(1-e^{-b\mu})] \tag{18}$$

其中 α_Q 是非关联流动准则中的扩容常数, k 是初始剪切强度常数, k_∞ 是虚拟静材料的应变硬化极限, 这极限相当于等效塑性应变趋于无穷大. 参数 b 是模型常数, 可通过拟和实验现象来确定.

$$\tilde{I}_1 = \tilde{\sigma}_{ii}, \tilde{J}_2 = \frac{1}{2}\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij} \tag{19}$$

其中 $\tilde{\sigma}_{ii}$ 是有效应力的主值之和, $\tilde{J}_2$ 是有效应力偏量的第二不变量.

在有效应力空间中塑性损伤加载条件的定义为

$$\tilde{f} = \alpha_F\tilde{I}_1 + \tilde{J}_2^{\frac{1}{2}} - [k + k_\infty(1-e^{-b\lambda})] \le 0 \tag{20}$$

塑性损伤乘子 $\dot{\lambda}$ 由下列的一致性条件求得:

$$\tilde{f} = \dot{\tilde{f}} = 0 \tag{21}$$

上式的物理意义是, 在加载 (非卸载) 过程中材料的应力点始终处于屈服面上. 对 (20) 式进行全微分, 得

$$d\tilde{f} = \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij} + \frac{\partial\tilde{f}}{\partial D}dD + \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\lambda}d\lambda \tag{22}$$

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{1}{(1-D)}(\alpha_F\delta_{ij} + \frac{\delta_{ii}}{2J_2^{\frac{1}{2}}}) \tag{23}$$

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial D} = \frac{\alpha_F}{(1-D)^2}\sigma_{ii} + \frac{J_2^{\frac{1}{2}}}{(1-D)^2} \tag{24}$$

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\lambda} = bk_\infty e^{-b\lambda} \tag{25}$$

由式 (14) 得

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= (-2\mu\varepsilon_{\mathrm{e}} - \lambda tr\varepsilon_{\mathrm{e}}I)\dot{D} + 2(1-D)\mu\dot{\varepsilon}_{\mathrm{e}} + \lambda(1-D)tr\dot{\varepsilon}_{\mathrm{e}} \\ &= (-2\mu\varepsilon_{\mathrm{e}} - \lambda tr\varepsilon_{\mathrm{e}}I)\dot{D} + 2(1-D)\mu(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{\mathrm{p}}) + \lambda(1-D)I(tr\dot{\varepsilon} - tr\dot{\varepsilon}_{\mathrm{p}})\end{aligned} \tag{26}$$

$$\dot{D} = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial Y} = \dot{\lambda}\frac{\partial[\tilde{Q} + \frac{S}{s+1}(\frac{Y}{S})^{s+1}(1-D)^{\phi}]}{\partial Y} = \dot{\lambda}S(\frac{Y}{S})^{s}(1-D)^{\phi} \tag{27}$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial\sigma} = \dot{\lambda}\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial\sigma} = \dot{\lambda}\frac{1}{(1-D)}(\alpha_Q\delta_{ij} + \frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_2}}) \tag{28}$$

将 (25)、(26)、(27) 代入 (22), 得

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= \tfrac{\partial\tilde{f}}{\partial\sigma} : [(-2\mu\varepsilon_{\mathrm{e}} - \lambda tr\varepsilon_{\mathrm{e}}I)\dot{D} + 2(1-D)\mu(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{\mathrm{p}}) + \lambda(1-D)I(tr\dot{\varepsilon} - tr\dot{\varepsilon}_{\mathrm{p}}) + \tfrac{\partial\tilde{f}}{\partial D}\dot{\lambda}S(\tfrac{Y}{S})^{\mathrm{s}}(1-D)^{\phi} + \tfrac{\partial\tilde{f}}{\partial\lambda}\dot{\lambda}] \\ &= \tfrac{\partial\tilde{f}}{\partial\sigma} : \{[(-2\mu\varepsilon_{\mathrm{e}} - \lambda tr\varepsilon_{\mathrm{e}}I)\dot{\lambda}S(\tfrac{Y}{S})^{\mathrm{s}}(1-D)^{\phi} + 2(1-D)\mu\dot{\varepsilon} - 2(1-D)\mu\dot{\lambda}\tfrac{1}{(1-D)}(\alpha_Q\delta_{ij} + \tfrac{S_{ij}}{2\sqrt{J_2}}) \\ &\quad + \lambda(1-D)tr\dot{\varepsilon}I - \lambda(1-D)tr[\dot{\lambda}\tfrac{1}{(1-D)}(\alpha_Q S_{ij} + \tfrac{S_{ij}}{2\sqrt{J_2}})]I\} + \tfrac{\partial\tilde{f}}{\partial D}\dot{\lambda}S(\tfrac{Y}{S})^{\mathrm{s}}(1-D)^{\phi} + \tfrac{\partial\tilde{f}}{\partial\lambda}\dot{\lambda} = 0\end{aligned} \tag{29}$$

令

$$\alpha_Q S_{ij} + \frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_2}} = M; \tag{30}$$

$$S(\frac{Y}{S})^{\mathrm{s}}(1-D)^{\phi} = N \tag{31}$$

则 (29) 式可简化为

$$= -\dot{\lambda}\{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma}:[(2\mu\varepsilon_{\rm e}+\lambda tr\varepsilon_{\rm e}I)N+2\mu M+\lambda trMI]-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial D}N-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda}\}+\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma}:[2(1-D)\mu\dot{\varepsilon}+(1-D)\lambda tr\dot{\varepsilon}I]=0 \quad (32)$$

于是得

$$\dot{\lambda}=\frac{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma}:(1-D)[2\mu\dot{\varepsilon}+\lambda(tr\dot{\varepsilon})I]}{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma}:\{[2M\varepsilon_{\rm e}+\lambda(tr\varepsilon_{\rm e})I]N+2\mu M+\lambda(trM)I\}-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial D}N-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda}} \quad (33)$$

其中 $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial D}$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda}$ 分别为 (23), (24), (25) 式.

将 (33) 式代入 (27) 式, 即得 $\dot{D}$ 演化方程, 将 (33) 式代入 (28) 式可得 $\dot{\varepsilon}_{\rm p}$ 演化方程.

2 对模型的数值验证

为了验证模型的有效性, 计算了高强混凝土试件竖直方向两端均匀载荷的单向拉伸. 在自主开发的 FEADP 弹塑性损伤有限元程序中进行数值计算, 使用了本文公式 (29)(30), 得到图 1 等效塑性应变场的分布图和图 2 为损伤场的分布图. 选择的参数为 c=–500.0, d=5.0 mm, E=200000 MPa, v=0.3, $\sigma_{\rm eq}$=329 MPa, Q=6580 MPa, b=20, S=1, s=1. 图 1、2 表明, 模型的非局部项的系数参数取值是合适的, 得出的局部剪切带的位置和形状基本合理.

同时, 图 1 中的塑性局部化区呈现对数螺线形与文献 [13] 中给出的应变局部化解析解很接近, 表明本文给出的模型能有效模拟塑性变形和损伤的局部化现象. 为了进一步对比该模型的数值结果, 根据 ABAQUS 有限元软件应用弧长法对上述试件进行了损伤塑性数值分析. 按照 ABAQUS 程序要求 [9,10], 在拉伸、受压应力状态下的损伤演化率是以数据系列的形式输入的.

混凝土损伤塑性模型采用了非关联的塑性流动准则. 塑性势函数 G 的形式为 Drucker–Prager 双曲线函数

$$G=\sqrt{(\in \sigma_{t0}tg\Psi)^2+\overline{q}^2}-\overline{p}tg\Psi \quad (36)$$

其中 $\Psi(\theta,f_1)$ 为在 p–q 平面内高侧压力下的扩容角, 单位为度 "°"; $\sigma_{t0}(\theta,f_i)=\sigma_t|_{\overline{\varepsilon}_t^{pl}=0}$, $\dot{\varepsilon}_t^{pl}$=0, 为损伤开始出现时的单向拉伸应力值, 是在计算之前给定的; 参数 $\in(\theta,f_i)$ 是一个偏心参数. ABAQUS 中 $\in$ 的缺省值为 $\in$=0.1, 由于采用了非关联流动准则, ABAQUS 生成的刚度阵是非对称的. 等效塑性应变为

$$\varepsilon^p=\varepsilon^{in}-\frac{D}{1-D}\frac{\sigma_{\rm s}}{E} \quad (37)$$

图 3 给出了等效塑性应变场分布图, 等效塑性应变场没形成连续的剪切带; 图 4 给出了损伤场的局部化带的位置和形状.

这些结果表明, 图 1 出现了明显等效塑性应变场的剪切带, 图 2 也出现了明显的损伤局部化带; 图 3 中没有出现象图 1 中呈现连续的等效塑性应变场剪切带, 图 4 出现了较好的损伤场局部化带. 其原因是图 1, 2 是塑性应变与损伤是增量形式的关系, 而图 3、4 塑性应变与损伤是全量形式的关系, 因此出现不同的数值结果. 由此可见, 应用梯度依赖弹塑性非局部损伤本构模型得出的数值结果更为合理.

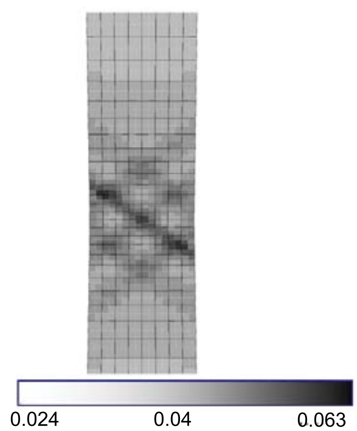

图 1 等效塑性应变场的分布图

Fig.1 Distribution of the $\overline{\varepsilon}_p$ filed

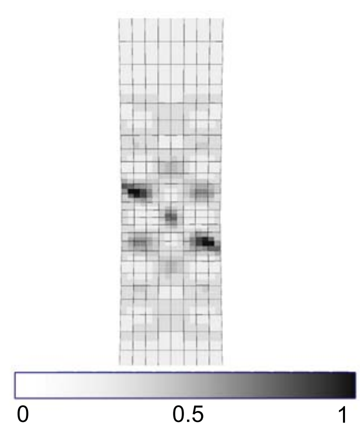

图 2 损伤场的分布图

Fig.2 Distribution of the D filed

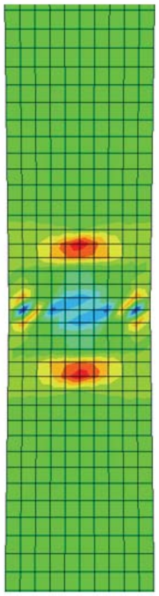

图 3　等效塑性应变场的分布图

Fig.3　Distribution of the $\overline{\varepsilon_p}$ filed

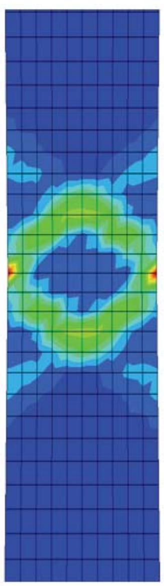

图 4　损伤场的分布图

Fig.4　Distribution of the D filed

3　结　　论

本文给出的新本构模型严格满足热力学的基本方程, 模型中的材料参数由实验确定. 用此本构模型可以预测混凝土的变形, 应力、应变及损伤的发展演化. 应用梯度依赖弹塑性非局部损伤本构模型得出的结果比已有的混凝土损伤塑性模型更为合理.

参　考　文　献

1　Yu Tianqing, Qian Jicheng, *Damage Theory and Application* (Beijing, National Defence Industry Publishing House, 1993) p.16
(余天庆, 钱济成, *损伤理论及其应用* (北京, 国防工业出版社, 1993) p.16)

2　Huang K Z., Huang Y G., *Solid Constitutive Relationship* (Beijing, Tsinghua University Press, 1999) p.45
(黄克智, 黄永刚, *固体本构关系* (北京, 清华大学出版社, 1999) p.45)

3　Koiter W. T., General theorems for elastic–plastic solids, In: Sueddon I. N., Hill R., ed. *Progress in Solid Mechanics* (Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1960) p.165

4　Aifantis E.C., On the role of gradient in the localization of deformation and fracture. Int. J. Engng. Sci., **30**, 1279(1992)

5　Rene de Borst, J. Pamin, Marc G., D.Geers, On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis. Eur.J.Mech.A/Solids, **18**, 939(1999)

6　B.Nedjar. Elastoplastic-damage modeling including the gradient of damage: formulation and computational aspects. International Journal of Solids and Structures, **38**, 5421(2001)

7　Li X., S.Cescotto, A mixed finite element method in gradient plasticity for pressure dependent materials and modeling of strain localization, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **144**, 287(1997)

8　SONG Yupu, *Constitutive Relationship and Failure Criterion of Various Concrete Materials* (Beijin, China Water Conservancy and Hydropower Press, 2002) p.102
(宋玉普, *多种混凝土材料的本构关系和破坏准则* (北京, 中国水利水电出版社, 2002) p.102)

9　YANG Lu, SHEN Xinpu, SUN Guang, Investigation on the constitutive models of elastoplasticity coupled with damage for concrete, Journal of Shenyang University of Technology, **27**(3), 321(2005)
(杨　璐, 沈新普, 孙　刚, 混凝土弹塑性损伤本构理论的研究, 沈阳工业大学学报, **27**(3), 321(2005))

10　S.Murakami, K.Kamiya, Constitutive and damage evolution equations of elastic–brittle materials based on irreversible thermodynamics, PII:S0020-7403(96)000034-3

11　Geers M.G.D., R.de Borst, W.A.M. Brekelmans, R.H.J.Peerlings. Strain-based transient-gradient damage model for failuranalysis. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **160**, 133(1998)

12　X.P.Shen, K.Saanouni, Gradient-dependent nonlocal constitutive formulation for elasto-plasticity coupled with isotropic damage. In: edited by Pietrzyk M., Mitura Z. and Kaczmar *Proc. ESAFORM' 2002*, (Publishing House Akapit, Krakow, Poland, 2002) p.143

13　XU Bingye, *Pasticitymechanics* (Beijing, Higher EducationPress, 1989) p.74
(徐秉业, *塑性力学* (北京, 高等教育出版社, 1989) p.74)