

文章编号:1000-6893(2007)04-0930-05

-gap 度量及其在飞行控制律评估中的应用

刘林^{1,2}, 纪多红², 唐强²

(1. 北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100083)

(2. 飞行自动控制研究所 飞控部, 陕西 西安 710065)

-gap Metric and Its Application to Clearance of Flight Control Laws

LIU Lin^{1,2}, JI Duo-hong², TANG Qiang²

(1. School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

(2. Department of Flight Control, Flight Automatic Control Research Institute, Xi'an 710065, China)

摘要: 传统控制律评估方法主要用于单输入单输出(SISO)系统,且对模型参数摄动考虑不够全面,针对这些不足,研究了 -gap 度量方法。在介绍系统广义稳定裕度相关概念的基础上,给出了 -gap 度量的定义、特点和性质以及近似摄动模型的计算,提出 -gap 度量评估控制律的步骤。实例结果表明,该方法不仅克服了上述传统评估方法的缺陷,而且还有根据所求的各摄动影响情况忽略影响小的元素,以减少计算量及可以找到最坏情况下的参数摄动组合等优点。

关键词: 控制律评估; -gap 度量; 广义稳定裕度; 近似摄动模型; 参数摄动

中图分类号: V249.1 **文献标识码:** A

Abstract: The paper studies the -gap metric method by analyzing the shortcomings of the traditional clearance methods. On the basis of introduction of the generalized stability margin and its correlation concepts, the paper presents the definitions, characteristics, properties of the -gap metric and computing the approximate perturbation model, and then puts forward the process to clearance of flight control laws (FCLs). At last, the -gap metric is applied to the clearance of a FCL. Results show that the -gap metric method not only overcomes the limitations of traditional clearance methods, but also reduces amounts of computation greatly and finds the worst-case parameter combinations.

Key words: clearance of flight control law; -gap metric; generalized stability margin; approximate perturbation model; parameter perturbation

近年来,为了满足飞行任务和实现特殊功能的需要,现代战斗机一般采用更加先进的气动布局,而且常被设计为静不安定,随着飞机对象复杂程度和控制要求的不断提高,飞行控制律的设计也趋于复杂,这使得控制律评估越来越重要。而传统评估方法主要用于单输入单输出(SISO)系统,且很少全面考虑模型参数的不确定性。这就需要研究更加可靠、有效的验证手段来评估飞行控制律。为此,本文研究了一种新的控制律评估方法——-gap 度量。

在国外,欧洲航空技术研究组(GARTEUR)曾做了些 -gap 度量在控制律评估中的应用研究^[1],从通用性、保守性、可理解性等方面分析了 -gap 度量的优缺点^[2]。由于 -gap 度量只表述

两系统间的“差异程度”,并不能描述系统本身的稳定裕度,而经典控制中的稳定裕度又不能与 -gap 度量方法相结合应用。为此,根据系统模型互质因式不确定性的鲁棒稳定条件^[3],以及用互质因式表示的摄动系统与用 -gap 度量表示的摄动系统间的关系^[4],介绍 -gap 度量前引出了一种新的稳定裕度——广义稳定裕度。基于此,本文首先给出了广义稳定裕度的概念,然后在 -gap 度量及其相关定义的基础上,介绍了 -gap 度量的性质特点及近似摄动模型的计算,最后给出 -gap 度量评估控制律的步骤,并将其应用于某飞机横侧向控制律评估中。

1 广义稳定裕度

如图 1, P 为被控对象; C 为控制器; u, y 分别为对象的输入和输出; d_i, d_o 分别为对象的输入干扰和输出干扰,假定信号、传递矩阵都有相应维

收稿日期:2006-07-18; 修订日期:2007-02-05
基金项目:航空科学基金(05E18005)
通讯作者:纪多红 E-mail:jiduohong@yahoo.com.cn

数。则 $[d_o \quad d_i]^T$ 到 $[y \quad u]^T$ 的传递函数

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ I \end{bmatrix} (I - CP)^{-1} [-C \quad I] \begin{bmatrix} d_o \\ d_i \end{bmatrix} \quad (1)$$

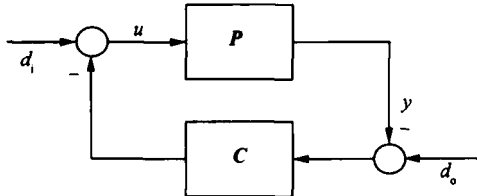


图1 闭环控制系统结构图

Fig. 1 Closed-loop control system

定义1 给定闭环控制系统 $[P, C]$, 如图1所示, 定义其广义稳定裕度为^[5]

$$(P, C) := \begin{cases} \left\| \begin{bmatrix} P \\ I \end{bmatrix} (I - CP)^{-1} [-C \quad I] \begin{bmatrix} d_o \\ d_i \end{bmatrix} \right\|^{-1} & \text{系统 } [P, C] \text{ 稳定} \\ 0 & \text{系统 } [P, C] \text{ 不稳定} \end{cases} \quad (2)$$

其相应频域广义稳定裕度定义为

$$\text{scaled}(P(j), C(j)) := \left\| \begin{bmatrix} P(j) \\ I \end{bmatrix} (I - C(j)P(j))^{-1} [-C(j) \quad I] \begin{bmatrix} d_o \\ d_i \end{bmatrix} \right\|^{-1} \quad (3)$$

以上所定义的广义稳定裕度跟传统的幅值裕度、相角裕度有直接联系, 对于 SISO 系统 $[P, C]$, $(P, C) = 1$ 相当于该系统至少有 $20 \lg(1 + \gamma)$ / $(1 - \gamma)$ dB 的幅值裕度和 $2 \arcsin \gamma$ rad 的相角裕度^[6]。

基于 H 回路成形思想, 在图1控制回路中引入对角输入、输出加权阵 W_i 和 W_o , 如图2所示。显然, 其回路并没有改变。

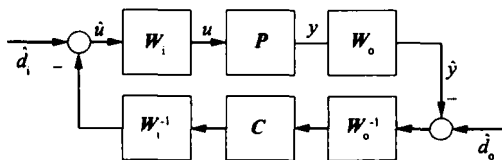


图2 加权闭环控制系统结构图

Fig. 2 Weighted closed-loop control system

根据定义1, 若系统 $[P, C]$ 稳定, 加权后的结构图如图2, 其加权广义稳定裕度为

$$\text{scaled}(W_o P W_i, W_i^{-1} C W_o^{-1}) := \left\| \begin{bmatrix} W_o & 0 \\ 0 & W_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ I \end{bmatrix} (I - C W_o^{-1} W_i P W_i)^{-1} [-C W_o^{-1} \quad I] \begin{bmatrix} d_o \\ d_i \end{bmatrix} \right\|^{-1} \quad (4)$$

定义2 对于系统 $[P, C]$, 其频域最优广义稳定裕度定义为

$$\text{scaled}(P(j), C(j)) := \sup_{W_i, W_o} (W_o P W_i, W_i^{-1} C W_o^{-1})(j) \quad (5)$$

且定义系统最优广义稳定裕度

$$\text{scaled}(P, C) := \inf_R \text{scaled}(P(j), C(j)) \quad (6)$$

式(5)中 R 为对角阵集合, 可通过将式(5)转化为广义特征值最小化问题求加权阵 W_i 和 W_o ^[7]。

对控制系统而言, 控制器的设计要满足稳定裕度要求, 一般取 $\text{scaled}(P, C) \geq 0.3$ 。此时, 对于加权的 SISO 系统相当于至少有 5.4 dB 的幅值裕度和 35° 的相角裕度。

2 -gap 度量

-gap 度量是在对象规范互质分解的基础上提出的, 令 \tilde{N}, \tilde{M} 为被控对象 P 的左规范互质分解, 即 $P = \tilde{M}^{-1} \tilde{N}$; 令 N, M 为被控对象 P 的右规范互质分解, 即 $P = NM^{-1}$ 。记

$$\left. \begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \\ \tilde{G} &= [-\tilde{M} \quad \tilde{N}] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

定义3 给定对象 $P_0, P_1 \in \mathbf{R}^{p \times q}$, 其 -gap 度量定义为^[2,7]

$$(P_0, P_1) := \begin{cases} \tilde{G}_1 G_0 & [P_1, -P_0^*] = [P_0, -P_0^*] \\ 1 & \text{其他情况} \end{cases} \quad (8)$$

式中: $[P, -P^*]$ 为正反馈系统 $[P, -P^*]$ 开右半平面极点数; P^* 为 P 的复共轭转置, 下同。

另外, -gap 度量也可表示成如下非互质分解形式^[2], 其取值条件同式(8)。

$$(P_0, P_1) = \begin{cases} (I + P_1 P_1^*)^{-1/2} (P_1 - P_0) (I + P_0^* P_0)^{-1/2} \\ 1 \end{cases} \quad (9)$$

式(9)更直观地说明了 -gap 度量是量化两系统间“差异程度”的一种描述方式。

-gap 度量与系统广义稳定裕度有如下关系^[2]

$$\text{scaled}(P_1, C) = \text{scaled}(P_0, C) - (P_0, P_1) \quad (10)$$

式(10)表明了 -gap 度量反映系统的鲁棒性, 可得以下结论: 若两对象间的 -gap 度量很小,

则能稳定其中一个对象的控制器也较易稳定另一个;反之,很难找到能同时稳定两对象的控制器。

定义4 给定对象 $P_0(j), P_1(j) \in C^{p \times q}$, 其频域 $-gap$ 度量定义为^[7]

$$k(P_0(j), P_1(j)) := \overline{(\tilde{G}_1(j) G_0(j))} \quad (11)$$

对于 SISO 对象,其 $-gap$ 度量物理意义如图3所示。

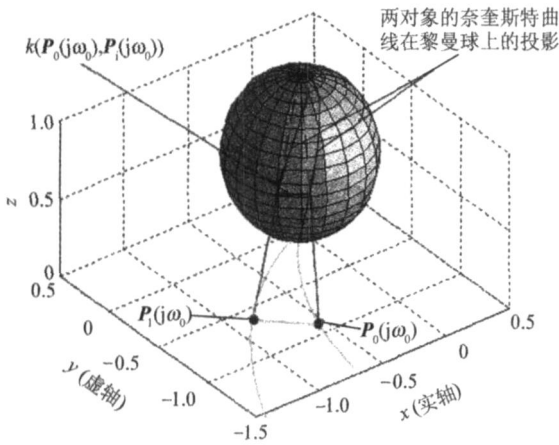


图3 $-gap$ 度量的物理表述图

Fig. 3 Physical description of $-gap$ metric

如图3,两 SISO 对象 P_0 和 P_1 , 且满足条件 $[P_1, -P_0^*] = [P_0, -P_0^*]$, 则某频率下其频率 $-gap$ 度量可视为:以黎曼球球顶 $(0, 0, 1)$ 为光源,该频率对应的奈奎斯特曲线上的两点在黎曼球上两投影点间的弦距。由此可见,两对象频率 $-gap$ 度量是其奈奎斯特曲线关系的一种“缩小”映射,且奈奎斯特曲线某点到原点的距离趋于0或 ∞ ,则对应的频率 $-gap$ 度量均趋于0,只有在截止频率附近的度量值较大,这也说明了频率 $-gap$ 度量潜在地描述了对对象的截止频率。

定理1 对于 $P_0, P_1 \in R^{p \times q}$ 及 $C \in R^{q \times p}$, 系统 $[P_0, C]$ 稳定并有

$$(P_1(j), C(j))$$

$$(P_0(j), C(j)) - k(P_0(j), P_1(j)) \forall j,$$

则系统 $[P_1, C]$ 稳定当且仅当

$$[P_1, -P_0^*] = [P_0, -P_0^*]^{[2,7]}。$$

此定理给出了系统广义稳定裕度的下界。

以上介绍了 $-gap$ 度量的相关定义及性质,其具有以下特点:

- (1) $-gap$ 度量有清楚的频域概念,其能在频域中来探讨系统的性能。
- (2) $-gap$ 度量可以很好地用可视化表示参

数变化对鲁棒性的影响。

(3) $-gap$ 度量可用于计算各参数变化对系统的影响程度,从而可以忽略次要的影响元素,减少计算量。

3 近似摄动模型的计算

定义5 令 P_0 到 P_1 的映射关系为^[7]

$$X_{P_1}(j) := \tilde{G}_0 G_1 (G_0^* G_1)^{-1}(j) \quad (12)$$

不难证明 $X_{P_0}(j) = 0$, 因为

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0 G_0 &= \tilde{M}_0 (\tilde{M}_0^{-1} \tilde{N}_0 - N_0 \tilde{M}_0^{-1}) M_0 = \\ &= \tilde{M} (P_0 - P_0) M_0 = 0 \end{aligned}$$

由 $X_{P_1}(j)$ 与频域 $-gap$ 度量的关系^[2] 可得

$$k(P_0(j), P_1(j)) = \frac{\overline{(X_{P_1}(j))}}{\sqrt{1 + \overline{(X_{P_1}(j))}^2}} \quad (13)$$

可见,通过式(13)可计算出两对象间的 $-gap$ 度量。

当 n 个不确定参数摄动 $\delta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 同时作用时,令 $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$, 此时摄动模型为 P 。为了符号的表示简单,假设参数摄动已规范化,即 $\delta_i \in [-1, 1]$, 且其名义值为零。通过名义模型 P_0 到 P 映射 X_P 的泰勒一阶展开,可以得到

$$X_P \approx X_{app} = \sum_{i=1}^n \delta_i X_i \quad (14)$$

式中:

$$X_i = \left. \frac{\partial X_P}{\partial \delta_i} \right|_{\delta=0}$$

再根据式(12)可推得近似摄动模型

$$P_{app} = P_0 - (X_{app}^{-1} \tilde{M}_0 + M_0^* P_0^*)^{-1} M_0^{-1} \quad (15)$$

至此,由定义1、定义2,可以求得参数摄动同时作用下系统的广义稳定裕度及最优广义稳定裕度。

4 基于 $-gap$ 度量的飞行控制律评估

根据 $-gap$ 度量方法相关的一些概念和性质,给出用该方法评估飞行控制律的过程,其步骤如下:

- (1) 从对象 P 的输入端断开闭环系统回路,飞机和控制器看成一个对象 P , 此时,控制器 $C = I$ (I 为单位阵), 如图4所示。

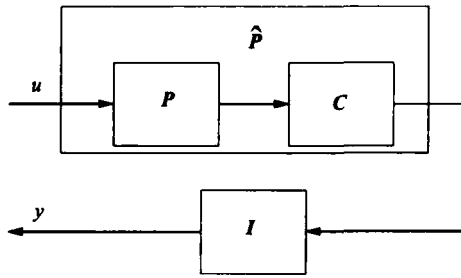


图 4 等效开环控制系统结构图

Fig. 4 Equivalent open-loop control system

(2) 求对角加权阵 W_i 和 W_o , 在此基础上计算名义系统 (P_0, C) 的最优广义稳定裕度。若 $\rho_{scaled}(P_0, C) < 0.3$, 继续计算, 否则不满足稳定裕度要求, 终止计算。

(3) 对加权阵作用下的名义模型 $W_o P_0 W_i$ 左(右)规范互质分解。

(4) 求各不确定参数摄动分别作用下的模型 $P_{\bar{x}}^+$ 和 $P_{\bar{x}}^-$ (x 为相关摄动参数, $+$ 、 $-$ 分别为摄动的正负极性), 并计算出最优频域广义稳定裕度 $\rho_{scaled}(P_{\bar{x}}^+(j\omega), C(j\omega))$ 和 $\rho_{scaled}(P_{\bar{x}}^-(j\omega), C(j\omega))$, 取其较小者, 求出相应摄动下的 $X_{W_o P_{\bar{x}} W_i}(j\omega)$, $W_o P_{\bar{x}} W_i(j\omega)$ 。

(5) 根据(4)的结果求各参数摄动下的 ρ -gap 度量, 并忽略影响小(如 < 0.01)的参数摄动。根据式(14)和式(15)计算由剩下不确定参数同时摄动作用时的 $X_{W_o P_{app} W_i}(j\omega)$ 及加权近似模型 $W_o P_{app} W_i(j\omega)$ 。

(6) 根据定义 2、定理 1, 计算系统的最优广义稳定裕度 $\rho_{scaled}(P_{app}, C)$ 及其下界值。若 $\rho_{scaled}(P_{app}, C) < 0.3$, 设计的控制律满足稳定性要求, 否则控制律设计失败。

5 应用举例

以某国产双发飞机横侧向通道及其控制律为评估对象, 评估其在高度为 5 000 m, 速度 $Ma = 0.6$ 的情况。考虑 3 个不确定参数: 飞机质量误差 dm , 由方向舵偏角引起的侧力系数 C_{c_r} 的误差 dC_{c_r} , 由侧滑角引起的侧力系数 C_c 的误差 dC_c , 其摄动范围见表 1。

表 1 不确定参数摄动范围

Table 1 Parameter perturb scale

状态	不确定参数	相对摄动范围/ %
情况 1	dm	$[-20, 20]$
情况 2	dC_{c_r}	$[-10, 10]$
情况 3	dC_c	$[-20, 20]$

首先, 同时断开双回路, 系统名义模型为 P_0 , 并求出加权函数阵 W_i 和 W_o 。根据定义 1, 可求

得 $\rho_{scaled}(P_0, C) = 0.4447$, 满足稳定性要求, 可继续对模型 $W_o P_0 W_i$ 左(右)规范互质分解。

求出只在质量摄动下的摄动模型 P_m^+ 和 P_m^- ; 同理, 求出其他各摄动模型 P_r^+ 和 P_r^- 及 P^+ 和 P^- 。

根据控制律评估步骤(4), 可求得 3 个参数分别摄动时的最坏情况下, 其频域 ρ -gap 度量随频率变化的曲线, 如图 5 所示。

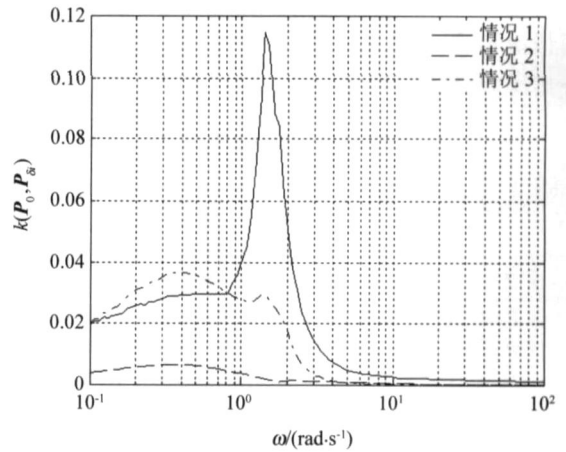


图 5 各参数摄动时的频域 ρ -gap 度量

Fig. 5 The frequency-wise ρ -gap metric when every parameter perturbs

由图 5 可看出, 质量摄动及 C_c 摄动对系统影响较大, 而 C_{c_r} 摄动作用时的影响相对较小 (< 0.01), 因此可忽略其摄动影响。

由评估步骤(5)、(6), 首先求得加权近似模型 $W_i P_{app} W_o(j\omega)$, 从而计算出摄动系统最优广义稳定裕度及其下界, 如图 6 所示。图中, 横坐标为频率, 纵坐标为频域最优广义稳定裕度 $\rho_{scaled}(P(j\omega), C(j\omega))$, 为了便于比较, 同时也给出了名义系统的最优频域广义稳定裕度曲线。

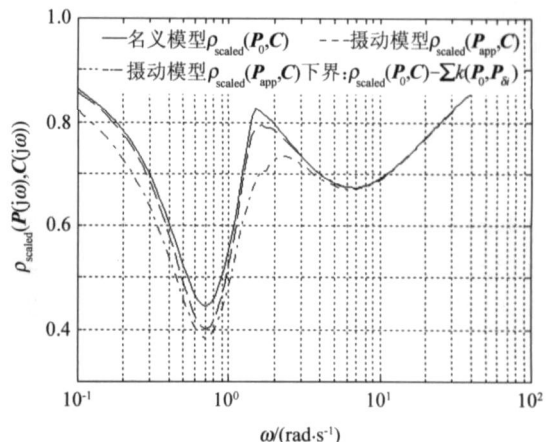


图 6 系统频域最优广义稳定裕度图

Fig. 6 Frequency-wise optimal generalized stability margins

由图 6 可得,摄动系统最优广义稳定裕度 $\text{scaled}(\mathbf{P}_{\text{app}}, \mathbf{C}) = 0.3998$, 此时频率为 0.6986 rad/s , 对应的下界为 0.3832 , 因此, 所设计的控制律满足稳定性要求。实际上, 若仅关心摄动系统是否满足最低稳定裕度要求, 则可先计算 $\text{scaled}(\mathbf{P}_{\text{app}}, \mathbf{C})$ 的下界值, 这较易计算, 可大大提高评估效率; 此值若大于或等于 0.3 , 则控制律满足稳定性要求, 否则继续计算 $\text{scaled}(\mathbf{P}_{\text{app}}, \mathbf{C})$ 。

若需要, 根据步骤 (4) 可同时求得各频率下最坏情况的摄动模型。在最坏情况下, 摄动模型组合情况随频率的变化见表 2。

表 2 摄动模型的最坏组合

Table 2 Estimating worst-case combinations of model parameters

摄动模型	频率/(rad · s ⁻¹)
\mathbf{P}_m^+	[0.10, 1.30] [3.67, 15.39]
\mathbf{P}_m^-	[1.30, 3.67] [15.39, 100]
\mathbf{P}^+	[0.10, 0.22]
\mathbf{P}^-	[0.22, 100]

由表 2 可见, 在频率 0.6986 rad/s 处对应的摄动 d_m 为正, d_{C_c} 为负。继而求得此摄动下真实摄动模型 \mathbf{P} , 根据定义可求得 $\text{scaled}(\mathbf{P}, \mathbf{C}) = 0.4065$, 可见图 6 中所求的 $\text{scaled}(\mathbf{P}_{\text{app}}, \mathbf{C})$ 接近真实值。

若考虑 3 个参数摄动同时作用, 按照同样步骤可求得摄动系统 $\text{scaled}(\mathbf{P}_{\text{app}}, \mathbf{C}) = 0.3957$, 对应的下界为 0.3782 , 与图 6 结果比较, 可见忽略摄动 d_{C_c} , 对评估结果影响不大。

6 结论

在广义稳定裕度的基础上将 $-gap$ 度量方法用于控制律评估, 它不仅能评估 SISO 系统和多输入多输出 (MIMO) 系统, 还可在充分考虑参数摄动同时, 找到各参数同时摄动下的最坏情况组合, 以评估最严酷的摄动情况; 而且, 根据 $-gap$ 度量描述的各摄动对系统的影响程度, 可忽略影响小的参数摄动减少评估的计算量。仿真结果表明, 这种情况下求得的摄动模型最优广义稳定裕度与真实系统的相近, 可见, 此做法在几乎没失去可信度的同时提高了评估效率。

参 考 文 献

- [1] Selier M, Korte U, Fielding C, et al. New analysis techniques for clearance of flight control laws[C]. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference Exhibit. 2003: 976-984.
- [2] Fielding C, Varga A, Bennani S, et al. Advanced techniques for clearance of flight control laws[M]. New York: Springer-Verlag, 2002.
- [3] 周克敏, Doyle J C, Glover K, 等. 鲁棒与最优控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002.
Zhou K M, Doyle J C, Glover K, et al. Robust and optimal control[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2002. (in Chinese)
- [4] Gu G X, Qui L. Connection of multiplicative/relative perturbation in coprime factors and gap metric uncertainty[J]. Automatica, 1998, 34(5): 603-607.
- [5] Vinnicombe G. Frequency domain uncertainty and the graph topology[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1993, 38(9): 1371-1383.
- [6] Glover K, Vinnicombe G, Papageorgiou G. Guaranteed multi-loop stability margins and the gap metric[C]. 38th IEEE Conference on Decision and Control. 2000: 4084-4085.
- [7] Steele J H. Approximation and validation of models with uncertainty: a closed-loop perspective[D]. Cambridge: University of Cambridge, Department of Engineering, 2001.

作者简介:



刘林(1963 -) 男, 研究员。主要研究方向: 飞行控制、控制律设计与评估确认、鲁棒控制等。

E-mail: linliu@facri.com



纪多红(1984 -) 男, 硕士。主要研究方向: 飞行控制。

Tel: 029-88398230

E-mail: jiduhong@yahoo.com.cn

唐强(1978 -) 男, 博士, 工程师。主要研究方向: 飞行控制、智能控制。

Tel: 029-88398230

(责任编辑: 鲍亚平)