

# 随机截尾数控机床三参数威布尔分布模型

张英芝<sup>1</sup>, 申桂香<sup>1</sup>, 吴 甦<sup>2</sup>, 薛玉霞<sup>1</sup>, 何 宇<sup>1</sup>

(1. 吉林大学 机械科学与工程学院, 长春 130022; 2. 清华大学 工业工程系, 北京 100084)

**摘要:**工程实际中对数控机床可靠性试验数据进行分析与评估时,多不考虑截尾时间,并多采用二参数威布尔分布,因而数据分析和参数估计中常带来一定误差。针对这一问题,本文提出首先采用故障总时间法进行故障数据预处理,其次假设数据服从二参数威布尔分布并求得相关参数,最后采用改进的插值法来求出位置参数,得出三参数威布尔分布模型。并以6台某系列数控车床1年的28个随机截尾故障数据为例给出具体计算过程,这可以提高数控机床可靠性分析与评价的精确性。

**关键词:**机床;随机截尾;故障总时间法;插值法;三参数威布尔分布

**中图分类号:** TG659      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1671-5497(2009)02-0378-04

## 3-parameter Weibull distribution for random truncated NC machine tool fault data

ZHANG Ying-zhi<sup>1</sup>, SHEN Gui-xiang<sup>1</sup>, WU Su<sup>2</sup>, XUE Yu-xia<sup>1</sup>, HE Yu<sup>1</sup>

(1. College of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China; 2. Department of Industry Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** In the engineering practice, the reliability test data of the numerically controlled (NC) machine tool were analyzed and evaluated mostly without consideration of the data truncation time. The data were normally fitted by the 2-parameter Weibull distribution, resulting in large error in the data analysis and the parameter estimation. Aiming at this problem, a total fault time method was used to pretreat the fault data, and the relevant parameters were got assuming that the data follow the 2-parameter Weibull distribution, then a 3-parameter Weibull distribution model was established using the improved interpolation technique to evaluate the position parameter. Taking the random truncated fault data of a certain series of 6 NC machine tools in a year as an example to demonstrate the detailed calculation process. The obtained results can improve the accuracy of the reliability analysis and evaluation on NC machine tools.

**Key words:** machine tool; random truncation; total fault time method; interpolation method; three-parameter Weibull distribution

收稿日期: 2007-10-23.

基金项目: “863”国家高技术研究发展计划项目(2007AA04Z402); 国家自然科学基金项目(50875110).

作者简介: 张英芝(1970-), 女, 副教授, 博士. 研究方向: 数控机床可靠性技术. E-mail: zhangyz@jlu.edu.cn

通信作者: 申桂香(1957-), 女, 教授, 博士生导师. 研究方向: 面向生命周期的数控装备可信性技术.

E-mail: shengx@jlu.edu.cn

目前,数控机床采用现场抽样定时截尾的试验方式进行试验,由于机床投入使用的时间不同,虽然截尾时间相同,也会导致数据出现随机截尾的特性<sup>[1]</sup>。在一般的数控机床可靠性研究中,通常不考虑最后一个截尾时间数据,并假设寿命数据服从位置参数  $\gamma=0$  的二参数威布尔分布<sup>[2]</sup>。在威布尔分布的拟合中,任意两个参数之间存在着很大的相关性,所以采用这种数据处理和分析方法其参数估计常带来一定误差<sup>[3-4]</sup>。因此,本文以 6 台某系列数控车床 1 年的 28 个随机截尾故障数据为例,首先采用故障总时间法计算随机截尾试验数据的故障发生时间和故障间隔时间,采用 Johnson 法计算故障发生的次序号;其次假设数据服从二参数威布尔分布并求得相关参数;最后通过改进的插值法求出位置参数,进而得出三参数威布尔分布模型<sup>[5-7]</sup>。这样,不但可以提高计算的精度和速度,而且还会提高数控机床可靠性分析与评价的精确性。

### 1 故障数据预处理

本文共采集了 6 台国产数控车床的现场故障信息,具体数据见表 1,其中带“+”号数据表示截尾数据。由于这些数控车床在各厂家加工的条件、使用条件不同,故能基本反映数控车床实际可靠性水平。

表 1 某数控车床故障数据

Table 1 Fault data for certain NC lathe

C <sub>1</sub>	73.24	276.51	486.56	417.72	520.63	450.92	84.23+
C <sub>2</sub>	246.65	1107.34	603.11	313.49	130.56+		
C <sub>3</sub>	873.38	417.55	883.37	320.21+			
C <sub>4</sub>	194.2	166.81	687.04	120.51+			
C <sub>5</sub>	178.65	1020.69	319.7	230.4+			
C <sub>6</sub>	139.78	599.22	385.7	100.41+			

图 1 为故障总时间法的基本原理<sup>[5]</sup>。以 3 个数控机床进行可靠性试验为例,  $t_{rs}(n=1,2,3)$  为第  $n$  号机床中止试验时间,“·”表示故障点。

各故障点的故障总时间的计算方法为

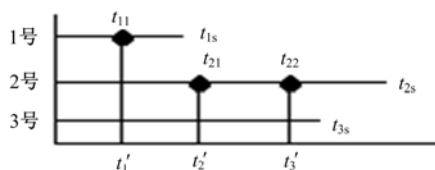


图 1 故障总时间的计算方法

Fig. 1 Calculation method of total fault time

$$\begin{cases} t'_1 = 3t_{11} \\ t'_2 = 3t_{21} \\ t'_3 = 2t_{22} + t_{1s} \end{cases} \quad (1)$$

则数控机床的故障间隔时间为

$$t_{(i)} = \Delta t'_{(i)} - t'_{(i-1)}, i \geq 1 \quad (2)$$

将故障数据和右截尾数据按增序排列,其中截尾数据后面加上符号“+”,会出现三种情况:

- (1)  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ ;
- (2)  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n +$ ;
- (3)  $t_1 \leq t_2 + \leq \dots \leq t_n$ 。

对于情况(1)和情况(2)可以按完全数据进行计算;对于情况(3)可以按照文献[1]介绍的 Johnson 方法确定故障顺序号。本论文数据属于情况(3),所以按照 Johnson 法来确定故障顺序号。按照 Johnson 法,第  $i$  个故障数据的故障顺序号计算式为

$$r_i = r_{(i-1)} + (n+1 - r_{(i-1)}) / (n+2 - j) \quad (3)$$

式中:  $n=23$ ;  $r_0=0$ ;  $j$  为 22 个故障数据加上 1 个截尾数据从小到大的顺序编号,  $1 \leq j \leq 23$ ;  $i$  为 22 个故障数据从小到大的顺序编号,  $1 \leq i \leq 22$ 。

经验分布函数  $F(t)$  用近似中位秩估计。

按照 Johnson 方法计算出数据的可靠性值见表 2。

表 2 数据的可靠性估计

Table 2 Data reliability evaluation

$j$	$i$	$t(i)$	$r(i)$	$F(t)$
1	1	67.56	1	0.029 915
2	2	93.3	2	0.072 65
3	3	135.063	3	0.115 385
4	4	147.6	4	0.158 12
5	5	153.849	5	0.200 855
6	5	176.49+	—	—
7	6	222.42	6.055 556	0.245 964
8	7	233.22	7.111 111	0.291 073
9	8	244.53	8.166 667	0.336 182
10	9	252.296	9.222 222	0.381 292
11	10	314.7	10.277 78	0.426 401
12	11	399.24	11.333 33	0.471 51
13	12	417.06	12.388 89	0.516 619
14	13	439.44	13.444 44	0.561 728
15	14	459.9	14.5	0.606 838
16	15	522.142	15.555 56	0.651 947
17	16	583.86	16.611 11	0.697 056
18	17	618.6	17.666 67	0.742 165
19	18	651.558	18.722 22	0.787 274
20	19	660.144	19.777 78	0.832 384
21	20	1022.48	20.833 33	0.877 493
22	21	1048.02	21.888 89	0.922 602
23	22	2267.94	22.944 44	0.967 711

注:带“+”号的截尾数据只参与  $i$  和  $r(i)$  的计算。

根据表 1 和式(1),可以计算出故障间隔时间,以故障间隔时间为横坐标,以累积故障率为纵坐标,作出其散点图,如图 2 所示。

由图 2 可知,故障间隔时间的经验分布函数  $F(t)$  为外凸,无拐点,则该数控机床间隔时间所服从的分布不会是正态分布或对数正态分布,而可能是威布尔分布或指数分布。因指数分布是形状参数为 1 的威布尔分布。故本文假设故障数据服从威布尔分布。

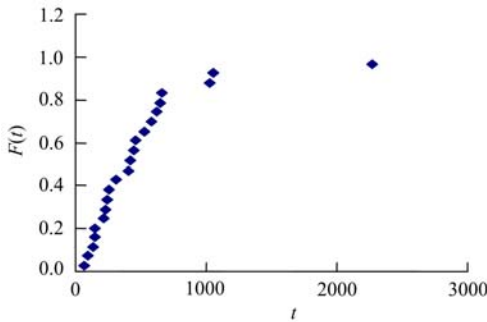


图 2  $F(t)$  散点图

Fig. 2 Scatter graph of  $F(t)$

## 2 三参数威布尔模型的确定

### 2.1 二参数威布尔模型的确定

二参数威布尔分布函数为

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right], t \geq 0 \quad (4)$$

通过采用最小二乘估计和  $d$  检验法,可得出本文故障数据服从尺度参数  $\alpha = 537.1505$ , 形状参数  $\beta = 1.3785$  的威布尔分布,即

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{537.1505}\right)^{1.3785}\right], t \geq 0 \quad (5)$$

### 2.2 三参数威布尔模型的确定

#### 2.2.1 参数估计

三参数威布尔分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} \int_0^t f(t) dt = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)^\beta\right], & t \geq \gamma \\ 0, & t < \gamma \end{cases} \quad (6)$$

对式(6)取两次自然对数后,变为

$$\frac{1}{\beta} \ln \ln [1 - F(t)]^{-1} = \ln(t - \gamma) - \ln(\alpha - \gamma) \quad (7)$$

令  $x = \ln \ln [1 - F(t)]^{-1}$ ,  $y = \ln(t - \gamma)$ ,  $A = \frac{1}{\beta}$ ,

$B = \ln(\alpha - \gamma)$ , 则式(7)可变换为

$$y = Ax + B$$

采用最小二乘法,可以得出其参数估计为

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i\right) / n}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 / n}$$

$$B = \sum_{i=1}^n y_i / n - A \sum_{i=1}^n x_i / n$$

$$\beta = \frac{1}{A}, \alpha = e^B + \hat{\gamma}$$

线性相关系数为

$$\rho = \frac{\left[\sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i\right) / n\right]^2}{\left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 / n\right] \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 / n\right]} \quad (8)$$

根据实际情况和计算需要,取位置参数  $\gamma$  计算精度  $\Delta$  为 1 h,则由文献[7]可知,使用本方法

估计  $\gamma$  的值时,其精度依次为  $l, \frac{2}{3}l, \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}l, \dots$ ,

$\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} l, \dots$ , 且有  $\lim_{i \rightarrow \infty} |\rho(x, y)| = 1$ 。其中长度

$l$  为  $[\gamma_{00}, \gamma_{01}]$ ,  $\gamma_{00} = 0, \gamma_{01} = 67$ , 所以有:  $l = 67$ 。

设经过计算  $k$  步,达到精度为  $\Delta$ , 则有

$$\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} l = \Delta \quad (9)$$

对式(9)进行变换并两边同时取对数,可得

$$k = -\frac{\ln 3 \Delta - \ln 2 l}{\ln 2} + 2$$

经计算取整可得  $k = 7$ 。

(1) 本文取  $\gamma_{00} = 0, \gamma_{01} = 67$  作为  $\gamma$  的两个初始值,用式(8)计算相应的  $x$  与  $y$  的相关系数,经过计算可得  $\rho_{00} = 0.9754, \rho_{01} = 0.9356$ 。

(2) 在区间  $[0, 67]$  中插入两个值 22.3 和 44.6, 将区间三等分,用式(8)计算与插值点相应的  $x$  和  $y$  的相关系数,取  $\gamma_{011} = 0.9356, \gamma_{012} = 44.6$ , 可得  $\rho_{011} = 0.9356, \rho_{012} = 0.9903$ 。

令  $\rho_2 = \max(|\rho_{011}|, |\rho_{012}|) = 0.9903$ , 与  $\rho_2$  相应的值为  $\gamma_{02} = 44.6$ , 用  $\gamma_{02}$  作为  $\gamma$  的二次值,用  $\gamma_{02}^-$ 、 $\gamma_{02}^+$  分别表示  $\gamma_{00}, \gamma_{011}, \gamma_{012}, \gamma_{01}$  中与  $\gamma_{02}$  最接近的左、右两点,可得区间  $[22.3, 67]$ , 且  $\gamma_{03} \in [22.3, 67]$ , 称  $\gamma_{03}$  为  $\gamma$  的二次值。

(3) 在两个区间  $[22.3, 44.6]$  和  $[44.6, 67]$  中插入各区间中点 33.45 和 55.8, 用式(8)计算与插值点相应的  $x$  和  $y$  的相关系数,取  $\gamma_{021} = 33.45, \gamma_{022} = 55.8$ , 可得  $\rho_{021} = 0.9872, \rho_{022} = 0.9904$ 。

令  $\rho_{03} = \max(|\rho_{021}|, |\rho_{022}|, |\rho_{02}|) = 0.9904$ ,  $\rho_{03}$  对应的值为  $\gamma_{03} = 55.8$ , 分别用  $\gamma_{03}^-$ 、 $\gamma_{03}^+$  表示已有分点中与  $\gamma_{03}$  相邻的左右两点, 可得区间  $[44.6, 67]$ , 且  $\gamma_{03} \in [44.6, 67]$ , 称  $\gamma_{03}$  为  $\gamma$  的三次值。

依此类推, 选取  $\rho_{0i}$  最大时对应的  $\gamma_{0i}$ , 所确定的直线对数据点的拟合的情况为最佳,  $\gamma_{0i}$  即为所求位置参数, 即可以取相关系数  $\rho = \max(\gamma_{0i}) = 0.9911$ , 取位置参数的估计值为  $\hat{\gamma} = 50.2$ 。

各参数的计算式为

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i) / n}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2 / n} = 0.9347;$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n y_i / n - A \sum_{i=1}^n x_i / n}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2 / n} = 6.0956;$$

$$\beta = \frac{1}{A} = \frac{1}{0.9347} = 1.0698;$$

$$\alpha = e^B + \hat{\gamma} = e^{6.0956} + 50.2 = 494.0805.$$

故障数据服从形状参数  $\beta = 1.0698$ , 尺度参数  $\alpha = 494.0805$ , 位置参数  $\gamma = 50.2$  的威布尔分布。

### 2.2.2 假设检验

对所推导的数控机床故障时间分布函数进行  $d$  检验 (K-S 检验)。

$D_n$  的观察值为  $D_n = 0.1090$ , 取显著性水平  $\alpha = 0.10$ ,  $D_{n,\alpha} = \frac{1.22}{\sqrt{22}} = 0.2601$ 。

由于  $D_n < D_{n,\alpha}$ , 因此接受原假设, 即认为该产品故障时间服从三参数威布尔分布。

由以上分析可得, 该系列数控机床故障时间的概率密度函数  $f(t)$  和分布函数  $F(t)$  分别为

$$f(t) = \frac{1.0698}{494.0805 - 50.2} \left( \frac{t - 50.2}{494.0805 - 50.2} \right)^{0.0698} \cdot \exp \left[ - \left( \frac{t - 50.2}{494.0805 - 50.2} \right)^{1.0698} \right] = \frac{1.0698}{444.0805} \left( \frac{t - 50.2}{444.0805} \right)^{0.0698} \exp \left[ - \left( \frac{t - 50.2}{444.0805} \right)^{1.0698} \right]$$

$$F(t) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t - 50.2}{444.0805} \right)^{1.0698} \right]$$

## 3 结 论

(1) 采用故障总时间法对故障数据进行预处理, 考虑了截尾时间, 使分析符合实际。

(2) 由二参数威布尔分布模型和三参数威布

尔分布模型可以看出, 由于引入位置参数, 形状参数明显变小, 基本上接近于 1, 说明数控机床处于偶然故障期。由于故障发生是随机的, 故可以采用故障监测维修或定期维修方式进行维修。

(3) 根据位置参数, 可以合理制定早期故障排除试验时间。

### 参 考 文 献:

- [1] 蒋仁言, 左明健. 可靠性模型与应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 1999.
- [2] 张英芝, 申桂香, 贾亚洲. 数控车床故障分布规律及可靠性[J]. 农业机械学报, 2006, 37(1): 156-159. Zhang Ying-zhi, Shen Gui-xiang, Jia Ya-zhou. Research on the disciplinarian and reliability of failure distribution of CNC lathe[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery, 2006, 37(1): 156-159.
- [3] 王金武, 刘家福, 许仲祥. 履带式拖拉机可靠性与维修性的分析[J]. 农业机械学报, 2004, 4: 81-83. Wang Jin-wu, Liu Jia-fu, Xu Zhong-xiang. Statistical analysis study on reliability and maintainability of caterpillar tractor[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2004, 4: 81-83.
- [4] 方志强, 高连华. 三参数威布尔分布在寿命分析中的参数估计[J]. 装甲兵工程学院学报, 1999, 13(1): 70-74. Fang Zhi-qiang, Gao Lian-hua. Estimation of parameters of three-parameter Weibull distribution in life analysis[J]. Journal of Armored Force Engineering Institute, 1999, 13(1): 70-74.
- [5] 王秉刚. 汽车可靠性工程方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 1991: 32-35.
- [6] 王金武, 衣淑娟, 张兆国. 履带拖拉机可靠性分析中故障规律的研究[J]. 农业工程学报, 2001, 17(2): 104-106. Wang Jin-wu, Yi Shu-juan, Zhang Zhao-guo. Trouble rules of reliability analysis of caterpillar tractor[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2001, 17(2): 104-106.
- [7] 杨志忠, 刘瑞元. 三参数 Weibull 分布参数估计法改进[J]. 工程数学学报, 2004(2): 281-284. Yang Zhi-zhong, Liu Rui-yuan. Improved methods of the parameter estimating of 3-parameter Weibull distribution[J]. Journal of Engineering Mathematics, 2004(2): 281-284.