

三角形网格多面体空间四边界区域的数据参数化

冀世军, 王 扬, 吕汉明

(哈尔滨工业大学 机械制造及其自动化系, 哈尔滨 150001)

摘 要:分析了三角网格多面体四边界区域数据参数化的基本方法,提出了在三角网格多面体四边界区域划分基础上进行四边界区域数据快速参数化的新技术。通过坐标变换、点面投影把空间四边界区域的数据参数化难题转化为平面四边界区域网格划分问题,并提出了由折线边构成平面四边界区域的双向伸缩网格生成技术,解决了反求工程中复杂曲面分片四边界区域的数据采集困难问题,为后继的多片四边界区域的 NURBS 曲面的拼接和拟合提供了技术保证。

关键词:机械制造自动化;空间四边界区域;网格划分;NURBS 曲面;坐标变换

中图分类号:TP391.72 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-5497(2009)02-0458-05

Parametrization of 3-D four-sided region on triangular mesh model

Ji Shi-jun, WANG Yang, LÜ Han-ming

(Department of Mechanical Manufacturing and Automation, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: Basic methods of parametrization of the 3-D four-sided region on the triangular mesh were analyzed, and a new method of fast parametrization of the 3-D four-sided region data was proposed based on the segmentation of the 3-D four-sided region on the triangular mesh model. By the coordinate transform and the projection of the points into a plane, the difficult parametrization in a 3-D four-sided region is changed into a grid generation problem in a planar four-sided region. A bidirectional flexible grid generation algorithm to form the planar four-sided region by the broken line sides was suggested to deal with the difficult data acquisition problem in the segmented 3-D four-sided region of the complex curved surface in the reverse engineering. A strong technical support was provided for merging and fitting several NURBS surfaces of the multi-piece 3-D four-sided regions.

Key words: mechanical manufacture and automation; 3-D four-sided region; grid generation; NURBS surface; coordinate transform

四边界区域参数化研究的经典理论主要有:有限元网格划分法(FDMs)和计算流体力学法(CFD)^[1-2],拉普拉斯和泊松求解法^[3-4],调和影射法和多分辨率法^[5]。这些方法存在数学模型复杂难以求解、运算量大效率低、对四边界区域边界有参数连续性要求和保凸性要求的不足。目前,

CAD/CAGD 领域的新算法包括映射到基平面参数化法^[6]、温度场法^[7]、非线性适应法^[8]、多项式样条法^[9]等。映射到基平面法的主要局限性在于初始基平面选取比较困难,迭代过程收敛性不能保证;温度场法的不足在于计算效率低、对于带孔表面不能参数化;非线性适应法的缺陷是计算公

收稿日期:2007-08-25.

基金项目:国家自然科学基金项目(50675053).

作者简介:冀世军(1978-),男,博士研究生.研究方向:反求工程,单片机应用. E-mail: jishijun97@126.com

通信作者:王扬(1960-),男,教授,博士生导师.研究方向:特种加工及特殊材料加工. E-mail: wyyh@hit.edu.cn

式复杂、迭代求解效率低;多项式样条法只能在平面上进行网格划分、且对一对边有限制。

本文提出的空间四边区域参数化技术是通过坐标变换、点面投影把原始三角网格模型上的四边界区域参数化问题转化为平面四边区域网格划分问题,并提出了平面四边区域双向伸缩网格生成技术来解决网格划分问题。

1 分片四边区域网格参数化理论

1.1 线段外一点到线段上的映射

线段外的一点到线段上的映射关系如图 1 所示,根据矢量的叉积和点积公式可得线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 外一点 P_3 到线段上的映射点 P_x ,计算公式为

$$|P_1P_x| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_3}|}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \quad (1)$$

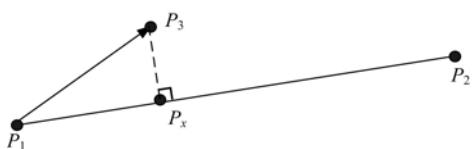


图 1 线段外一点到线段上的映射

Fig. 1 Point outside a line project to the line

1.2 空间任意向量到与 Z 轴平行的几何变换

空间任一向量 $u(a, b, c)$ 经两次旋转(先绕 x 轴旋转 $R_x(\alpha)$,再绕 y 轴旋转 $R_y(\beta)$)可达与 z 轴平行位置。确定两次旋转变换的旋转角,根据图形成原理可以得到两个角度的正、余弦分别为

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \\ \cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sin \beta = \frac{d}{e} \\ \cos \beta = \frac{-a}{e} \end{cases} \quad (3)$$

式中: $d = \sqrt{b^2 + c^2}$; $e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 。

1.3 四边区域参数化区域映射理论

空间物理四边区域的结构性网格生成的基本要求是在一个具有四边界区域求取网格点,使任意两条同族网格线不相交,且所有生成的网格点在区域内部或边界上,如图 2(a)所示。物理区域与分配网、计算域间具有一一对应关系,见图 2。将分割好的物理区域的边界映射到分配网,利用分配网与计算域的关系计算出物理域网格点。

具体物理域网格点生成的步骤如下。

(1)物理域边界的分割:将物理区域的边界按照所需要的分割份数先进行分割。

(2)物理区域弧长的正规化:如图 3 所示,将物理域的边界用公式

$$r_i = \frac{\sum_{k=1}^i \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}}{\sum_{k=1}^{\max} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}} \quad (4)$$

进行弧长正规化。用正规化点构建分配网格四条边界,如图 2(b)所示。

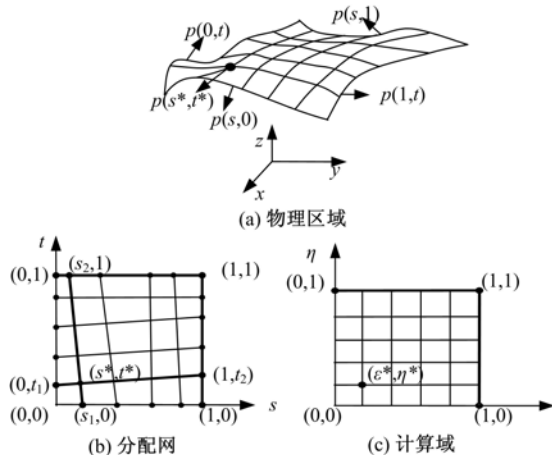


图 2 物理域、分配网和计算域的一一映射关系

Fig. 2 One-to-one map relation of physical domain, distribution mesh and computational domain

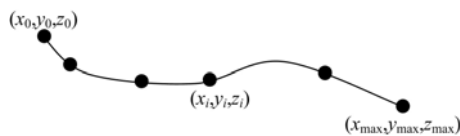


图 3 物理域边界弧长的正规化

Fig. 3 Normalizing arc length of boundary of physical domain

(3)分配网格点:分配网用来定义物理域栅格点的分配情况,将分配网相对边界上的正规化点用直线连接,即可形成分配网。分配网的交点可以通过双线性内插值的方法来求得

$$\begin{cases} s^* = \frac{s_1 + t_1(s_2 - s_1)}{1 - (t_2 - t_1)(s_2 - s_1)} \\ t^* = \frac{t_1 + s_1(t_2 - t_1)}{1 - (t_2 - t_1)(s_2 - s_1)} \end{cases} \quad (5)$$

(4)物理区域内曲线的求取:根据分配网格点的坐标值,配合 Lagrange、Hermite、Bezier、B-Spline 等数学表达式拟合曲线。

2 分片四边区域网格参数化的分析

研究的问题是复杂三角形网格模型的分片拼接拟合,经三角形网格模型划分面片后得到的四边界区域是内部由很多三角形面片、边界由四条折线构成的空间四边区域,如图 4(a)所示。对于这样的四边界区域进行 NURBS 曲面拟合,首先要获得每个四边区域上的 $N \times M$ 个数据点阵(网格参数化),对于图 4(b)所示的四边界区域,有两种方案实现数据参数化:一种方法是先对四条折线边分别进行 NURBS 曲线数据拟合,如图 4(c)所示,然后在边界拟合以后围成的区域内进行数据参数化;另一种方法是直接在由折线段围成的空间四边区域内进行参数化。前一种方法通过四边区域的边界拟合可以得到参数连续的四边区域,但是拟合以后的四边区域包含的三角面片发生了变化,导致工作量增加,处理速度降低,而且在参数化时必须利用数学模型复杂、运算效率低的经典算法。为此,本文采用了直接在由折线段围成的空间四边区域内进行参数化的方法,这种四边区域处理的难点在于:围成四边区域的四条边界不是参数连续的、四边区域是非保凸的,所以现有的算法对其无能为力。本文提出的快速参数化算法实现了由折线段围成四边区域的快速参数化。

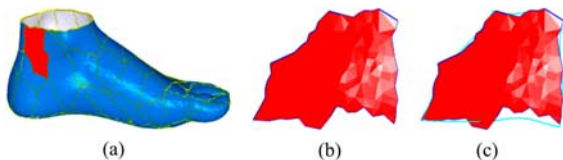


图 4 三角形网格模型上的四边界区域

Fig. 4 Four-sided region on the triangular mesh

3 分片四边区域网格参数化的实现

3.1 四边区域参数化步骤

本文提出的参数化思想是原始三角网格模型上的四边界区域通过一系列的坐标变换、点面投影和平面四边区域网格划分来完成的,具体步骤如下。

(1) 求四边界区域内三角形面片平均法向量 \vec{n}_j

$$\vec{n}_j = \frac{\sum_{i=0}^{N_j} \vec{n}_{i,j}}{\left\| \sum_{i=0}^{N_j} \vec{n}_{i,j} \right\|} \quad (6)$$

式中: \vec{n}_j 为第 j 个四边区域的平均法向量; N_j 为第 j 个四边区域内三角面片的数量; $\vec{n}_{i,j}$ 为第 j 个

四边区域第 i 三角片的法向量。

(2) 根据坐标变换使平均法向量与坐标 z 轴平行,把四边区域内点面数据进行相同变换,变换矩阵为

$$V_2 = R_y(\beta)R_x(\alpha)V_0 \quad (7)$$

式中: $R_x(\alpha)$ 为从 x 轴正向看使平均法矢量顺时针绕 x 轴旋转达到与 xoy 平面平行的旋转角; $R_y(\beta)$ 为从 y 轴正向看使平均法矢量顺时针绕 y 轴旋转达到与 zoy 平面平行的旋转角。

将旋转角 α 和 β 代入坐标变换方程可得

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{e} & -\frac{ab}{de} & -\frac{ac}{de} & 0 \\ 0 & \frac{c}{d} & -\frac{b}{d} & 0 \\ \frac{a}{e} & \frac{b}{e} & \frac{c}{e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

(3) 把旋转后的四边界区域的边界投影到基准平面 z 值为零的 xoy 平面上,取 z 值为零, x 和 y 坐标为不变即可。

(4) 根据平面四边区域双向伸缩网格生成算法进行网格划分(本文后面详述)。图 5 为一平面网格划分结果。

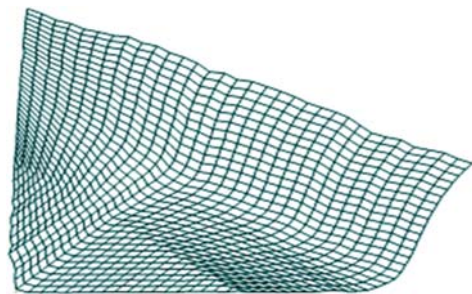


图 5 平面四边区域双向伸缩网格生成

Fig. 5 Bidirectional flexible grid generation on a plane

(5) 如图 6 所示,将基平面生成的网格点反投影到由第二步旋转后所得的空间四边区域内相应的三角面片,即可完成在投影后三角网格面上数据参数化。

(6) 将第(5)步得到的在旋转后三角网格模型上采集的数据变换为原始空间四边区域,复位矩阵为

$$V_0 = R_y^{-1}(\beta)R_x^{-1}(\alpha)V_2 = R_y(-\beta)R_x(-\alpha)V_2 \quad (9)$$

通过上述 6 个步骤的操作即可实现数据快速参数化。

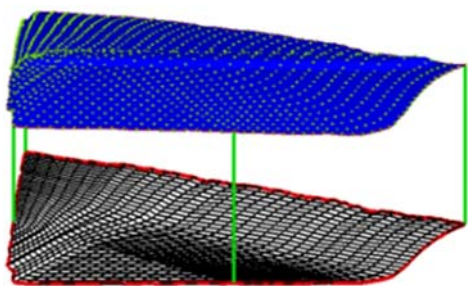


图 6 由基平面网格点影射得到空间区域网格点

Fig. 6 Grid points obtained on spatial surface by projection

3.2 平面四边区域网格生成算法的限制条件

生成平面四边区域网格的基本限制条件有三条:第一,原始空间四边区域向其基平面投影时必须具有一一对应关系,不能有重叠情况,如图 7(a)是投影有重叠的情况;第二,投影到基平面的平面四边区域的 4 个顶点顺次连接组成的平面四边区域必须是凸四边形,如图 7(b)是非凸四边形的情形;第三,折线边不具有回折的,如图 7(c)的最外面一条边是回折的。

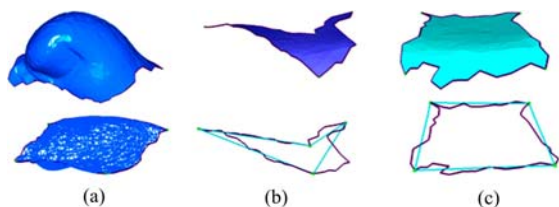


图 7 投影到基平面不能进行网格划分的三种情况

Fig. 7 Three cases not generating grid on base plane

3.3 平面四边区域双向伸缩网格生成算法

设 ${}^{AB}\eta_i$ 为在直线段 AB 上的第 i 个分割点到 A 点的比例因子,则其计算式为

$${}^{AB}\eta_i = \frac{{}^{AB}L_i}{L_{AB}} \quad (10)$$

式中: ${}^{AB}L_i$ 为在直线段 AB 上的第 i 个分割点到 A 点的距离; L_{AB} 为直线段 AB 的长度。

第 j 行第 i 列的控制顶点 $P_{j,i}$ 为

$$P_{j,i} = (1 - \eta_{j,i})P_{0,i} + \eta_{j,i}P_{M,i} \quad (11)$$

式中的 $\overrightarrow{P_{0,i}P_{j,i}}$ 段的长度比例系数 $\eta_{j,i}$ 用双向线性差值的方法来确定,即

$$\eta_{j,i} = \frac{{}^{AD}\eta_j + {}^{AB}\eta_i({}^{BC}\eta_j - {}^{AD}\eta_j)}{1 - ({}^{BC}\eta_j - {}^{AB}\eta_i)({}^{BC}\eta_j - {}^{AD}\eta_j)} \quad (12)$$

平面四边区域双向伸缩网格生成算法的关键步骤为:①根据弦长等分原则分割构成原始空间四边区域的每条空间折线边。②根据空间四边区域投影到基平面上得到的平面四边区域可得到两

组相对边,如图 8(a)一组对边 ac ,另一组 bd 。③首先取任意一组对边 bd ,连接每组对边的每条折线边的起始点和终止点,形成一组新的对应直线边 BC 和 DA ;把在空间四边区域上等分所得的分割点投影到基平面上的点映射到构建的对应直线 BC 和 DA 上,然后根据式(1)和式(12)求取第 i 个分割点在新的对应直线边上的比例因子,如图 8(b)所示;取出另外一组对边 a 和 c ,连接折线边上对应分割点则形成了互不相交的 $N+1$ 条直线,如图 8(c)所示。④求取第 j 行第 i 列的控制顶点 $P_{j,i}$,如图 8(d)所示,控制顶点 $P_{j,i}$ 可以由前面横向连接两条边界控制顶点 $P_{0,i}$ 、 $P_{M,i}$ 确定(见式(11))。初始设置包括划分网格的行列数量设置,按照求取 $P_{j,i}$ 的公式获得平面四边区域内每条横向连接线(v 线)上的每个网格点,把得到的所有内部点沿着纵向依次连接可以得到如图 8(e)所示的栅格。⑤确定现有的纵向两端折线边(d 和 b 折线边)上的等分点在图 8(e)网格中的位置,如果折线上的分割点在纵向两端直线边的外面,则延伸相应顶点至其位置;如果折线上的分割点在纵向两端直线边的里面,则压缩内部网格点使纵向折线边上的分隔点成为新的网格点。最后,在纵向按照比例分割因子重新分割纵向每条折线以获得分配网格点,得到的最终结果如图 8(f)所示。

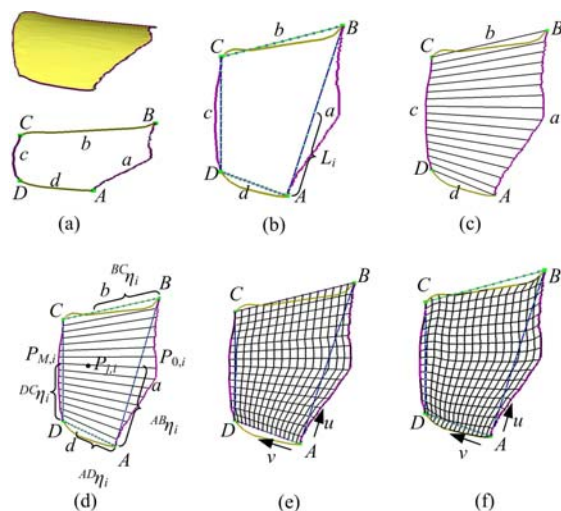


图 8 平面四边区域的网格划分过程

Fig. 8 Process of grid generation of four-sided region on a plane

3.4 平面四边区域双向伸缩网格划分结果

图 9 是折线边构成平面四边区域的网格划分结果。可以看出,双向伸缩网格生成算法对有很

大凹度边界的四边区域和具有凸边界和尖角的四边区域都可以完成划分。与多项式样条法^[9]相比,本文算法对四边区域的边界限制没有很严格的要求,因此算法有很强的网格划分能力。表 1 是在 1.8 GHz CPU、512 MB 内存计算机上运行本文算法得到的耗时统计,与多次 Newton 迭代为基础的非线性适应法^[8]相比,本文算法的速度更快,效率更高。

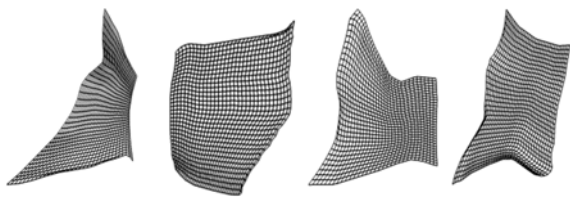


图 9 平面四边区域网格划分结果

Fig. 9 Grid generation result of four-sided region on plane

表 1 三角网格模型上空间四边区域参数化耗时统计

Table 1 Statistic about consuming time of parametrization

处理模型名称	顶点数量/个	三角面片数/个	四边面片数/个	每片采样数量/个	网格划分/ms	
					平面	空间
带孔件	43 715	87 327	109	16×16	281	2 250
弯头	30 366	59 417	97	20×20	313	2 780
model	5 145	10 286	51	32×32	375	1 360

4 空间四边区域的参数化结果分析

图 10 给出了三角形网格模型上四边区域的参数化结果,图 10(a)是对一个带孔开曲面零件的参数化,图 10(b)是对两端开口弯头的参数化,图 10(c)是对封闭模型的参数化结果。由表 1 可知,与温度场法^[7]相比,本文的三角网格模型参数化法能够对拓扑结构更复杂的三角形网格模型进行参数化,且效率更高(温度场法把一个面片参数化为 20×20 网格用时最少 1 s,而用本文参数化法用时不到 0.1 s)。

5 结束语

通过分析三角网格模型上四边区域参数化的两种方案,选择直接在由折线围成的空间四边区域内进行参数化的方法进行参数化。通过坐标变换、点面投影把空间四边区域的数据参数化问题转化为平面四边区域网格划分问题,并提出平面四边区域双向网格伸缩划分算法,以快速实现四边区域参数化。本文的空间三角网格模型上的四

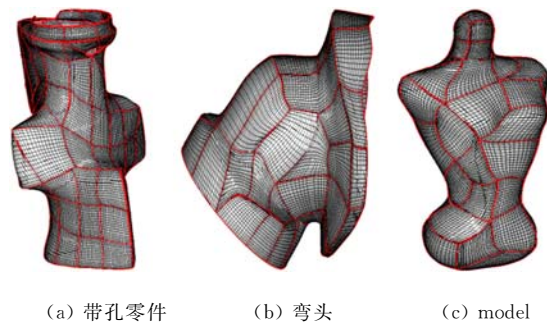


图 10 三角网格模型上的四边区域的参数化结果

Fig. 10 Results of parametrization on some triangular meshes

边区域参数化技术对四边区域边界没有参数连续性要求,可以划分复杂拓扑结构的三角网格模型且效率很高,为分片三角形网格模型的拼接和拟合提供了有力的技术保证。

参考文献:

- [1] Floater M S. Parameterization and smooth approximation of surface triangulations[J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 1(14):231-250.
- [2] Floater M S. Parametric tilings and scattered data approximation[J]. International Journal of Shape Modeling, 1998,1(4):165-182.
- [3] Floater M S, Hormann K. Parameterization of Triangulations and Unorganized Points [M]. USA: Springer, 2002.
- [4] Lévy B, Mallet J L. Non-distorted texture mapping for sheared triangulated meshes[C]//SIGGRAPH 98 Conference Proceedings, New York, USA, 1998.
- [5] Hormann K, Labsik U, Greiner G. Remeshing triangulated surfaces with optimal parameterizations [J]. Computer-Aided Design, 2001,33(11): 779-788.
- [6] Piegl L A, Tiller W. Parameterization for surface fitting in reverse engineering[J]. Computer-Aided Design, 2001,33(8):593-603.
- [7] Lin Hong-wei, Wang Guo-jin, Liu Li-gang, et al. Parameterization for fitting triangular mesh [J]. Progress in Natural Science, 2006, 16 (11): 1214-1221.
- [8] Chacon L, Lapenta G. A fully implicit, nonlinear adaptive grid strategy[J]. Journal of Computational Physics, 2006,212(2):703-717.
- [9] Souza B A, Matos E M, Furlan L T, et al. A simple two-dimensional method for orthogonal and non-orthogonal grid generation [J]. Computers and Chemical Engineering, 2007,31(7):800-807.