

## 由单变量受扰观测序列估计非线性系统重影轨迹

张政伟 樊养余 王结太  
(西北工业大学电子信息学院 西安 710072)

**摘要:** 同宿切面和同宿截面的存在使得非双曲线型非线性系统重影轨迹的估计变得十分困难。该文在充分挖掘非线性系统本身特性的基础上,提出了一种估计非双曲线型非线性系统重影轨迹的新方法。不同于以往算法,该方法首先计算受扰序列的局部稳定流和不稳定流方向,进而确定同宿切面存在的位置,很大程度上降低了同宿切面对算法性能的影响,并可精确确定重影轨迹的长度;也不同于现有文献忽视同宿截面对算法性能影响的做法,该文研究得出同宿截面点间的最小距离和干扰噪声幅度二者间的关系,首次定量地估计了同宿截面点可能对算法造成的影响,这无疑对其它算法也将是一个有益的启示。

**关键词:** 非双曲线型非线性系统; 轨迹重影; 局部稳定流; 同宿切面; 同宿截面

中图分类号: TP271

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)02-0371-04

## Estimation of Shadowing Trajectory of the Nonlinear System from a Noisy Scalar Series

Zhang Zheng-wei Fan Yang-yu Wang Jie-tai

(School of Electronics and Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** The presence of homoclinic tangencies and homoclinic intersection makes it very difficult, sometimes even impossible, to estimate the shadowing trajectory of the non-hyperbolic nonlinear system. A new algorithm for shadowing the non-hyperbolic nonlinear system is presented in this paper, which is geometrical in nature and tries to exploit the properties of the chaotic systems. Different from former methods, this method computes the stable and unstable manifolds of the noisy trajectory firstly, and then the locations of the homoclinic tangencies are determined. Thus the effects of the homoclinic tangencies on the algorithm can be decreased to a great extent, and the length of the shadowing trajectories are estimated by the locations of these homoclinic tangencies. Also different from those methods which take it as granted that the mechanism of failure of shadowing algorithms is related with the homoclinic tangencies only, experiments in this paper demonstrate a quantitative relation between the minimal distance of homoclinic intersections and the amplitude of noise. Thus the probability that the algorithm converges to the true trajectory can be boosted efficiently, and without any doubts, this strategy can be as a heuristic approach to other methods.

**Key words:** Non-hyperbolic nonlinear system; Shadowing trajectory; Local stable manifolds; Homoclinic tangencies; Homoclinic intersection

### 1 引言

所谓非线性系统的轨迹重影,就是由某受扰序列寻找一条与该序列在某种意义上非常接近(或是该受扰序列的原始轨迹)的系统真实轨迹。这对非线性系统辨识、参数估计及其模型选取都具有十分重要的理论和现实意义<sup>[1]</sup>。由于混沌系统对初始值和系统参数的极端敏感性及非线性序列所拥有的类噪声宽频谱特性都使得常规的去噪和滤波算法难以奏效<sup>[2]</sup>,因为常规去噪并不能得到系统的一条真实轨迹,而滤波将会改变原非线性序列的固有特性。所有这些都使这一问题变得复杂而难以实现。

对受动力噪声污染的序列而言, Hammel 等<sup>[3]</sup>认为尚不能确定是否能找到此类序列的一个重影轨迹。对仅受观测噪声影响的序列而言, Bowen<sup>[4]</sup>首先给出了此类问题的一个解,随后 Grebogi 等<sup>[5]</sup>证明可以找到这样一条系统真轨迹,此结论在文献[6]中进一步得到验证,但上述方法却要求系统不能有同宿切面,故其仅适用于双曲线型非线性系统。然而目前所研究的绝大多数非线性系统却都具有非双曲线特性。Farmer<sup>[7]</sup>指出在允许系统动力参数有较小波动的情况下,上述的修正方法可以适用于非双曲线情形,然而当非线性系统处于混沌状态时,该方法本身为求解一个可能坏条件数的矩阵方程将不得不耗费大量的计算时间和存储空间。Walker<sup>[8]</sup>等在用 Grebogi 的方法估计非双曲线型非线性系统的重影轨迹时,却没有考虑到系统同宿截面的影响,而这也是导致他

们算法失败的原因之一。最近颇受重视的最陡下降算法<sup>[9,10]</sup>虽有较好的收敛性能,并可不受同宿切面的影响,但在收敛步长不是最优的情形下,和其它算法相比却有着极低的收敛速度。Grassberger<sup>[11]</sup>的算法目前被认为是解决非双曲线型非线性系统轨迹重影问题的最好办法,但同时它也是最难以实现的。旨在改善上述方法的种种不足,本文充分利用非线性系统本身的固有特性,在沿着稳定流和不稳定流两个方向分解受扰序列估计误差的基础上,首次结合同宿截面的影响给出了一种解决非双曲线型非线性系统轨迹重影问题的新途径。

## 2 算法设计

### 2.1 基本问题描述

给定动力系统  $f$  及其如式(1)所示的一个  $N$  点受扰观测序列

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n + \boldsymbol{\eta}_n, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

式中  $\mathbf{x}_n$  为受扰前原序列。根据 Takens 嵌入理论<sup>[12]</sup>重建该受扰序列的吸引子,可得相空间内该系统的其它状态变量值,以组成状态矢量  $\mathbf{y}_n$ , 并假设矢量  $\mathbf{x}_n$  为  $\mathbf{y}_n$  的受扰前状态矢量。对每一个  $n = 2, 3, \dots, N-1$ , 要求  $\mathbf{y}_n$  满足  $\|\mathbf{f}(\mathbf{y}_{n-1}) - \mathbf{y}_n\| < \delta$ , 主要用来限制式(1)中随机噪声  $\boldsymbol{\eta}_n$  的幅度,因为当非线性系统处于混沌态时,任意小的偏差在正的 Lyapunov 指数的作用下都将使系统轨迹与原始轨迹以指数规律快速分离,演化轨迹有可能完全脱离系统吸引子而不含任何系统信息,此时所有的轨迹重影算法都将变得毫无意义,且当系统独立状态变量和相关变量都有误差时,处理不当还将带来所谓的变量误差问题<sup>[13]</sup>。故  $\delta$  或噪声  $\boldsymbol{\eta}_n$  的方差只可取非常小的值,通常认为小幅度的干扰噪声不会改变序列的定性特性<sup>[7]</sup>。现在的目的就是要寻找一条系统的真实轨迹  $\mathbf{p}_n (n = 1, 2, \dots, N)$ , 即满足  $\mathbf{f}(\mathbf{p}_{n-1}) = \mathbf{p}_n$ , 且  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{p}_n\| < \varepsilon$ , 即要求重影轨迹与原始轨迹非常靠近。若  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{p}_n\| = 0$  在机器精度内成立,则可认为重影轨迹即为原轨迹序列本身。然而Grebogi<sup>[5]</sup>已经证明对双曲线型非线性系统而言重影轨迹不仅存在而且可以无限长,但对非双曲线型非线性系统而言这是不可能的。一般来讲,只能找到非双曲线型非线性系统受扰序列的部分重影轨迹。

耗散型非线性系统,特别是混沌系统拥有丰富的尚没有被充分利用的动力学特性,其正的 Lyapunov 指数意味着存在向外的张力,称之为不稳定流,而负的 Lyapunov 指数意味着收缩力,则形成稳定流。此处将受扰序列每一点处的局部稳定流与局部不稳定流合称为“局部帧”。对双曲线型系统而言,稳定流与不稳定流间的夹角始终远大于零,即永不会平行。将非双曲线型系统稳定流与不稳定流平行的点称为同宿切面点(homoclinic tangencies),两者间夹角接近零的点称为准同宿切面点(near homoclinic tangencies)。在所有的准同宿切面点中,若通过该点的不稳定流和稳定流还有其它

交点,则该点及其它交点称为同宿截面点(homoclinic intersection)。对有限长序列而言,完全意义上的同宿切面点一般是不会出现的。一般认为,正是由于同宿切面的存在而使得非双曲线型非线性系统的轨迹重影变得难以实现,而重影轨迹的长度受限于同宿切面点出现的位置。然而本文研究却发现算法的失败不仅与准同宿切面点有关,与同宿交面点间的距离也存有密不可分的关系。为此,能否最大程度的降低同宿切面和同宿截面对算法的影响已成为衡量一个算法性能好坏的重要标准。

### 2.2 问题的解决办法

对于给定的受扰序列  $\mathbf{y}_n$  (该序列中每个元素均为由系统状态变量所组成的矢量,下同),其单步动力映射误差为

$$\boldsymbol{\Pi}_n = \mathbf{f}(\mathbf{y}_{n-1}) - \mathbf{y}_n \quad (2)$$

重影序列与受扰序列的误差为

$$\boldsymbol{\varphi}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n \quad (3)$$

由于  $\mathbf{x}_n$  非常靠近  $\mathbf{y}_n$ , 可将  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  在  $\mathbf{y}_n$  点处进行一阶(仿真结果表明在一阶展开下已可达机器精度)泰勒展开

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \approx \mathbf{f}(\mathbf{y}_n) + \mathbf{L}_n(\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n) \quad (4)$$

其中  $\mathbf{L}_n$  为  $\mathbf{f}$  在  $\mathbf{y}_n$  点的 Jacobian 矩阵。将式(2),式(3)代入式(4)(注意  $\mathbf{x}_n$  是系统的一条真实轨迹,即满足  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}) = \mathbf{x}_n$ )经简单计算可得

$$\boldsymbol{\varphi}_n = \mathbf{L}_{n-1}\boldsymbol{\varphi}_{n-1} + \boldsymbol{\Pi}_n \quad (5)$$

由文献[5]可知,  $\mathbf{y}_n$  点处的局部稳定方向  $\mathbf{u}_n$  和不稳定方向  $\mathbf{s}_n$  分别平行于容器平行四边形的扩张边和收缩边,任给单位矢量  $\mathbf{u}_0$ , 由下式迭代可得  $\mathbf{u}_n$

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{L}_{n-1}\mathbf{u}_{j-1} / \|\mathbf{L}_{n-1}\mathbf{u}_{j-1}\| \quad (6)$$

任给单位矢量  $\mathbf{s}_N$ , 由逆矩阵  $(\mathbf{L}_{n-1})^{-1}$  经下式逆向迭代可得  $\mathbf{s}_n$

$$\mathbf{s}_j = \mathbf{L}_{n-1}\mathbf{s}_{j-1} / \|\mathbf{L}_{n-1}\mathbf{s}_{j-1}\| \quad (7)$$

现将每一个  $\boldsymbol{\varphi}_n$  和  $\boldsymbol{\Pi}_n$  分别沿局部帧  $\{\mathbf{u}_n, \mathbf{s}_n\}$  分解为

$$\boldsymbol{\varphi}_n = \alpha_n \mathbf{u}_n + \beta_n \mathbf{s}_n \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\Pi}_n = \eta_n \mathbf{u}_n + \xi_n \mathbf{s}_n \quad (9)$$

其中系数  $\eta_n$  和  $\xi_n$  很容易由矩阵方程式(9)求得。为求得  $\alpha_n$  和  $\beta_n$ , 将式(6),式(7)-式(9)代入式(5)(注意式(8)和式(5)的关系)可得

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\alpha_{n+1} - \eta_{n+1}}{\|\mathbf{L}_n \mathbf{u}_n\|}, & \alpha_N &= 0 \\ \beta_n &= \beta_{n-1} \|\mathbf{L}_{n-1} \mathbf{s}_{n-1}\| + \xi_{n-1}, & \beta_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

这样对每个  $\mathbf{y}_n$ , 可由式(8)求得相应的  $\boldsymbol{\varphi}_n$ , 进而由式(3)求得  $\mathbf{x}_n$ 。本算法可迭代至重影误差不再有明显改变为止。

## 3 算法的性能分析

被广泛研究的非双曲线型非线性系统 Hénon 映射的动力学可由下式确定

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1 - ax_1^2 + x_2 \\ x_2 &= bx_1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(11)中  $a = 1.4$ ,  $b = 0.3$  时系统处于混沌状态。以  $(x_1(0),$

$x_2(0) = (0.63, 0.19)$  为初始值，可得到  $x_1$  的一个点数为 1000 的观测序列，对该序列施以 0 均值标准差为 1% (序列  $x_1$  的标准差) 的高斯白噪声，并分别对原序列和受扰序列以嵌入维 2 时间延迟 1 重构其吸引子，分别如图 1 和图 2 所示。

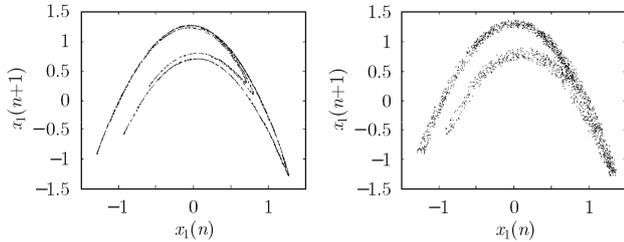


图 1 原序列的嵌入相空间      图 2 受扰序列的嵌入相空间

由式(6)，式(7)可以绘出此时系统的局部帧如图 3 所示，其中稳定流与不稳定流间的夹角小于  $15^\circ$  的点的局部帧以长线绘出。将本文算法作用于上述序列后所得重影轨迹如图 4 所示。

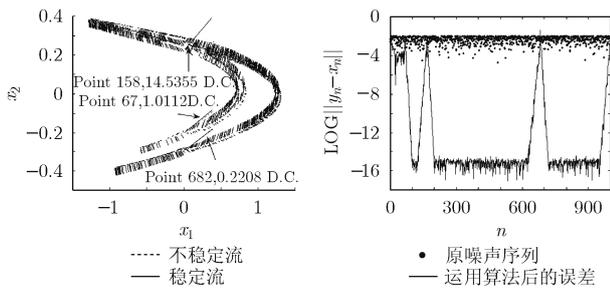


图 3 稳定流与不稳定流      图 4 算法迭代 3 次后的轨迹重影误差

从图 4 可以看出，在区间  $[102, 123]$ 、 $[201, 622]$ 、 $[717, 951]$  内，重影轨迹在机器精度内趋于系统真实轨迹。由图 3 可以看出，完全意义上的同宿切面并没有出现，否则由式(8)，式(9)可知，算法将在同宿切面点处停止运行。截止目前尚无人发现 Hénon 系统理论上的同宿切面点，尽管它是一定存在的(其它系统，如 Ikeda 系统，Oseledec<sup>[14]</sup>已经找到)。而系统的准同宿切面点位于 67, 158, 682 等 3 点处，在图 4 相应点处的较小范围内出现 3 个波峰。这是由于系统的稳定流  $s_n$  与不稳定流  $u_n$  趋于平行时，导致系统的局部帧是奇异的或坏条件的，此时由式(8)，式(9)所得系数是毫无意义的，算法在这些点处不但失效(不等于停止)，有时还使重影轨迹更加远离系统真实轨迹，如图 4 中的第 682 点。而在系统的双曲线区域，算法成功收敛于系统的真实轨迹。经简单计算，3 个波峰的左边平均斜率分别为：0.4176, 0.4401, 0.4349，大致为系统正的 Lyapunov 指数，而波峰的右边平均斜率大致为系统负的 Lyapunov 指数，与文献[7]所得结果非常相似，这进一步印证了该方法的有效性。此时所得结论是准同宿切面点间误差大致为  $10^{-16}$  的估计序列可作为受扰序列的

部分重影轨迹，其长度可由准同宿切面点间的距离大致确定。从系统方程及算法本身可以看出，该算法对序列前两个点和最后一个点肯定是无效的，因为前面两个点只用到了后向序列的信息，而最后一点只用到了前向序列的信息。故在估计结果的两端总会出现波峰，这也是所有非线性序列轨迹重影算法和去噪算法的共性。

#### 4 同宿截面点间距离对算法的影响

试验发现对上述  $x_n$  序列，当噪声不同时，唯有第 682 点左右序列的估计结果出现了较大的差别，其余点的估计结果仍如图 4 所示。图 5 给出了第 682 点左右 10 个点在 20 种不同干扰噪声下的误差分布。有趣的是，图 5 中第 682 点处的估计结果清晰地被分为上下两部分，且这两部分间的平均距离与噪声均值差十分接近。注意图 5 为对数坐标，同样的误差被放缩的程度不同，其实上下两部分有着大致相同的形状。第 682 点的估计结果及其稳定流与不稳定流示于图 6 之中。

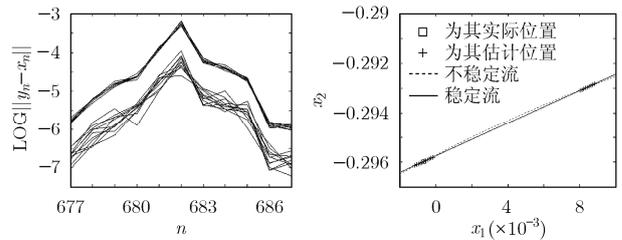


图 5 第 682 点左右 11 点的估计结果      图 6 第 682 点的估计结果

从图 6 可以看出，此时第 682 点为同宿截面点。这两个同宿截面点间的距离为 0.0095，和噪声的均值差 0.01 十分接近。这样该算法选择通过哪一点完全由该点的噪声幅度决定，或者说仅仅依据噪声的幅度，算法无法判断其中哪一点为系统的真实轨迹点。由于通过该点的噪声是随机的，故算法几乎以均等的概率通过其中每一点。仿真中 20 条噪声序列，其中 11 条通过系统真实点，另外 9 条则选择了另一个同宿截面点。试验表明当噪声的均值差降至 0.005 时，上述现象不复存在，算法选择错误同宿截面点的概率已变得非常小，几乎可以忽略不计。由此可知，由于同宿切面点和同宿截面点的出现，仅当噪声水平小于系统同宿截面点距离的最小值时算法才是真正有效的，因此即便是不受系统同宿切面影响的算法，当噪声水平相当于或大于系统同宿截面点间距离的最小值时，算法至少在这些点处是无效的，这或许就是 Grebogi<sup>[5]</sup>和 Walker<sup>[8]</sup>方法在某些点处失败的原因。故为寻找非双曲线型非线性系统的重影轨迹，需要噪声的均值差小于同宿截面点间距离的最小值。因此若事先比较噪声的均值差与系统同宿截面点间距离最小值两者间的关系，即可确定算法可成功应用的范围。由于同宿截面点间距离的最小值一般都都非常小，所以由受较大幅度噪声干扰的序列估计系统的

重影轨迹或去噪一般是不可实现的, 现有文献只是单纯地将这一现象归因于非线性系统对初值的极端敏感性, 本文却量化地给出了新的解释。

## 5 结束语

本文在充分挖掘非线性系统本身特性的基础上, 提出了一种估计非双曲线型非线性系统重影轨迹的新方法。该方法在成功估计出系统部分重影轨迹的同时, 还定性地分析了同宿切面对算法的影响, 得出了同宿截面间的距离和干扰噪声幅度二者间的关系, 定量地估计了同宿截面点可能对算法造成的影响, 为同类算法提供了新的启发点。很显然, 本文方法也可作为同类序列的去噪算法, 但不适用于线性受扰序列和没有正 Lyapunov 指数的非线性受扰序列的去噪。

David<sup>[9]</sup>, Grassberger<sup>[11]</sup>等人提出若结合吸引子的曲率 (curvature) 特性设计算法, 可能会大大降低同宿切面和同宿截面影响, 但目前尚没有见到此类算法的出现, 这将是作者进一步研究的方向, 另外, 如何在系统模型未知的情形下估计非线性系统的重影轨迹也是非常值得研究的课题。

## 参考文献

- [1] Brian A C, Hüseyin K, and Kenneth J P. Shadowing orbits of ordinary differential equations [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1994, 52(1-3): 35-43.
  - [2] Eric J K and Thomas S. Noise reduction in chaotic time-series data : A survey of common methods [J]. *Phys. Rev. E*, 1993, 48(3): 1752-1763.
  - [3] Grebogi C, Hammel S M, and Yorke A J. Do numerical orbits of chaotic dynamical process represent true orbits [J]. *J Complexity*, 1987, 3(2): 136-145.
  - [4] Bowen R.  $\omega$ -limit sets for axiom A diffeomorphisms [J]. *J Diff. Eqs.*, 1975, 18(2): 333-339.
  - [5] Grebogi C, Hammel S M, Yorke J A, and Sauer T. Shadowing of physical trajectories in chaotic dynamics: containment and refinement [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, 65(13): 1527-1530.
  - [6] Sauer T and Yorke J A. Rigorous verification of trajectories for the computer simulation of dynamical systems [J]. *Nonlinearity*, 1991, 4(3): 961-979.
  - [7] Farmer J D and Sidorowich J J. Optimal shadowing and noise reduction [J]. *Physica D*, 1991, 47(3): 373-392.
  - [8] Walker D M and Mees A I. Noise reduction of chaotic systems by Kalman filtering and by shadowing [J]. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 1997, 7(3): 769-779.
  - [9] Davies M. Noise reduction by gradient descent [J]. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 1992, 3(1): 113-118.
  - [10] David R and Kevin J. Convergence properties of gradient descent noise reduction [J]. *Physical D*, 2002, 165(1-2): 26-47.
  - [11] Grassberger P, Hegger R, Kantz H, Schaffrath C, and Schreiber T. On noise reduction methods for chaotic data [J]. *Chaos*, 1993, 3(2): 127-141.
  - [12] Takens F. Detecting Strange Attractors In Fluid Turbulence. in : *Dynamical Systems and Turbulence* [M]. edited by Rand D and Young L S, Berlin, Springer, 1981: 365-381.
  - [13] Voss H U, Timmer J, and Kurths J. Nonlinear dynamical dystem identification from uncertain and indirect measurements [J]. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 2004, 14(6): 1905-1933.
  - [14] Oseledec V I. A multiplicative ergodic theorem : Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems [J]. *Trans. on Moscow Math. Soc.*, 1968, 19: 197-221.
- 张政伟: 男, 1975年生, 博士生, 研究方向为非线性系统特性分析、非线性系统辨识及其轨迹重影等。
- 樊养余: 男, 1960年生, 教授, 博士生导师, 博士后, 主要从事强噪声中信号检测与恢复、信息安全、目标识别等方面的研究。
- 王结太: 男, 1982年生, 博士生, 研究方向为非线性理论及在传感器网络中的应用等。