

浮体に作用する波漂流力の定常成分について (第3報)

正員 坪郷 尚*

The Drift Force Acting on a Floating Body in Waves(3rd report)

by Takashi Tsubogo, Member

Summary

The previous research provided reciprocal forms to calculate mean wave drift forces of a freely floating body. The reciprocal form in the near field consists of the gradient of velocity potential and its normal derivative on the body surface. In this paper the scheme to calculate the gradient of velocity potential and its normal derivative based on the constant panel method is shown. Then numerical examples and comparison of wave drift forces by Maruo's and Newman's far field method, Pinkster's near field method and present reciprocal form are shown.

1. 緒言

前報¹⁾では運動量定理を用いて、浮体に働く定常波漂流力 $\overline{F}_j, j = 1(\text{surge}), 2(\text{sway}), 6(\text{yaw})$ の相反的表示を導いた。

$$\overline{F}_j = \frac{\rho}{2} \iint_{S_\infty} \left\{ \overline{\frac{\partial \nabla_j \Phi}{\partial n}} \Phi - \nabla_j \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} dS \quad (1)$$

$$= \frac{\rho g \zeta_0^2}{4K} Re \iint_{S_\infty} \left\{ \frac{\partial \nabla_j \varphi^*}{\partial n} \varphi - \nabla_j \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS \quad (2)$$

$$= \frac{\rho g \zeta_0^2}{4K} Re \iint_{S_B} \left\{ \nabla_j \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \nabla_j \varphi^*}{\partial n} \varphi \right\} dS \quad (3)$$

$$j = 1, 2, 6$$

ここで Φ は速度ポテンシャルであり、 φ は以下のように規格化している。

$$\Phi = Re \left[\frac{g \zeta_0}{i\omega} \varphi(x, y, z) e^{-i\omega t} \right] \quad (4)$$

ω は入射波の円振動数、 K は無限水深での波数、 ζ_0 は入射波の振幅、overline は時間平均を、* は複素共役を表し、単位法線ベクトル \mathbf{n} の向きは流体から外向き、浮体の内部方向を正としている (Fig. 1)。また、

$$n_6 \equiv xn_2 - yn_1 \quad (5)$$

に対応して以下のように ∇_6 を定義している。

$$\nabla_6 \equiv x\nabla_2 - y\nabla_1 \quad (6)$$

本報告では実際に式 (3) の数値計算を行い、far field theory^{2, 3)} による数値計算結果および near field theory^{4, 5)} による数値計算結果と比較し、その数値的検証を行う。

2. 数値計算方法

空間固定の座標系 $o-xyz$ は、静止時の浮体浮面心位置を原点 o 、静止水面上に $x(=x_1)$ 軸と $y(=x_2)$ 軸、鉛直上方に $z(=x_3)$ 軸、となるように設定する (Fig. 1)。浮体を剛体、流体を非回転非圧縮の理想流体とし、水深は十分深いとする。また無限遠方の円筒検査面を S_∞ 、浮体浸水表面を S_B とする。

数値計算はコンスタント・パネルを用いた Green 関数法により行う。Green 関数は、線形自由表面条件および遠方での波の放

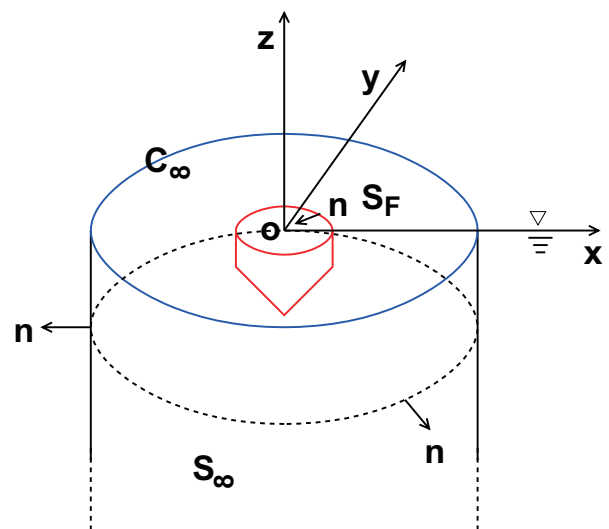


Fig. 1 Coordinate system, control surface and unit normal vector

* 大阪府立大学大学院工学研究科

射条件を満足する以下の $G(P, Q)$ を用いる.

$$G(P, Q) = \frac{1}{4\pi r} + \frac{1}{4\pi r_1} + G_W \quad (7)$$

$$G_W = \left\{ iH_0^{(1)}(KR) - \frac{1}{\pi} \int_{Kz_1}^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\sqrt{\xi^2 + (KR)^2}} d\xi \right\} \frac{K}{2} e^{Kz_1} \quad (8)$$

$$R = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} \quad (9)$$

$$r = \sqrt{R^2 + (z_Q - z_P)^2} \quad (10)$$

$$r_1 = \sqrt{R^2 + (z_Q + z_P)^2} \quad (11)$$

$$z_1 = z_Q + z_P \quad (12)$$

ここで, $H_0^{(1)}$ は第1種0次の Hankel 関数である. 主要解 $1/4\pi r$ と鏡像解 $1/4\pi r_1$ およびこれらの微係数に関するパネル上の面積分は, パネル周辺上の線積分に直した後, 各辺で DE 公式 (Double Exponential 変換後, 台形積分の分割数に対する漸化式を用いて数値積分) を用いて数値積分を行う. G_W とこの微係数に関するパネル上の面積分は, パネル中心での被積分関数値にパネル面積を掛けることで近似する. G_W に現れる積分項は積分区間を $\int_{Kz_1}^{\infty} = \int_{Kz_1}^0 + \int_0^{\infty}$ のように分割し, それぞれの区間で DE 公式を用いて数値積分を行う. ここで積分上限値 ∞ は被積分関数の値が十分小さくなる値 37 に設定した.

2.1 φ on \bar{S}_B

浮体浸水表面上の φ の値は Green の公式に基づく以下の境界積分方程式を解くことによって求めることができる.

$$\varphi_D(P) + \iint_{\bar{S}_B} \varphi_D(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} dS_Q = \varphi_0(P) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \varphi_j(P) + \iint_{\bar{S}_B} \varphi_j(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} dS_Q \\ = K \iint_{\bar{S}_B} G(P, Q) n_j dS_Q \end{aligned} \quad (14)$$

ここで, 式 (13)(14) の左辺に現れる主要解 (Rankine source) の積分は以下のように点 P を流体側から物体境界へ移動させる極限として評価する⁶⁾.

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{S}_B} \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{1}{4\pi r} dS_Q \\ = -\frac{\varphi(P)}{2} + \iint_{\bar{S}_B} \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{1}{4\pi r} dS_Q \end{aligned} \quad (15)$$

また, $\varphi_D = \varphi_0 + \varphi_7$ は diffractin wave, $\varphi_j, j = 1, 2, \dots, 6$ は各運動モードに対応する radiation wave, φ_0 は進行角 χ の入射波を表す.

$$\varphi_0 = e^{i(K \cos \chi)x + i(K \sin \chi)y + Kz} \quad (16)$$

2.2 $\nabla \varphi$ on \bar{S}_B

パネル上の流速を計算するときに, コンスタント・パネルでは内挿関数を要素内パラメタで微分するなどの操作が行えないので, 以下のように湧き出し分布法を用いる. まず, 速度ポテンシャル φ を入射波 φ_0 と入射波以外の発散波成分 φ_r に分解する.

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_r \quad (17)$$

$$\varphi_r = \sum_{j=1}^7 \varphi_j \quad (18)$$

発散波成分 φ_r は浮体浸水表面上の湧き出し密度 σ を用いて

$$\varphi_r(P) = \iint_{\bar{S}_B} \sigma(Q) G(P, Q) dS_Q \quad (19)$$

のように表すことができるが, 浮体浸水表面上の φ の値は前節により既知であるので, 式 (19) を解くことにより湧き出し密度 σ を求めることができる. 湧き出し密度 σ が求まれば浸水表面上の流速を計算することができる⁷⁾.

$$\nabla \varphi_r(P) = \iint_{\bar{S}_B} \sigma(Q) \nabla G(P, Q) dS_Q \quad (20)$$

参考までに右辺に現れる主要解の勾配の積分法を付録 A に示す. 浸水表面上の流速 $\nabla \varphi_r$ が求まれば浸水表面上の $\boldsymbol{x} \times \nabla \varphi_r$ は容易に計算できる.

2.3 $\frac{\partial}{\partial n_Q} \nabla \varphi$ on \bar{S}_B

浮体浸水表面上の $\nabla_j \varphi_r, j = 1, 2, 6$ の値が求まれば, 浮体浸水表面上の $\frac{\partial}{\partial n_Q} \nabla_j \varphi_r, j = 1, 2, 6$ の値は以下の境界積分方程式を解くことによって求めることができる.

$$\begin{aligned} \nabla_j \varphi_r(P) + \iint_{\bar{S}_B} \nabla_j \varphi_r(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} dS_Q \\ = \iint_{\bar{S}_B} G(P, Q) \frac{\partial \nabla_j \varphi_r(Q)}{\partial n_Q} dS_Q \end{aligned} \quad (21)$$

$$j = 1, 2, 6$$

ここで, 自由表面上の積分が消えることと, S_∞ 上の積分も以下の関係より消えることを用いている.

$$\frac{\partial}{\partial R} \nabla_j = \nabla_j \frac{\partial}{\partial R}, \quad R \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, 6 \quad (22)$$

また式 (21) の左辺の積分に現れる主要解の部分は以下のように評価する.

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{S}_B} \nabla_j \varphi_r(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{1}{4\pi r} dS_Q \\ = -\frac{\nabla_j \varphi_r(P)}{2} + \iint_{\bar{S}_B} \nabla_j \varphi_r(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{1}{4\pi r} dS_Q \end{aligned} \quad (23)$$

$$j = 1, 2, 6$$

入射波 φ_0 は既知であるので, 式 (3) の全ての項を計算できることになる.

3. 数値計算例

計算対象浮体は長さ $2a$, 幅 $2b$, 喫水 c の半没楕円体である.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z \leq 0 \quad (24)$$

ここで $a = 1.0[\text{m}]$, $b = 0.5[\text{m}]$, $c = 0.4[\text{m}]$ で, 重心高さは $z_G = 0$, \bar{x} 軸周りの慣性モーメント I_{11} は $\sqrt{I_{11}/\rho V} = 0.2861[\text{m}]$, \bar{y} 軸周りの慣性モーメント I_{22} は $\sqrt{I_{22}/\rho V} = 0.4812[\text{m}]$, \bar{z} 軸周りの慣性モーメント I_{33} は $\sqrt{I_{33}/\rho V} = 0.4994[\text{m}]$ としている. ここで V は静止時の排水体積であるが,

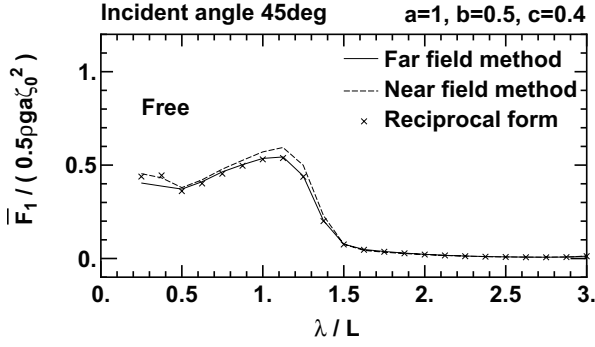


Fig. 2 Mean surge drift forces of freely floating body by far field method, near field method and reciprocal form.

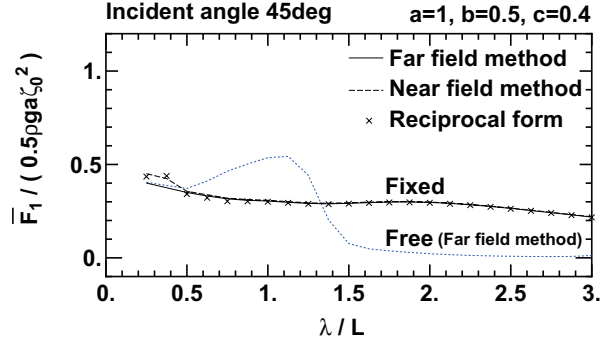


Fig. 5 Mean surge drift forces of fixed body by far field method, near field method and reciprocal form.

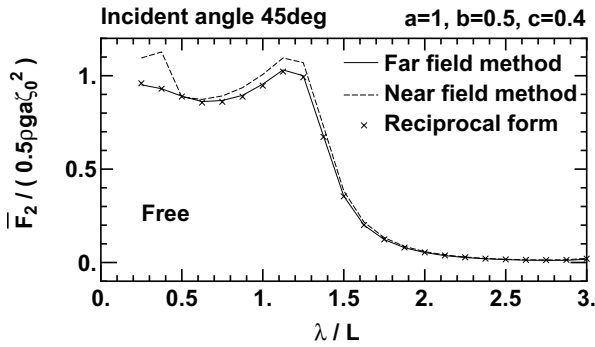


Fig. 3 Mean sway drift forces of freely floating body by far field method, near field method and reciprocal form.

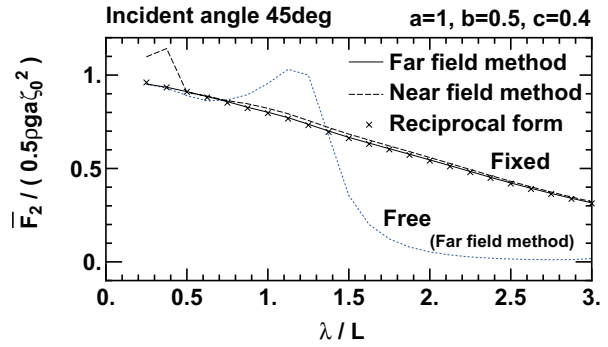


Fig. 6 Mean sway drift forces of fixed body by far field method, near field method and reciprocal form.

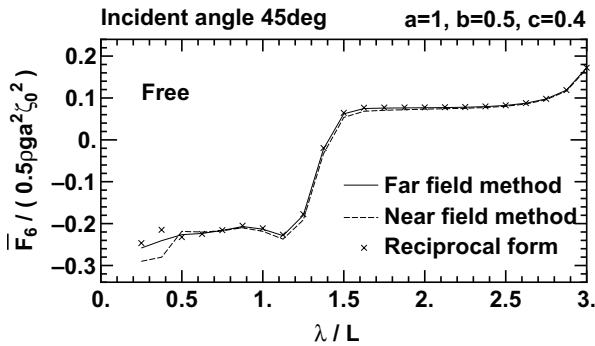


Fig. 4 Mean yaw drift moments of freely floating body by far field method, near field method and reciprocal form.

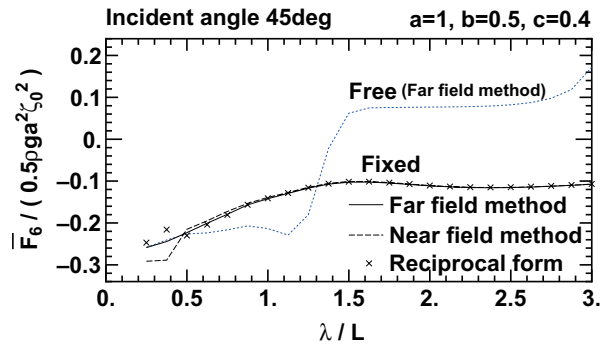


Fig. 7 Mean yaw drift moments of fixed body by far field method, near field method and reciprocal form.

正解値 $0.4189[m^3](= 2\pi abc/3)$ ではなくパネルデータから算出される値 $0.4178[m^3]$ を用いている。入射波の進行角は $\chi = \pi/4$ と固定し、周波数を変えて計算を行った。なお浮体浸水表面のパネル数は、全ての周波数に対して $80(\text{経度}) \times 20(\text{緯度}) = 1600$ パネルで計算を行った。

まず自由浮体に対する波漂流力の計算結果を Figs. 2-4 に示す。ここで横軸に現れる L は $L = 2a$ で λ は $\lambda = 2\pi/K$ である。また縦軸の ζ_0 は入射波の振幅を表す。実線は Maruo の式²⁾ あるいは Newman の式³⁾ による計算結果で、破線は付録 B に示す near field method (式 (44) と (51) の時間平均) による計算結果である。× 印が式 (3) による計算結果である。相反的な表示 (3) による計算結果が、Maruo の式や Newman の式による計算結果に概ね一致していることが確認できる。

次に浮体を固定した場合 (diffraction) の計算結果を Figs. 5-7 に示す。Figs. 4 と 7 を比べると $\lambda/L \geq 0.5$ の範囲では 3 つの方法による結果が良く一致しているため浮体運動の影響は少ないのではないかと考えられる。しかし、Figs. 2 と 3 では $0.6 \leq \lambda/L \leq 1.3$ において near field method による結果が他のものより大きい。相対水位影響を計算するためには waterline 上の速度ポテンシャルの値が必要となるが、本計算では付録 B に示すように、この値を $\varphi(Q)/e^{Kz_Q}$ で近似している。ここで、 Q は waterline を含むパネルの中心点である。Near field method による結果が他のものより大きいのは、この近似があまり正確ではないことが考えられる。パネル数を増やして、評価点 Q をより水面に近くした場合の結果を Fig. 8 に示す。Near field method による結果が far field method のものに近づいているのが確認できる。

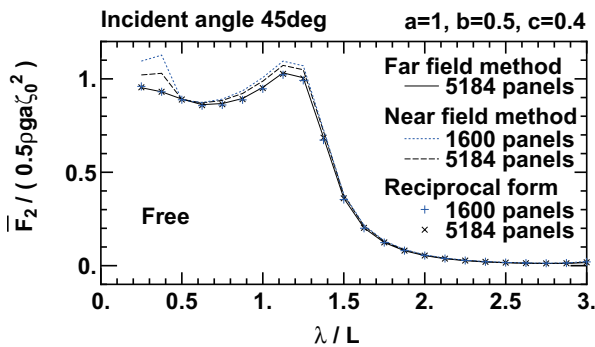


Fig. 8 Effect of the number of panels on mean sway drift forces.

Figs. 2-7 において $\lambda/L \leq 0.4$ において 3 つの方法による結果が異なるのは、入射波長に対し、パネル分割数が十分ではないことが考えられるが、5184 パネル以上の分割数では計算を行っていないので正確なことはわからない。

今回数値計算を行った範囲では、提案式 (3) は数値的にも十分正しいといえる。しかし、相反表示 (3) では surge, sway, yaw の波漂流力の定常成分しか計算できない上、浮体表面上での流速の法線方向微分値まで必要となるため、実用的な計算法とは言えないと思われる。

4. 結 論

本論文では、前報で定式的に示した定常波漂流力の相反的な表示 (3) に対する、数値的な検証を行った。今回計算を行った範囲

では、提案式による計算結果と Maruo の公式や Newman の公式で計算した結果は概ね一致した。

しかし、相反的な表示では surge, sway, yaw の波漂流力の定常成分しか計算できない上、浮体表面上での流速の法線方向微分値まで必要となるため、実用計算法としては向かないと考える。

参 考 文 献

- 1) 坪郷尚 (2007) 浮体に作用する波漂流力の定常成分について (第 2 報), 日本船舶海洋工学会論文集, 6, pp. 347-350.
- 2) Maruo, H. (1960) The Drift of a Body Floating on Waves, J. Ship Res., Vol. 4, pp. 1-10.
- 3) Newman, J. N. (1967) The Drift Force and Moment on Ships in Waves, J. Ship Res., Vol. 11, No. 1, pp. 51-60.
- 4) Pinkster, J. A. (1980) Low frequency second order wave exciting forces on floating structures, PhD thesis, TU Delft.
- 5) Lee, C.-H. (1995) WAMIT theory manual, Report No. 95-2, MIT, pp 20-26.
- 6) Newman, J. N. (1993) Notes on bodies or panels in the free surface, Appendices in WAMIT theory manual(1995), pp 1-6.
- 7) Lee, C.-H. and Newman, J. N. (2004) Computation of wave effects using the panel method, Numerical models in fluid-structure interaction (Editor S. Chakrabarti), WIT Press, Southhampton.
- 8) Newman, J. N. (1977) Marine Hydrodynamics, Cambridge MIT Press, pp. 290-294.

付 録

A. $\nabla \frac{1}{r}$ のパネル上での積分

主要解の勾配のパネル上積分値を \mathbf{I} とおく。

$$4\pi\mathbf{I} = \iint_{\Delta S} \nabla_P \frac{1}{r} dS_Q = \iint_{\Delta S} \frac{\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P}{r^3} dS_Q \quad (25)$$

ここで ΔS はパネルの面積 (領域) を表す。点 P から ΔS を

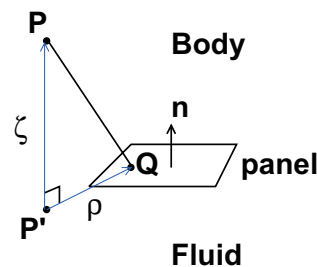


Fig. 9 Local coordinate system in panel.

含む平面に下ろした垂線の、平面との交点を P' とする (Fig. 9). P' を原点とする局所デカルト座標系 (ξ, η, ζ) を導入し, P' を原点とする円筒座標系 (ρ, θ, ζ) を導入する. ζ の正の方向はパネルの法線ベクトル \mathbf{n} と一致している (物体方向に向いている) とする. また ρ, ξ, η に対する基底ベクトル $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta$ には以下の関係があるとする.

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\xi = \cos \theta \quad (26)$$

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\eta = \sin \theta \quad (27)$$

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\xi \cos \theta + \mathbf{e}_\eta \sin \theta \quad (28)$$

式 (25) 中の $\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P$ は以下のように表現できる.

$$\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q} \quad (29)$$

ここで,

$$\overrightarrow{PP'} = -\overrightarrow{P'P} = -\zeta \mathbf{n} \quad (30)$$

$$\overrightarrow{P'Q} = \rho \mathbf{e}_\rho \quad (31)$$

であり, また式 (28) の関係を用いると $\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P$ は以下のように表現できる.

$$\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P = \rho \cos \theta \mathbf{e}_\xi + \rho \sin \theta \mathbf{e}_\eta - \zeta \mathbf{n} \quad (32)$$

\mathbf{I} は局所デカルト座標系の基底 $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{n}$ を用いると以下のように表現できる.

$$\mathbf{I} = (\mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_\xi) \mathbf{e}_\xi + (\mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_\eta) \mathbf{e}_\eta + (\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (33)$$

\mathbf{I} を空間固定のデカルト座標で表すと以下ようになる.

$$\begin{Bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{Bmatrix} = (\mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_\xi) \begin{Bmatrix} (\mathbf{e}_\xi)_x \\ (\mathbf{e}_\xi)_y \\ (\mathbf{e}_\xi)_z \end{Bmatrix} + (\mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_\eta) \begin{Bmatrix} (\mathbf{e}_\eta)_x \\ (\mathbf{e}_\eta)_y \\ (\mathbf{e}_\eta)_z \end{Bmatrix} + (\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}) \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (34)$$

係数 $\mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_\xi, \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_\eta, \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}$ は式 (32) を式 (25) に代入し, 以下のように計算する. ($\cos \theta$ の定義は $\cos \theta = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_\rho$ であるが, 仮に各辺上で θ, \mathbf{e}_ξ を定義したとしても結果は同じになる.)

A.1 $\zeta \neq 0$ のとき

まず P' がパネルの外にあるとして,

$$\begin{aligned} 4\pi \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_\xi &= \iint_{\Delta S} \frac{\rho \cos \theta}{r^3} dS \\ &= \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \int_{\rho_{in}(\theta)}^{\rho_{out}(\theta)} \frac{\rho^2 \cos \theta}{(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2})^3} d\rho d\theta \\ &= \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} d\theta \cdot \cos \theta \left[\frac{-\rho}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} + \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2} + \rho}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2} - \rho} \right]_{\rho_{in}(\theta)}^{\rho_{out}(\theta)} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} &= \oint d\theta \cdot \cos \theta \left\{ \frac{-\rho(\theta)}{\sqrt{\rho(\theta)^2 + \zeta^2}} \right. \\ &\quad \left. + \log \left(\sqrt{\rho(\theta)^2 + \zeta^2} + \rho(\theta) \right) - \log |\zeta| \right\} \end{aligned} \quad (36)$$

ここで $\oint d\theta \cdot \cos \theta \times \text{const.} = 0$ なので式 (36) の最後の項は落としても良いが, 残すことにより, 点 P' がパネル辺上にあるとき (あるいは非常に近いとき) にも適用可能となる. P' を含む辺上での積分はゼロとし, それ以外の辺上では式 (36) により数値積分を行う. 点 P' がパネル内にある場合は式 (35) で $\rho_{in} = 0$ の場合だから結局式 (36) となる.

$\mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_\eta$ は式 (36) 中の $\cos \theta$ が $\sin \theta$ に置き換わるだけである.

$\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}$ については以下のように計算する.

$$\begin{aligned} 4\pi \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} &= \iint_{\Delta S} \frac{-\zeta}{r^3} dS = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} d\theta \cdot \left[\frac{\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} \right]_{\rho_{in}(\theta)}^{\rho_{out}(\theta)} \\ &= \begin{cases} \oint d\theta \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{\rho(\theta)^2 + \zeta^2}} & P' \text{ out of } \Delta S \\ \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{\rho(\theta)^2 + \zeta^2}} - \theta_c \frac{\zeta}{|\zeta|} & P' \text{ on } \partial \Delta S \\ \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{\rho(\theta)^2 + \zeta^2}} - 2\pi \frac{\zeta}{|\zeta|} & P' \text{ in } \Delta S \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

ここで θ_c は P' が辺上にあるとき π , パネル頂点にあるときはその内角を表す. また $\partial \Delta S$ はパネル周辺を表している.

A.2 $\zeta \rightarrow 0 - \epsilon$ のとき

式 (36) において $\log |\zeta|$ を落とした式で極限 $\zeta \rightarrow 0$ をとり,

$$4\pi \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_\xi = \oint d\theta \cdot \cos \theta \cdot \log \rho(\theta) \quad (38)$$

より計算できる. ただし, 点 P がパネル辺上にあるときは式 (38) では計算できない. しかし, パネル中心での速度ポテンシャルの勾配を求める場合には P がパネル辺上にくることはないののでさしずめ式 (38) で事足りる.

式 (37) において ζ を流体側 ($\zeta \leq 0$) からゼロに近づけると以下ようになる.

$$4\pi \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} 0 & P \text{ out of } \Delta S \\ \theta_c & P \text{ on } \partial \Delta S \\ 2\pi & P \text{ in } \Delta S \end{cases} \quad (39)$$

ここでは P 点に関する微分を考えたが, Q 点に関する微分の場合には式 (37) の結果に負号が付く (式 (15)(23)).

さて, 点 P がパネル内にある場合の式 (38) の主値について考える. $\rho(\theta) = \epsilon = \text{const.}$ とすると積分結果はゼロになる. その意味で Lee ら⁷⁾ は以下の表現を用いていると思われる.

$$\iint_{S_B} \sigma(Q) \nabla \frac{1}{4\pi r} dS_Q = \frac{\sigma(P)}{2} \mathbf{n} + \iint_{S_B} \sigma(Q) \nabla \frac{1}{4\pi r} dS_Q \quad (40)$$

点 P がパネル内のパネル中心以外の場所にあるとき式 (38) で数値計算を行うと結果はゼロとならない. ただし点 P がパネル中心にあるときには確かにゼロになる.

以上は 1 つのパネルをさらに $N \times N$ 分割し, 分割された微小パネル各々で式 (25) を Gauss 積分した結果と比較することにより, 確認を行っている。

$\nabla \frac{1}{r_1}$ についてはパネル (頂点) の z 座標を $-z_Q$ と置き換えることにより上記アルゴリズムで数値積分できる。

B. Near field method による波力の表示

Near field theory による 1 次速度ポテンシャルの 2 乗で構成される波力 $\mathbf{F}_q^{(2)}$, $\mathbf{M}_q^{(2)}$ の表示式を以下に示す。ただし, 浮体の回転中心は浮面心としている⁸⁾。

自由浮体に作用する, 自重を含む外力 \mathbf{F} は以下のように表すことができる。

$$\mathbf{F} = \iint_{S_B} p \mathbf{n} dS - \rho g \nabla e_3 \quad (41)$$

$$= \mathbf{F}^{(1)} + \mathbf{F}_q^{(2)} + \dots \quad (42)$$

$$\mathbf{F}^{(1)} = -\rho \iint_{S_B} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \mathbf{n} dS - \rho g A_w \xi_3 \mathbf{e}_3 \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_q^{(2)} = & \frac{1}{2} \rho g \oint_{C_w} \zeta_r^2 \frac{\mathbf{n}}{\sqrt{1-\bar{n}_3^2}} ds + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{F}^{(1)} \\ & - \rho \iint_{S_B} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + (\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\alpha} \times \bar{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} \mathbf{n} dS \quad (44) \end{aligned}$$

$$\zeta_r = \zeta^{(1)} - \Delta Z \quad (45)$$

$$\zeta^{(1)} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (46)$$

$$\Delta Z = \xi_3 + \alpha_1 \bar{y} - \alpha_2 \bar{x} \quad (47)$$

ここで, $\boldsymbol{\xi}$ は移動する浮面心の変位ベクトル (並進成分), $\boldsymbol{\alpha}$ は浮面心周りの回転を表すベクトル (回転成分), ∇ は浮体の排水体積, A_w は水線面積, C_w は waterline である。

空間固定の原点 o 周りの, 自重影響を含むモーメント \mathbf{M} は以下のように表すことができる。

$$\mathbf{M} = \iint_{S_B} p \mathbf{x} \times \mathbf{n} dS - \mathbf{x}_G \times \rho g \nabla e_3 \quad (48)$$

$$= \mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{M}_q^{(2)} + \dots \quad (49)$$

$$\mathbf{M}^{(1)} = -\rho \iint_{S_B} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \bar{\mathbf{x}} \times \mathbf{n} dS - \rho g \nabla \begin{Bmatrix} \overline{GM}_x \alpha_1 \\ \overline{GM}_y \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_q^{(2)} = & \frac{1}{2} \rho g \oint_{C_w} \zeta_r^2 \bar{\mathbf{x}} \times \frac{\mathbf{n}}{\sqrt{1-\bar{n}_3^2}} ds + \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{F}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{M}^{(1)} \\ & - \rho \iint_{S_B} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + (\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\alpha} \times \bar{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} \bar{\mathbf{x}} \times \mathbf{n} dS \\ & - \rho g \nabla \begin{Bmatrix} \overline{GM}_x \alpha_2 \alpha_3 \\ -\overline{GM}_y \alpha_3 \alpha_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (51) \end{aligned}$$

ここで, \overline{GM}_x と \overline{GM}_y はそれぞれ x 軸, y 軸周りのメタセンタ高さである。

$$\overline{GM}_x = \bar{z}_B - \bar{z}_G + \overline{BM}_x \quad (52)$$

$$\overline{GM}_y = \bar{z}_B - \bar{z}_G + \overline{BM}_y \quad (53)$$

ここで, 添え字の B は浮力中心を表し, 式 (51) では $\bar{x}_B = \bar{x}_G$, $\bar{y}_B = \bar{y}_G$ と以下の関係を用いている。

$$\mathbf{M}^{(0)} = -\rho g \iint_{S_B} \bar{z} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_G) \times \mathbf{n} dS = 0 \quad (54)$$

$$\mathbf{x}_G = \boldsymbol{\xi} + \bar{\mathbf{x}}_G + \boldsymbol{\alpha} \times \bar{\mathbf{x}}_G + \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{x}}_G + \dots \quad (55)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -(\alpha_2^2 + \alpha_3^2)/2 & 0 & 0 \\ \alpha_2 \alpha_1 & -(\alpha_3^2 + \alpha_1^2)/2 & 0 \\ \alpha_3 \alpha_1 & \alpha_3 \alpha_2 & -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)/2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$z = \xi_3 + \bar{z} + \alpha_1 \bar{y} - \alpha_2 \bar{x} + H_{3j} \bar{x}_j + \dots \quad (57)$$

$$H_{3j} \bar{x}_j = H_{31} \bar{x} + H_{32} \bar{y} + H_{33} \bar{z} \quad (58)$$

$$-\rho g \nabla e_3 = \iint_{S_B} \rho g \bar{z} \mathbf{n} dS \quad (59)$$

Figs. 2-8 では式 (44)(51) の時間平均値 $\overline{\mathbf{F}_q^{(2)}}$, $\overline{\mathbf{M}_q^{(2)}}$ を計算している。式 (44) と (51) に現れる線積分では waterline 上の速度ポテンシャルの値が必要となるが, この値を $\varphi(Q)/e^{Kz_Q}$ で近似している。ここで, Q は waterline を含むパネルの中心点である。