

## 应用 WVD 估计 AM-FM 信号的瞬时频率<sup>1</sup>

陈光化 曹家麟 王 健 秦霆镐

(上海大学 机械电子工程与自动化学院 上海 200072)

**摘 要** 该文研究了应用 WVD 谱峰检测估计 AM-FM 信号的瞬时频率的方法及其性能。理论分析表明：对线性调频的 AM-FM 信号，只要其幅度的 WVD 在频率为零处取得最大值在任意时刻都成立，则基于 WVD 谱峰检测得到的瞬时频率估计是无偏的，并给出了估计的方差。仿真实验使用高斯包络的线性调频信号表明：利用 WVD 可以有效地估计 AM-FM 信号的瞬时频率。

**关键词** 瞬时频率，WVD，AM-FM 信号

**中图分类号** TN911.23

### 1 概 述

估计一个非平稳信号的瞬时频率在许多实际的信号处理中是一项重要的工作。B. Boashash 等<sup>[1-4]</sup>系统地阐述了瞬时频率的概念和一些瞬时频率估计的方法，如中心有限差分法，相位建模法，时频分布法等。在这些方法中，非时频方法对被噪声污染的信号显示出很高的方差<sup>[5]</sup>，所以不常应用。时频分布可以在时频二维平面上给出信号的时变频谱。因此，利用时频分布来分析和估计瞬时频率有助于更加深刻地理解瞬时频率的物理意义。事实上，估计瞬时频率是二维时频分布的重要工作之一。在时频分布中使用谱峰检测估计瞬时频率因计算简单而吸引了人们的兴趣。相对于其它时频分布而言，WVD 因有较好的时频聚集性能<sup>[5,6]</sup>，所以常被用来估计瞬时频率。WVD 的定义为

$$W(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t + \frac{\tau}{2})z^*(t - \frac{\tau}{2})e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1)$$

它是双线性乘积核或瞬时自相关函数  $z(t + \tau/2)z^*(t - \tau/2)$  关于时延  $\tau$  的傅里叶变换。

对常数幅度线性调频信号，WVD 在时频平面上是冲激线谱。此时，应用谱峰检测估计的瞬时频率是无偏的。对于其他调频规律的信号，通过选择适当的窗函数，使窗内的频率变化规律近似线性，可以获得无偏估计的效果。Rao 和 Taylor<sup>[3]</sup>分析了 WVD 估计常数幅度的线性调频信号性能指出：对于常数幅度的线性调频信号，在信噪比为中等到较高时，基于 WVD 谱峰检测可以获得准确的瞬时频率估计。

在实际的信号处理中，信号的幅度由于衰落或其它原因而不再保持常数。例如，在移动通信中应用的高斯最小频移键控信号，为了限制带外辐射功率，生成的基带信号为高斯脉冲，而不是一般的矩形波<sup>[7]</sup>。近年来，调幅-调频 (AM-FM) 信号分析在雷达探测系统、通信、语音等领域获得了广泛应用<sup>[5]</sup>。提取频率调制规律是 AM-FM 信号分析的主要任务之一。本文提出使用 WVD 来估计 AM-FM 信号的瞬时频率的方法，并研究了其统计性能。给出了噪声环境中，估计的偏差与方差。仿真实验证明了本方法的有效性。

### 2 应用 WVD 谱峰检测估计 AM-FM 信号的瞬时频率

设 AM-FM 信号模型为

$$z(t) = A(t)e^{j\varphi(t)} \quad (2)$$

<sup>1</sup> 2001-08-14 收到，2001-12-03 改回

如果  $z(t)$  是线性调频, 则  $z(t)$  的 WVD 分布可以表示为

$$\text{WVD}(t, f) = \text{WVD}_A(t, f) *_{f} \delta(f - f_i(t)) = \text{WVD}_A(t, f - f_i(t)) \quad (3)$$

其中  $*_{f}$  表示频域卷积,  $f_i(t)$  为线性调频信号的瞬时频率,  $\text{WVD}(t, f)$  为幅度函数  $A(t)$  的 WVD,  $\delta(f - f_i(t))$  为线性调频信号  $e^{j\varphi(t)}$  的 WVD. 从 (3) 式可以看出, 对  $A(t)$  不为常数的线性调频信号, 其 WVD 不再是冲激线谱, 而是呈山脊状, 聚集于表示瞬时频率变化规律的曲线附近.  $z(t)$  的 WVD 也可以看成是幅度  $A(t)$  的 WVD 在频率上移位  $f_i(t)$  得到, 如果在任意时刻  $t$ , 幅度  $A(t)$  的 WVD 在频率为零处都取得最大值 (关于  $t$  的条件最大值, 即固定  $t$ , 求 WVD 关于  $f$  的最大值), 则线性调频后, 幅度  $A(t)$  的 WVD 在时刻  $t$  的最大值从  $f = 0$  频移至瞬时频率  $f_i$  处, 即瞬时频率曲线与时频分布谱峰重合. 所以, 对于这类信号, 在 WVD 中应用谱峰检测估计的瞬时频率是无偏的. 现把高斯包络加到线性调频信号上:

$$s(t) = (a/\pi)^{1/4} e^{-at^2/2} e^{2\pi j(\beta t^2/2 + f_0 t)} \quad (4)$$

高斯包络的 WVD 为

$$\text{WVD}(t, f) = 2e^{-\alpha t^2 - 2\pi f^2/\alpha} \quad (5)$$

很显然, 在任意时刻  $t$ , 上式在频率  $f = 0$  处均取得最大值  $2e^{-\alpha t^2}$ . 信号  $s(t)$  的 WVD 为

$$\text{WVD}(t, f) = 2e^{-\alpha t^2 - 2\pi(f - \beta t - f_0)^2/\alpha} \quad (6)$$

在 WVD 的最大值处, 其偏导数为零. 在上式中对  $f$  求偏导, 并令偏导数为零, 可求得

$$f(t) = \beta t + f_0 \quad (7)$$

这正是信号的瞬时频率.

### 3 应用 WVD 谱峰检测估计瞬时频率的统计性能

在 AM-FM 信号中加入噪声, 并对其离散化后, 数学模型为

$$z(n) = A(n)e^{j\varphi(n)} + v(n) \quad (8)$$

其中  $v(n)$  是均值为零, 方差为  $\sigma^2$  的高斯白噪声, 则  $z(n)$  的 WVD 的双线性核为

$$\begin{aligned} K(n, m) &= Z(n+m)Z^*(n-m) \\ &= A(n+m)A(n-m)e^{j[\varphi(n+m) - \varphi(n-m)]} + A(n+m)e^{j\varphi(n+m)}v^*(n-m) \\ &\quad + A(n-m)e^{j\varphi(n-m)}v(n+m) + v(n+m)v^*(n-m) \\ &= K_s(n, m) + K_c(n, m) \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $K_c(n, m)$  包括信号与噪声的交叉项和噪声自项, 为

$$\begin{aligned} K_c(n, m) &= A(n+m)v^*(n-m)e^{j\varphi(n+m)} + A(n-m)v(n+m)e^{j\varphi(n-m)} \\ &\quad + v(n+m)v^*(n-m) \end{aligned} \quad (10)$$

这样,  $z(n)$  的离散 WVD 可以表示为

$$\begin{aligned} W_z(n, f) &= 2 \sum_{m=-M}^M K_s(n, m) e^{-j4\pi f m} + 2 \sum_{m=-M}^M K_c(n, m) e^{-j4\pi f m} \\ &= W_s(n, f) + W_c(n, f) \end{aligned} \quad (11)$$

$z(n)$  的 WVD 的峰值满足关系:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial f} |W_z(n, f)|^2 \right] = 0 \quad (12)$$

假设在每一时刻  $n$ , WVD 的谱峰所对应的频率点为  $f_i$ , 则  $f_i$  即为估计的瞬时频率. 在  $f_i$  的邻域内把  $|W_z(n, f)|^2$  展开成泰勒级数为

$$\begin{aligned} |W_z(n, f)|^2 &= |W_z(n, f_i)|^2 + (f - f_i) \left[ \frac{\partial |W_z(n, f)|^2}{\partial f} \right]_{f=f_i} \\ &\quad + \frac{1}{2} (f - f_i)^2 \left[ \frac{\partial^2 |W_z(n, f)|^2}{\partial f^2} \right]_{f=f_i} + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

对  $f$  求导, 忽略二次以上高阶项有

$$\frac{\partial |W_z(n, f)|^2}{\partial f} \approx \left[ \frac{\partial |W_z(n, f)|^2}{\partial f} \right]_{f=f_i} + (f - f_i) \left[ \frac{\partial^2 |W_z(n, f)|^2}{\partial f^2} \right]_{f=f_i} \quad (14)$$

把 (14) 式代入 (12) 式, 得到估计的瞬时频率表达式为

$$f_e \approx f_i - \left[ \frac{\partial |W_z(n, f)|^2}{\partial f} \right]_{f=f_i} / \left[ \frac{\partial^2 |W_z(n, f)|^2}{\partial f^2} \right]_{f=f_i} \quad (15)$$

通过上式, 我们可以求得基于 WVD 谱峰检测估计瞬时频率的偏差与方差为

$$\text{Bias}(f_e) \approx -E \left[ \left[ \frac{\partial |W_z(n, f)|^2}{\partial f} \right]_{f=f_i} / \left[ \frac{\partial^2 |W_z(n, f)|^2}{\partial f^2} \right]_{f=f_i} \right] \quad (16)$$

$$\text{Var}(f_e) = E \left[ \left\{ \left[ \frac{\partial |W_z(n, f)|^2}{\partial f} \right]_{f=f_i} / \left[ \frac{\partial^2 |W_z(n, f)|^2}{\partial f^2} \right]_{f=f_i} \right\}^2 \right] \quad (17)$$

在实际应用中, 相对于相位  $\varphi(t)$  而言, 幅度  $A(t)$  一般变化要缓慢得多. 设在采样时间段内幅度的最大值为  $A$ , 为了简化计算, 不妨假定幅度为常数, 取最大值  $A$ . 这样做是合理的, 因为常数幅度的线性调频信号的 WVD 的谱峰与瞬时频率曲线重合, 而在本文中, 我们已经确定具有时变幅度的线性调频信号的 WVD 在瞬时频率处取得最大值. 根据噪声的性质, 我们可以求得  $K_c(n, m)$  的功率为

$$P_{K_c} = E[K_c(n, m)K_c^*(n, m)] = \sigma^4 + 2A^2\sigma^2 \quad (18)$$

由 (11) 式得

$$\begin{aligned} |W_z(n, f)|^2 &= |W_s(n, f)|^2 + W_s(n, f)W_c^*(n, f) + W_s^*(n, f)W_c(n, f) + |W_c(n, f)|^2 \\ &= |W_s(n, f)|^2 + 2\text{Re}[W_s(n, f)W_c^*(n, f)] + |W_c(n, f)|^2 \end{aligned} \quad (19)$$

在信噪比为中等或较高时, 即  $|W_s(n, f)| \gg |W_c(n, f)|$ , 从而有

$$\frac{\partial^2 |W_z(n, f)|^2}{\partial f^2} \approx \frac{\partial^2 |W_s(n, f)|^2}{\partial f^2} \quad (20)$$

如果相位为线性调频, 幅度近似常数, 则根据 WVD 的定义, 信号的双线性核可以表示成  $K_s(n, m) = A^2 e^{j4\pi f_i m}$  的形式, 从而信号的 WVD 可以表示为

$$W_s(n, f) = 2A^2 \sum_{m=-M}^M e^{-j4\pi(f-f_i)m} \quad (21)$$

这样, 我们可以得到 WVD 的平方的一阶和二阶导数为

$$\frac{\partial |W_s(n, f)|^2}{\partial f} = 4A^4 \sum_{m_1=-M}^M \sum_{m_2=-M}^M (-j4\pi)(m_1 - m_2) e^{-j4\pi(f-f_i)(m_1-m_2)} \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 |W_s(n, f)|^2}{\partial f^2} = 4A^4 \sum_{m_1=-M}^M \sum_{m_2=-M}^M -(4\pi)^2 (m_1 - m_2)^2 e^{-j4\pi(f-f_i)(m_1-m_2)} \quad (23)$$

当  $f = f_i$  时, 通过 (22) 式求得 (16), (17) 式分母为

$$\left[ \frac{\partial^2 |W_z(n, f)|^2}{\partial f^2} \right]_{f=f_i} \approx -\frac{8}{3} (4\pi)^2 A^4 M(M+1)(2M+1)^2 \quad (24)$$

为了求得估计的偏差与方差, 在信噪比为中等或较高时,  $|W_z(n, f)|^2$  可以近似为

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial |W_z(n, f)|^2}{\partial f} \right] &\approx 2\text{Re} \left[ \frac{\partial W_s(n, f)}{\partial f} W_c^*(n, f) + W_s(n, f) \frac{\partial W_c(n, f)}{\partial f} \right] \\ &+ \left[ \frac{\partial |W_s(n, f)|^2}{\partial f} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

当  $f = f_i$  时, 上式可以简化为

$$\left[ \frac{\partial |W_z(n, f)|^2}{\partial f} \right]_{f=f_i} \approx [W_s(n, f)]_{f=f_i} \left[ \left[ \frac{\partial W_c(n, f)}{\partial f} \right]_{f=f_i} + \left[ \frac{\partial W_c^*}{\partial f} \right]_{f=f_i} \right] \quad (26)$$

根据信号的线性调频特性与噪声特征, 可以求得 (26) 式均值为 0, 即

$$E \left[ \frac{\partial |W_z(n, f)|^2}{\partial f} \right] = 0 \quad (27)$$

从而我们可以得到估计的偏差为

$$\text{Bias}(f_e) = 0 \quad (28)$$

由此可见: 对相位为线性调频 AM-FM 信号, 如果信号幅度的 WVD 在任意时刻  $t$ , 在  $f = 0$  处都取得最大值, 则基于 WVD 估计的瞬时频率是无偏的。

当频率  $f = f_i$  时, (26) 式的平方为

$$\left\{ \left[ \frac{\partial |W_z(n, f)|^2}{\partial f} \right]_{f=f_i} \right\}^2 = 4(2M+1)^2 A^4 \left[ \left[ \frac{\partial W_c(n, f)}{\partial f} \right]_{f=f_i} + \left[ \frac{\partial W_c^*}{\partial f} \right]_{f=f_i} \right]^2 \quad (29)$$

利用 (18) 式, 我们可以求得:

$$E \left[ \left[ \left[ \frac{\partial W_c(n, f)}{\partial f} \right] + \left[ \frac{\partial W_c^*(n, f)}{\partial f} \right] \right]^2 \right] = \frac{16}{3} (4\pi)^2 (\sigma^4 + 2A^2\sigma^2) M(M+1)(2M+1) \quad (30)$$

联合 (17), (24), (29), (30) 式, 我们可以求得估计的方差为

$$\text{Var}(f_i) = \frac{6(\sigma^4 + 2A^2\sigma^2)}{8(2\pi)^2 A^4 (2M+1) M(M+1)} \quad (31)$$

从 (31) 式可以看出: 基于 WVD 谱峰检测估计的瞬时频率的方差与窗的长度有关, 随着窗的长度增加, 方差下降。在时间段中点, 窗的长度可以取等于信号的长度, 即  $2M+1=N$ , 此时, 方差为最小:

$$\text{Var}(f_i) = \frac{6(\sigma^4 + 2A^2\sigma^2)}{2(2\pi)^2 A^4 N(N^2 - 1)} \quad (32)$$

在其它点, 由于窗比  $N$  小, 从而使得瞬时频率估计的统计性能下降。我们也注意到, 由于在计算时取幅度的最大值作为近似值, 所以当幅度变化太大时, 方差将增加, 从而使得在实际应用中估计的方差增大。

## 4 仿真实验

在这一部分, 我们给出了实验来验证基于 WVD 谱峰检测估计 AM-FM 信号瞬时频率的性能。实验采用带高斯包络的线性调频信号, 其数学模型为

$$S(t) = \exp(-\alpha t^2/2) \exp(j2\pi(5t + 25t^2/2))$$

图 1 给出了  $\alpha = 1$  时, 采用 WVD 谱峰检测估计的瞬时频率。从图中可以看出: 对于高斯包络的线性调频信号, 基于 WVD 谱峰检测估计出的瞬时频率与信号实际瞬时频率曲线几乎重合。这是因为高斯包络的 WVD 为时频中心在原点, 对称分布; 且在任意时刻, 在零频率处都达到了最大值。所以应用 WVD 谱峰检测准确地估计出了瞬时频率。

图 2 给出了  $\alpha$  为 0, 0.5, 1, 2 时, 基于 WVD 谱峰检测估计瞬时频率的统计性能。通过在信号中加入不同信噪比的高斯白噪声, 每个信噪比各实验了 200 次, 从图上可以看出: 当幅度为常数时, 即  $\alpha$  为 0 时, 在较小的信噪比 (约 2dB) 环境中, 基于 WVD 谱峰检测的瞬时频率估计便可达到 C-R 边界。随着  $\alpha$  的增大, 要使估计值达到 C-R 边界, 则必须提高信噪比。这是因为在求估计的方差时, 使幅度近似为最大值的条件下得出的。随着  $\alpha$  的增大, 幅度变化增大, 在相同的采样率下, 幅度不再近似为常数, 从而使得估计方差增加。

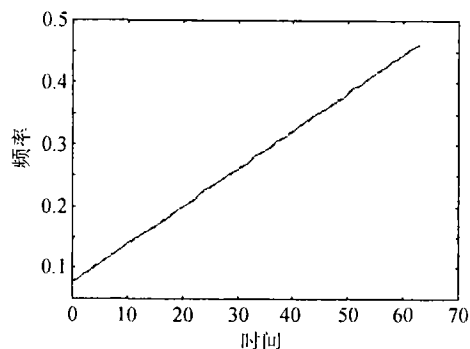


图 1 从 WVD 中估计的瞬时频率 (虚线为实际值)

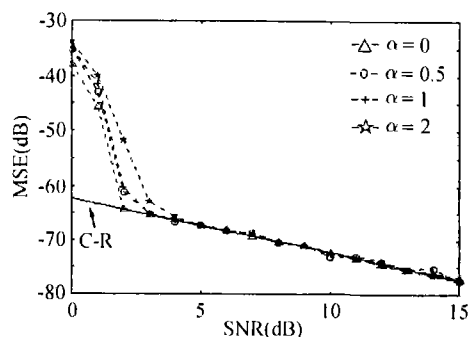


图 2 统计特征

## 5 结 论

本文提出了应用 WVD 谱峰检测估计 AM-FM 信号的瞬时频率的方法, 研究了其统计性能. 理论分析和仿真实验均表明: 对线性调频的 AM-FM 信号, 只要其幅度的 WVD 在  $f = 0$  处取得最大值在任意时刻  $t$  都成立, 基于 WVD 谱峰检测得到的结果是无偏的, 并给出了估计的方差. 最后, 使用带高斯包络线性调频信号证明了我们的研究结果. 这一结果扩展了应用 WVD 谱峰检测估计瞬时频率的使用条件.

## 参 考 文 献

- [1] B. Boashash, Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal, Part 1: Fundamentals, Proc. IEEE, 1992, 80(4), 519-538.
- [2] B. Boashash, Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal, Part 2: Algorithms and Application, Proc. IEEE, 1992, 80(4), 540-568.
- [3] P. Rao, F. J. Taylor, Estimation of instantaneous frequency using the discrete Wigner Distribution, Electronics Letters, 1990, 26(4), 246-248.
- [4] B. C. Lovell, R. C. Williamson, The statistical performance of some instantaneous frequency estimators, IEEE Trans. on Signal Processing, 1992, 40(7), 1708-1723.
- [5] 张贤达, 保 铮, 非平稳信号分析与处理, 北京, 国防工业出版社, 1998, 53-68, 84-92, 392-422.
- [6] L. Cohen, Time-frequency distributions - A review, Proc. IEEE, 1989, 77(7), 941-981.
- [7] 曹志刚, 钱亚生, 现代通信原理, 北京, 清华大学出版社, 1992, 299-309.

## INSTANTANEOUS FREQUENCY ESTIMATION FOR AM-FM SIGNALS BASED ON WVD

Chen Guanghua    Cao Jialin    Wang Jian    Qin Tinggao

(School of Mech. and Electron. Eng. and Aut., Shanghai Univ., Shanghai 200072, China)

**Abstract** In the paper, the method to estimate instantaneous frequency of AM-FM signals using the peak of the WVD and its performances are studied. Analysis results show that the estimation on amplitude time-varying and frequency linear modulating signals will be unbiased, only if the WVD of time-varying amplitude reaches its maximum at frequency zero no matter in which time. The related expected variance is given in the paper. The simulations using signals modulated Gaussian envelope in amplitude and linearly in frequency support this conclusion.

**Key words** Instantaneous frequency, Wigner-Ville Distribution, AM-FM signals

陈光化: 男, 1972 年生, 博士, 主要从事信号处理和微机应用的研究.  
曹家麟: 男, 1948 年生, 教授, 博士生导师, 上海大学副校长, 研究领域为信号处理与编码.  
王 健: 男, 1953 年生, 教授, 主要从事信号处理和微机应用的研究.  
秦霆镐: 男, 1954 年生, 副教授, 主要从事信号处理和微机应用的研究.