アジマススラスタ首振角に制約がある場合の推力配分法について

正員　大 坪 和 久 *　　正員　梶 原 宏 之 **

On thrust allocation methods under the constraints on azimuth thrusters' angles

by　Kazuhisa Ohtsubo, *Member*　Hiroyuki Kajiwara, *Member*

Summary

In a ship DPS equipped with azimuth thrusters, desired forces and moment are realized by means of thrust allocation or control allocation (CA) of determining magnitudes of thrusts and directions of thrusters. The most popular method of thrust allocation is well known as Lagrange multiplier method in the case that thrusters can turn around in all directions to reduce the fuel consumption. Recently thrust allocation problems under constraints on thruster performance are discussed, but almost every solving scheme need heavy computational load for iterative calculations to get an optimal solution. Therefore, a new algorithm solving such a problem in real time is required certainly in the navigation field. In the paper, we propose thrust allocation algorithms that handle the bases in the kernel space of a CA matrix which represents the relationship between the azimuth thrusts and control forces. The proposed algorithms satisfy the azimuth thruster angle constraints and make the real-time calculation possible in a reasonable sampling time. Numerical results are given to show the effectiveness of the proposed method, compared with the conventional Lagrange multiplier method.

1. 緒　言

航空機，宇宙往還機，船舶，ROV などのビークルにおいては，Fig.1 に示すように，上位のコントローラから与えられる制御指令をスラスタなどのアクチュエータに適切に配分させる必要がある。DPS を有するような船舶に限定して考えると，スラスタの故障などを想定して，運動の自由度以上のアクチュエータを搭載することが多い [1)]。実際，最近運航を開始した地球深部探査船「ちきゅう」には，６基のアジマススラスタと１基のトンネルスラスタ，計７基ものスラスタが搭載されている。アクチュエータの数が制御指令の数より多い場合には，スラスタの推力配分は一意には定まらない。そのような場合には，燃料消費を考慮して，可能な限り各スラスタの推力を押さえ込むような推力配分が要求される。このような問題をスラスタの推力配分問題，または，制御配分問題 (Control Allocation Problem) と呼ぶ。

この推力配分問題については，近年，数多くの研究成果が発表されている。中でも，船舶海洋工学分野においては，T.I.Fossen らの研究グループが精力的に研究を行っている [2)]。著者らが調べる限りでは，最近の彼らの推力配分問題に対する研究の方向性は，

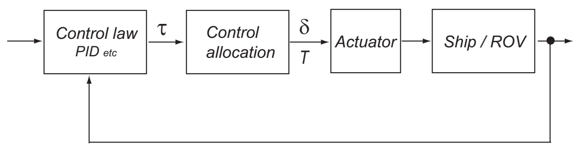

Fig. 1　Control allocation in control system

スラスタの首振角や角速度などの性能条件，姿勢の回転表現に起因する特異性問題などを考慮した評価関数を改めて定義し，その大域的最適解をいかにして高速に，いかにして正確に解くかという方向に向っているように思われる。しかしながら，彼らが自身の論文 [2)] に記述しているように，現時点では，そのような最適化問題の解を実用的な時間内で解くことは困難とされている。

一方，Lagrange 未定乗数法に基づく従来法であれば実用的な時間内で実装できる。しかしながら，この方法はアジマススラスタの動特性や首振範囲制約を考慮していないため，その推力配分結果を実装すると，潮流力が弱い場合にはアジマススラスタが振れ回るという現象が観察される。この無駄な動きをとるために，適当なフィルタとリミッタを用いることが考えられるが，場当たり的な対応としての側面が否めない。したがって，まず首振範囲に制約を設けて，推力配分問題を解くことが望ましい。本論文では，従来研究のように，直接最適化手法を適用するのではなく，推力配分問題の解の構造に着目し，アジマススラスタの首振範囲に制約がある場合の推力配分問題について考察する。

*　独立行政法人 海上技術安全研究所 海洋部門
（研究当時，九州大学大学院 工学府 海洋システム工学専攻）
**　九州大学大学院 工学研究院 海洋システム工学部門

原稿受理　平成 19 年 6 月 4 日

本論文の構成は次の通りである。まず，２章において推力配分問題の解構造について分析し，３章において推力配分問題を特徴付ける CA 行列の特異値分解から得られる零化空間基底を利用した首振範囲制約条件の表現式を示し，これに基づく最適推力配分の近似計算法を提案する。４章において，アジマススラスタを有する簡単な船舶モデルを想定し，首振範囲制約を課した場合の最適推力配分結果と提案法による推力配分結果を，首振範囲制約を課さない従来法の結果と共に比較検討する。５章において，今後の課題を述べる。

2. 推力配分問題とその解構造

2.1 基礎式と CA 行列

時刻 t における，コントローラが指令する制御力 $\tau(t)$ とアクチュエータ（アジマススラスタやプロペラ）の推力 $T(t)$ は，次の関係式により表すことが可能である。

$$\tau(t) = A(\delta(t))T(t) \tag{1}$$

ここで，スラスタの数 n は制御力の数 m より大きいものとする $(n \geq m)$。$\tau(t)$ は m 個の制御力からなるベクトル，$T(t)$ は n 個のスラスト力からなるベクトル，また，$\delta(t)$ はアジマススラスタの首振角からなるベクトルである。以下では，ベクトルの時刻 t への依存性は省略して，単に τ, T, δ と記述する。

推力配分問題における基礎式 (1) における m 行 n 列の行列 $A(\delta)$ は CA (Control Allocation) 行列と呼ばれる。いま，その第 i 列の m 次元縦ベクトルを a_i と表わす。すなわち

$$A(\delta) = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

とする。ここで，船舶の運動を 3 自由度 (surge, sway, yaw) に限って考えれば（$m = 3$），座標 (l_{x_i}, l_{y_i}) に設置されたアジマススラスタとプロペラの a_i はそれぞれ次のように表される。

$$\underbrace{a_i = \begin{bmatrix} \cos\delta_i \\ \sin\delta_i \\ l_{x_i}\sin\delta_i - l_{y_i}\cos\delta_i \end{bmatrix}}_{\text{azimuth thruster}}, \quad \underbrace{a_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ l_{y_i} \end{bmatrix}}_{\text{main propeller}} \tag{3}$$

たとえば，(3) 式を参照して，2 つのアジマススラスタと 1 つのプロペラを有する船舶の CA 行列は，次のように表される。

$$A(\delta_1, \delta_2, \delta_3) =$$
$$\begin{bmatrix} \cos\delta_1 & \cos\delta_2 & 1 \\ \sin\delta_1 & \sin\delta_2 & 0 \\ l_{x_1}\sin\delta_1 - l_{y_1}\cos\delta_1 & l_{x_2}\sin\delta_2 - l_{y_2}\cos\delta_2 & l_{y_3} \end{bmatrix} \tag{4}$$

本論文では，n 個のアジマススラスタを有する船舶を考察の対象とし，その 3 自由度運動を考えるため $m = 3$ とする。この場合の基礎式 (1) は，次のように表わされる。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\delta_1 & \cdots & \cos\delta_n \\ \sin\delta_1 & \cdots & \sin\delta_n \\ *_1 & \cdots & *_n \end{bmatrix}}_{A(\delta_1,\cdots,\delta_n)} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix}}_{T} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix}}_{\tau} \tag{5}$$

ここで，F_x，F_y，M_z は surge, sway, yaw 方向の制御力，T_i $(1, \cdots, n)$ は i 番目のアジマススラスタの推力を表しており，また $*_i = l_{x_i}\sin\delta_i - l_{y_i}\cos\delta_i$ $(1, \cdots, n)$ である。この CA 行列 $A(\delta_1, \cdots, \delta_n)$ は，アジマススラスタの首振角 $\delta_1, \cdots, \delta_n$ に依存した行列であるので，この回転角の情報を取り除くと，(5) 式の左辺は，次のように表わされる。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ -l_{y_1} & l_{x_1} & \cdots & -l_{y_n} & l_{x_n} \end{bmatrix}}_{A_{ex}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1\cos\delta_1 \\ T_1\sin\delta_1 \\ \vdots \\ T_n\cos\delta_n \\ T_n\sin\delta_n \end{bmatrix}}_{T_{ex}(\delta_1,\cdots,\delta_n)} \tag{6}$$

この行列 A_{ex} は拡張型 CA 行列と呼ばれる [3]。ここで，アジマススラスタの推力 T_i の x 成分と y 成分をそれぞれ

$$\begin{cases} T_{i,x} = T_i\cos\delta_i \\ T_{i,y} = T_i\sin\delta_i \end{cases} \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{7}$$

とおくと，(5) 式は，次式となる。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ -l_{y_1} & l_{x_1} & \cdots & -l_{y_n} & l_{x_n} \end{bmatrix}}_{A_{ex}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_{1,x} \\ T_{1,y} \\ \vdots \\ T_{n,x} \\ T_{n,y} \end{bmatrix}}_{T_{ex}} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} \tag{8}$$

CA 行列を用いた基礎式 (5) は船体への制御力とアジマススラスタの推力の間の関係を表すモデルであったのに対し，拡張型 CA 行列を用いた基礎式 (8) は制御力と推力の x 成分と y 成分の間の関係を表すモデルである。以下では，基礎式 (8) において，A_{ex} は行フルランクをもつ（一次独立な列ベクトルを３本取ることができる）と仮定して，これに基づいて考察していく。なお，制御力 F_x, F_y, M_z が与えられたとき，適当な求解操作により $T_{i,x}$ と $T_{i,y}$ を得たとすると，次式によりアジマススラスタの首振角と推力を求めることが可能である。

$$\begin{cases} \delta_i = \tan^{-1}\frac{T_{i,y}}{T_{i,x}} \\ T_i = \sqrt{T_{i,x}^2 + T_{i,y}^2} \end{cases} \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{9}$$

2.2 推力配分問題の解構造

ここでは，推力配分問題の解の自由度を明らかにし，従来法による解の特徴を調べる。

基礎式 (8) の解は，A_{ex} は行フルランクであることから必ず存在するが，一意には定まらない（どのような制御力を与えられてもこれを実現する推力配分が定まるが，配分の仕方はいく通りもある）。その表現式を求めるために，3 行 n 列の拡張型 CA 行列 A_{ex} を次のように特異値分解 [4] しておく。

$$\begin{cases} A_{ex} = U\underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma}\underbrace{\begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}}_{V^T} = U\Sigma_1 V_1^T \\ \Sigma_1 = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, \ (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 > 0) \\ U^T U = UU^T = I_3 \\ V_1^T V_1 = I_3, \ V_2^T V_2 = I_{2n-3}, \ V_1^T V_2 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

このとき，基礎式 (8) の解を T_{ex} で表わすと，両辺の誤差の２ノルム (ベクトルの要素の２乗和の正の平方根) の２乗は，次のように表わされる。

$$\begin{aligned}\|A_{ex}T_{ex}-\tau\|^2 &= (A_{ex}T_{ex}-\tau)^T(A_{ex}T_{ex}-\tau)\\ &= (U\Sigma_1V_1^TT_{ex}-\tau)^T(U\Sigma_1V_1^TT_{ex}-\tau)\\ &= (\Sigma_1V_1^TT_{ex}-U^T\tau)^T(\Sigma_1V_1^TT_{ex}-U^T\tau)\\ &= \|\Sigma_1V_1^TT_{ex}-U^T\tau\|^2\\ &= \|\Sigma_1V_1^T(T_{ex}-V_2c)-U^T\tau\|^2=0\end{aligned} \tag{11}$$

ここで，c は任意の $2n-3$ 次元ベクトルである。(11) 式から，T_{ex} の表現式として，次を得る。

$$T_{ex}=V_1\Sigma_1^{-1}U^T\tau+V_2c \tag{12}$$

実際，これを (8) 式に代入すると

$$A_{ex}T_{ex}=U\Sigma_1V_1^T(V_1\Sigma_1^{-1}U^T\tau+V_2c)=\tau \tag{13}$$

となる。T_{ex} の表現式 (12) は，すべての解を尽くしていることが示されている [4]。この関係を図示すると，Fig.2 となる。すなわち，解の自由度が (12) 式の第２項で表わされている。ここで，V_2 は,

$$A_{ex}V_2=0 \tag{14}$$

を満たし，数学的には，A_{ex} の零化空間の基底行列とよばれる。

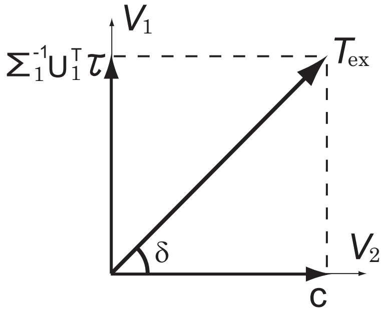

Fig. 2　Decomposition of T_{ex}

さて，T_{ex} の２ノルムの２乗は次のように計算される。

$$\begin{aligned}\|T_{ex}\|^2 &= (V_1\Sigma_1^{-1}U_1^T\tau+V_2c)^T(V_1\Sigma_1^{-1}U_1^T\tau+V_2c)\\ &= \tau^TU_1\Sigma_1^{-1}V_1^TV_1\Sigma_1^{-1}U_1^T\tau+\tau^TU_1\Sigma_1^{-1}V_1^TV_2c\\ &\quad +c^TV_2^TV_1\Sigma_1^{-1}U_1^T\tau+c^TV_2^TV_2c\\ &= \|\Sigma_1^{-1}U_1\tau\|^2+\|c\|^2\end{aligned} \tag{15}$$

(8) 式の解の中で，２ノルムを最小にするものは，(12) 式で $c=0$ の場合で

$$T_{ex}|_{c=0}=V_1\Sigma_1^{-1}U^T\tau \tag{16}$$

で与えられる。これが，従来法の結果となる（付録 1° 参照）。すなわち，推力配分の結果を，各アジマススラスタが発生する推力の x 成分と y 成分の２乗和で評価するとき，(16) は，この意味で消費エネルギーを最小とするものといえる。ただし，各アジマススラスタの首振角がどのようなものになるかは分からない。

本論文では，各アジマススラスタの首振角に制約を設けるとき，解の自由度（(12) 式の第２項）を適切に調整する問題を考える。

3. 首振角制約の下での推力配分法

3.1　首振角制約条件式の導出

いま，各アジマススラスタの首振角 δ_i $(i=1,\cdots,n)$ の許容範囲が次のように設定されているものとする。

$$\underline{\delta}_i\le\delta_i\le\overline{\delta}_i\quad(1,\cdots,n) \tag{17}$$

ここで，$\overline{\delta}_i$ と $\underline{\delta}_i$ の絶対値は $\frac{\pi}{2}$ 以下とする。この制約のもとで，$\|T_{ex}\|$ をできるだけ小さくする推力配分を求めたい。(15) 式から，その最小値は $\|\Sigma_1^{-1}U_1\tau\|$ であることが分かっているので，次のような制約条件付きの２次計画問題としての定式化が可能である。

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\quad J=\frac{1}{2}(\|T_{ex}\|-\|\Sigma_1^{-1}U_1\tau\|)=\frac{1}{2}\|c\|^2\\ &\text{subject to}\quad \underline{\delta}_i\le\delta_i\le\overline{\delta}_i\quad(i=1,\cdots,n)\end{aligned} \tag{18}$$

ただし，決定変数は，ベクトル c の $2n-3$ 個の要素である。

この問題を解くには，制約条件 (17) と決定変数ベクトル c の間の陽な関係式を，連立不等式の形式で求める必要がある。そのために，制約条件 (17) に

$$T_{i,x}\tan\delta_i=T_{i,y}\quad(i=1,\cdots,n) \tag{19}$$

を用いて，次の不等式制約条件を考える。

$$\begin{cases}T_{i,y}\le T_{i,x}\tan\overline{\delta}_i\\ T_{i,y}\ge T_{i,x}\tan\underline{\delta}_i\\ T_{i,x}\ge 0\end{cases}\quad(i=1,\cdots,n) \tag{20}$$

そこで，$i=1,\cdots,n$ に対して，$T_{i,x}$ と $T_{i,y}$ を，c で表わすことを試みる。(12) 式において，U の列ベクトルと，V_1，V_2 の行ベクトルを，それぞれ

$$\begin{cases}U=\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3\end{bmatrix}\quad(u_i\in\mathbf{R}^3)\\ V_1=\begin{bmatrix}v_{11}^T\\ v_{12}^T\\ \vdots\\ v_{1,2n-1}^T\\ v_{1,2n}^T\end{bmatrix}\quad(v_{1i}\in\mathbf{R}^3)\\ V_2=\begin{bmatrix}v_{21}^T\\ v_{22}^T\\ \vdots\\ v_{2,2n-1}^T\\ v_{2,2n}^T\end{bmatrix}\quad(v_{2i}\in\mathbf{R}^{2n-3})\end{cases} \tag{21}$$

とおくと（$\mathbf{R}$ は実数の集合），$T_{i,x}$ と $T_{i,y}$ はそれぞれ $2i-1$ 行と $2i$ 行に等しいので，次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix}T_{i,x}\\ T_{i,y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_{1,2i-1}^T\\ v_{1,2i}^T\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_1^{-1}u_1^T\\ \sigma_2^{-1}u_2^T\\ \sigma_3^{-1}u_3^T\end{bmatrix}\tau}_{\tau'}+\begin{bmatrix}v_{2,2i-1}^T\\ v_{2,2i}^T\end{bmatrix}c \tag{22}$$

すなわち，上のように τ' を定義すると，$T_{i,x}$ と $T_{i,y}$ は

$$\begin{cases}T_{i,x}=v_{1,2i-1}^T\tau'+v_{2,2i-1}^Tc\\ T_{i,y}=v_{1,2i}^T\tau'+v_{2,2i}^Tc\end{cases}\quad(i=1,\cdots,n) \tag{23}$$

のように表わされる。これらを (20) に代入して

$$\begin{cases} v_{1,2i}^T\tau' + v_{2,2i}^T c \le (v_{1,2i-1}^T\tau' + v_{2,2i-1}^T c)\tan\overline{\delta}_i \\ v_{1,2i}^T\tau' + v_{2,2i}^T c \ge (v_{1,2i-1}^T\tau' + v_{2,2i-1}^T c)\tan\underline{\delta}_i \\ v_{1,2i-1}^T\tau' + v_{2,2i-1}^T c \ge 0 \\ (i = 1, \cdots, n) \end{cases} \tag{24}$$

すなわち

$$\begin{cases} (v_{2,2i}^T - v_{2,2i-1}^T\tan\overline{\delta}_i)c \le (-v_{1,2i}^T + v_{1,2i-1}^T\tan\overline{\delta}_i)\tau' \\ (-v_{2,2i}^T + v_{2,2i-1}^T\tan\underline{\delta}_i)c \le (v_{1,2i}^T - v_{1,2i-1}^T\tan\underline{\delta}_i)\tau' \\ -v_{2,2i-1}^T c \le v_{1,2i-1}^T\tau' \\ (i = 1, \cdots, n) \end{cases} \tag{25}$$

を得る。この制約条件を，次のように行列表現しておく。

$$B_{ex}c \le D_{ex}\tau \tag{26}$$

ここで，B_{ex} は $3n$ 行 $2n-3$ 列の行列，D_{ex} は $3n$ 行 3 列の行列である。また，不等号は要素毎の大小関係を表すものとする。

3.2 最適解の近似計算法

解くべき最適化問題 (18) は，次のように再設定できる。

$$\begin{cases} \text{minimize} \quad J = \dfrac{1}{2}\|c\|^2 \\ \text{subject to} \quad B_{ex}c \le D_{ex}\tau \end{cases} \tag{27}$$

以下では，この問題の解（最適解）を，次のように表す。

$$c^*(\tau) = \text{argmin } \tfrac{1}{2}\|c\|^2 \text{ s.t. } B_{ex}c \le D_{ex}\tau \tag{28}$$

このような線形不等式制約下の２次計画問題を解くソルバーは数多く開発されているので，比較的簡単に解くことができる。ただし，制御力 $\tau(t)$ は時間関数であり，一定時間間隔（サンプリング周期）毎に $c^*(\tau)$ の最適化計算を行う必要性がある。しかしながら，実装用計算機の能力の観点から，オンライン最適化はできるだけ回避したい。

そこで，制御力の上下限値を次のように表わす。

$$\begin{cases} \underline{F_x} \le F_x \le \overline{F_x} \\ \underline{F_y} \le F_y \le \overline{F_y} \\ \underline{M_z} \le M_z \le \overline{M_z} \end{cases} \tag{29}$$

このとき，$\tau = [F_x, F_y, M_z]^T$ は，８個の端点

$$\begin{cases} \tau_1 = \begin{bmatrix} \overline{F_x} \\ \overline{F_y} \\ \overline{M_z} \end{bmatrix}, \tau_2 = \begin{bmatrix} \overline{F_x} \\ \overline{F_y} \\ \underline{M_z} \end{bmatrix}, \tau_3 = \begin{bmatrix} \overline{F_x} \\ \underline{F_y} \\ \overline{M_z} \end{bmatrix}, \tau_4 = \begin{bmatrix} \overline{F_x} \\ \underline{F_y} \\ \underline{M_z} \end{bmatrix} \\ \tau_5 = \begin{bmatrix} \underline{F_x} \\ \overline{F_y} \\ \overline{M_z} \end{bmatrix}, \tau_6 = \begin{bmatrix} \underline{F_x} \\ \overline{F_y} \\ \underline{M_z} \end{bmatrix}, \tau_7 = \begin{bmatrix} \underline{F_x} \\ \underline{F_y} \\ \overline{M_z} \end{bmatrix}, \tau_8 = \begin{bmatrix} \underline{F_x} \\ \underline{F_y} \\ \underline{M_z} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{30}$$

から，次のように生成できる。

$$\tau = p_i(\tau)\tau_1 + \cdots + p_8(\tau)\tau_8 \tag{31}$$

ここで，線形結合係数 $p_i(\tau)\ (i = 1, \cdots, 8)$ は，τ から計算され，総和は 1 に等しい（付録 2° 参照）。このとき，$i = 1, \cdots, 8$ に対して，各端点ごとに最適解

$$c_i^* = \text{argmin } \tfrac{1}{2}\|c\|^2 \text{ s.t. } B_{ex}c \le D_{ex}\tau_i \quad (i = 1, \cdots, 8) \tag{32}$$

を求め，次式から c を定めることが考えられる (以下，方法１と言う)。

$$c_{method1}(\tau) = p_1(\tau)c_1^* + \cdots + p_8(\tau)c_8^* \tag{33}$$

これが最適解 $c^*(\tau)$ と一致する保証はないが，オンラインで最適化を行うよりは計算量は少ない。

もう一つの方法は，８個の端点に関する制約条件を同時に満足させるような c を求めること，すなわち

$$c_{method2}^* = \text{argmin } \tfrac{1}{2}\|c\|^2 \text{ s.t. } \begin{bmatrix} B_{ex} \\ \vdots \\ B_{ex} \end{bmatrix} c \le \begin{bmatrix} D_{ex}\tau_1 \\ \vdots \\ D_{ex}\tau_8 \end{bmatrix} \tag{34}$$

を計算することである (以下，方法２と言う)。これは直接 τ には依存しないので保守的であるが，$c_{method2}^*$ はオフライン計算できる。

なお，方法１と方法２とも，(29) の制約を満たす保証はないことに留意する。

4. 数値シミュレーション

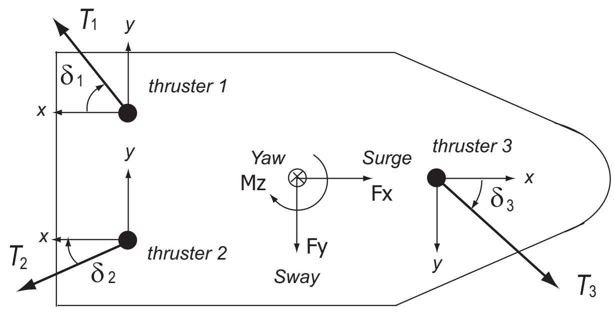

Fig. 3 Model ship

Fig.3に示すように，アジマススラスタを船首側に 1 基，船尾の左舷と右舷に 1 基ずつ搭載した簡単な例を扱う。Table 1には各アジマススラスタの重心からの位置座標を表す。

Table 1 Locations of azimuth thrusters

	l_x[m]	l_y[m]
azimuth thruster 1	−20	+5
azimuth thruster 2	−20	−5
azimuth thruster 3	+20	0

この場合，拡張型 CA 行列は次のように表される。

$$A_{ex} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 20 & -5 & 20 & 0 & 20 \end{bmatrix} \tag{35}$$

ここで，(35) 式の符号が (8) 式のものと異なる理由は，船尾側の２つのアジマススラスタの座標系を予め 180 度回転させているためである。

また，制御力とその上下限値を次のように仮定する。

$$\begin{cases} -1 < F_x = 0.9\sin(\frac{2\pi}{60}t) < 1 \\ -1 < F_y = 0.9\cos(\frac{2\pi}{60}t) < 1 \\ -1 < M_z = -0.9\sin(\frac{2\pi}{60}t) < 1 \end{cases} \quad (0 \le t \le 60) \tag{36}$$

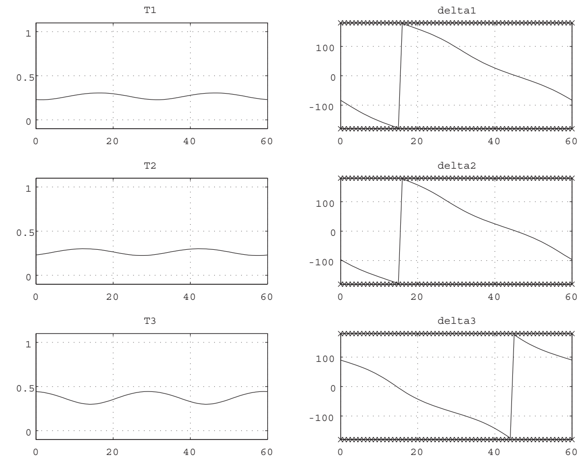

Fig. 4　Thrust allocation based on the conventional method

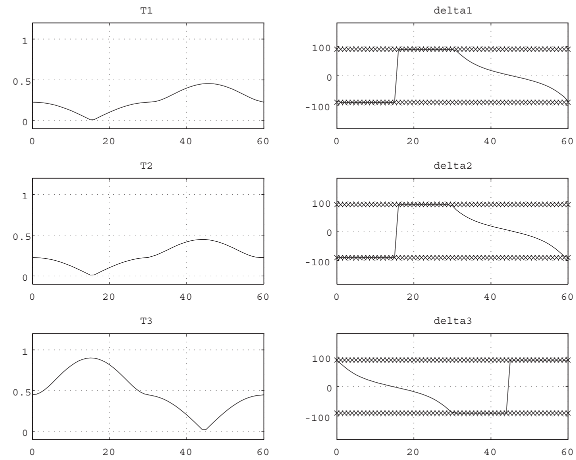

Fig. 5　Optimal thrust allocation in Case 1

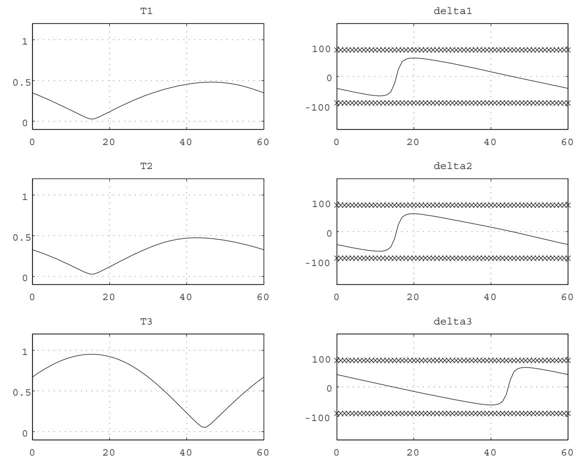

Fig. 6　Thrust allocation based on the method 1 in Case 1

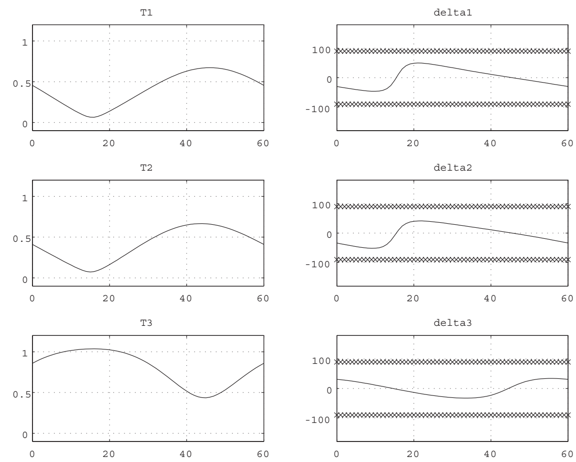

Fig. 7　Thrust allocation based on the method 2 in Case 1

まず，首振角に制約を設けない場合，従来法 ($c = 0$) で推力配分を行った結果を，Fig.4に示す。左側の上段・中段・下段はそれぞれアジマススラスタ１，２，３の推力 T_1，T_2，T_3[N] を示し，右側の上段・中段・下段はそれぞれ首振角 δ_1，δ_2，δ_3[deg] を示す（以下の図においても同様）。右側各段の太線は上下限値を表している。与えられた制御力を実現するのに，初期時刻においてアジマススラスタは３台とも右舷方向を向き，その後ほぼ一定の推力を出しながら，時計回りに回転していることが分かる。

次に，首振角に制約を設ける場合，次の２通りを考える。

$$\text{Case1}: \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \delta_1 \le \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \le \delta_2 \le \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \le \delta_3 \le \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad \text{Case2}: \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \le \delta_1 \le \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \le \delta_2 \le \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{2} \le \delta_3 \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Fig.5に，Case1 の最適推力配分結果を示す。これは，MATLAB の関数 `lsqlin` を用いて，１秒ごとに最適化計算を 61 回行って得たものである。これから，前半の期間では船首側アジマススラスタが主に稼働し，後半の期間では船尾側両アジマススラスタが主に稼働していることがわかる。興味深いのは，Fig.4と Fig.5の推力の時間平均はそれぞれ 0.9224 と 0.9956 で，制約をつけてもそれほど増加しないことである。また首振角の制限値一杯を使用する期間があり，-90 度から $+90$ 度への遷移を要求するタイミングも見受けられる。一方，Fig.6と Fig.7に，提案する方法１と方法２による推力配分結果を示す。最適推力配分結果と比べて，緩やかな首振角の変化となっているが，推力の増大は避けられない。また方法２では船首アジマススラスタの首振角の動きが制限的であるが，方法１ではこの点は緩和されている。

次に，Case2 の非対称な首振角制約を考える。この場合の最適推力配分結果，方法１と方法２による推力配分結果を，それぞれ，Fig.8，Fig.9，Fig.10に示す。大体の特徴は Case1 と同様であるが，最適推力配分において，船尾側両アジマススラスタの推力が零となる期間があり，首振角が不定となることが観察される。このような零推力の場合は１期前の首振角をホールドすることで回避できると思われる。

5. 結　言

本論文では，アジマススラスタ首振角に制約がある場合の推力配分問題について考察し，最適推力配分の近似計算法を提案し，その特徴（位置づけ）と問題点を数値シミュレーションにより調べた。今後の課題として，最適推力配分の実時間実装方法の検討，さらには，スラスタの動特性を考慮した最適推力配分問題の検討が挙げられる。

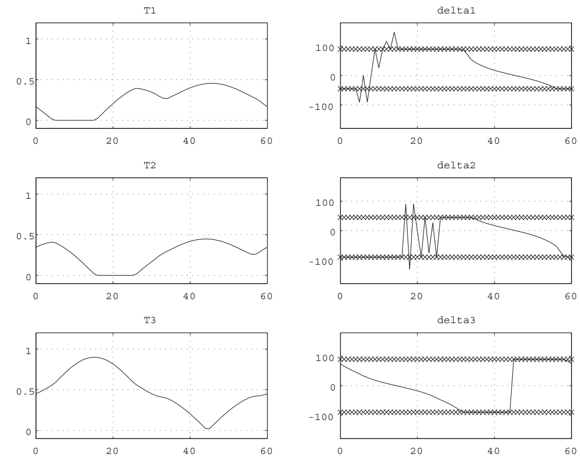

Fig. 8 Optimal thrust allocation in Case 2

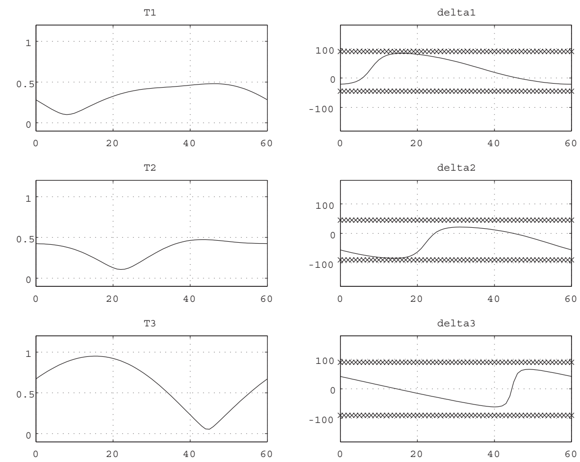

Fig. 9 Thrust allocation based on the method 1 in Case 2

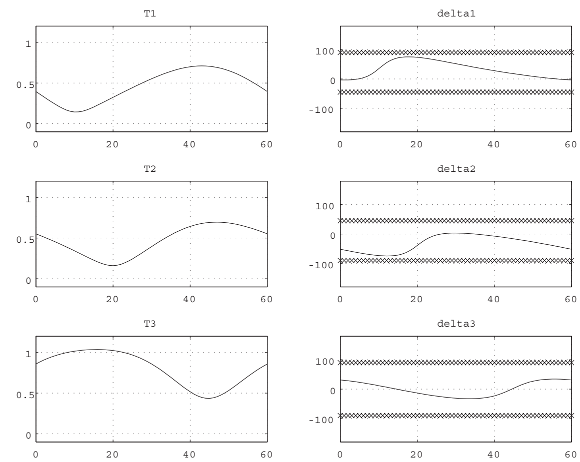

Fig. 10 Thrust allocation based on the method 2 in Case 2

謝　辞

本研究は，三井造船株式会社と九州大学との共同研究「掘削船用 DPS の高度化に関する開発研究」の一部として実施されたことを記し，関係各位に謝意を表します。

参 考 文 献

1) T.I.Fossen: Marine Control Systems, Marine Cybernetics, (2002)
2) T.A.Johansen, T.I.Fossen and S.P.Berge: Constrained nonlinear control allocation with singularity avoidance using sequential quadratic programming, IEEE Transactions on Control System Technology, Vol.12, No.1, pp.211-216, (2004)
3) O.J.Sordalen: Optimal thrust allocation for marine vessels, Control Engineering Practice, Vol.5, No.9, pp.1223-1231, (1997)
4) C.L.Lawson, R.J.Hanson: Solving Least Squares Problems, Pretice-Hall, (1974)

Appendix

1° 次の推力配分問題を考える。

$$\begin{cases} \text{minimize} \quad J = \dfrac{1}{2}\|T_{ex}\|^2 \\ \text{subject to} \quad A_{ex}T_{ex} = \tau \end{cases} \tag{37}$$

λ を Lagrange 未定乗数ベクトルとして

$$J = \frac{1}{2}T_{ex}^T T_{ex} + \lambda^T(A_{ex}T_{ex} - \tau) \tag{38}$$

から，必要条件として，次式を得る。

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial T_{ex}} = T_{ex} + A_{ex}^T\lambda = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda} = A_{ex}T_{ex} - \tau = 0 \end{cases} \tag{39}$$

第 1 式から $T_{ex} = -A_{ex}^T\lambda$，これを第 2 式に代入して $-A_{ex}A_{ex}^T\lambda = \tau$ を得る。これから得られる $\lambda = -(A_{ex}A_{ex}^T)^{-1}\tau$ を第 1 式に代入して

$$T_{ex} = A_{ex}^T(A_{ex}A_{ex}^T)^{-1}\tau \tag{40}$$

を得る。評価関数の凸性より，これが一意解である。これに (10) 式を代入すれば

$$T_{ex} = V_1\Sigma_1^{-1}U_1^T\tau \tag{41}$$

となり，(12) 式において $c = 0$ の場合となる。

2° $x = F_x, x_1 = \underline{F_x}, x_2 = \overline{F_x}$，$y = F_y, y_1 = \underline{F_y}, y_2 = \overline{F_y}$，$z = M_z, z_1 = \underline{M_z}, z_2 = \overline{M_z}$ とおくと，(31) 式の係数 $p_i\,(i = 1, \cdots, 8)$ は，次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\cdot\frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\cdot\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}_{p_1(x,y,z)} + \underbrace{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\cdot\frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\cdot\frac{z_2 - z}{z_2 - z_1}}_{p_2(x,y,z)} + \\
&\underbrace{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\cdot\frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}\cdot\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}_{p_3(x,y,z)} + \underbrace{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\cdot\frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}\cdot\frac{z_2 - z}{z_2 - z_1}}_{p_4(x,y,z)} + \\
&\underbrace{\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\cdot\frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\cdot\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}_{p_5(x,y,z)} + \underbrace{\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\cdot\frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\cdot\frac{z_2 - z}{z_2 - z_1}}_{p_6(x,y,z)} + \\
&\underbrace{\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\cdot\frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}\cdot\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}_{p_7(x,y,z)} + \underbrace{\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\cdot\frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}\cdot\frac{z_2 - z}{z_2 - z_1}}_{p_8(x,y,z)} = 1
\end{aligned} \tag{42}$$