

浮体に作用する波漂流力の定常成分について (第2報)

正員 坪郷 尚*

The Drift Force Acting on a Floating Body in Waves(2nd report)

by Takashi Tsubogo, Member

Summary

This paper provides the reciprocal form on wave-drift-force and moment from momentum theory. In the 1st report we has transformed from the pressure integration on the wetted body surface oscillating in regular waves into the reciprocal form at near field, then transformed into the form at far field owing to Green's second identity, and transformed into Maruo's and Newman's formula. Therefore we underwent the cumbersome calculations using the method of stationary phase. But in this paper the start point is the momentum theory and the goal is the reciprocal form. The transformation is easy and simple. The obtained reciprocal form at far field can be transformed into the integration over the wetted floating body surface owing to Green's second identity.

1. 緒言

線形理論の範囲では、浮体に作用する流体力に関する相反性が多数知られている。これらは1対の速度ポテンシャルに対してGreenの第2公式を適用することにより導くことができる (Table 1)¹⁾²⁾。例えばラディエーション波 $\varphi_i, i = 1, 2, \dots, 6$ とその複素共役 (逆時間) φ_j^* のペアに対してGreenの第2公式を適用すると造波減衰係数と発散波振幅の関係が得られる³⁾⁴⁾。ところでKashiwagi(2006)は、入射波の進行方向が χ_A の時のトータル速度ポテンシャル $\varphi(\chi_A)$ と入射角 χ_B の時のトータル速度ポテンシャル $\varphi(\chi_B)$ のペアに対してGreenの第2公式を適用し、これら2つの問題の発散波振幅に相反関係があることを導いている⁵⁾。さらに $\varphi^*(\chi_A)$ と $\varphi(\chi_B)$ のペアに対してGreenの第2公式を適用し、エネルギー関係式も導いている。

このような中、前報では、入射波の進行方向が χ の時のトータル速度ポテンシャルを φ とし、 $\nabla_j \varphi^*, j = 1, 2, 6$ (∇_6 は z 軸周りの微分で式(2)のように定義している) と φ のペアに対してGreenの第2公式を適用し、これが定常波漂流力と波漂流モーメントに深く関係していることを示した⁶⁾。運動量定理およびエネルギー定理は、流体の運動量・エネルギーについて輸送定理⁷⁾を用いることにより導かれるが、輸送定理は移動境界上での表面積分を取り扱っている。そこで浮体浸水表面での水圧積分を1次の微小量のみから近似計算する方法として輸送定理の考え方をを用いた展開法を仮定した。そして、これを用いて定常波漂流力の相

Table 1 Reciprocity relations and pair of functions to be applied to Green's second identity in control fluid volume, where $\varphi_D = \varphi_0 + \varphi_7$ is the diffraction wave, φ_j the radiation wave, $\varphi(\chi_A)$ the total wave containing the incident wave with angle χ_A , and f_{ij} the coefficient of radiation forces.

Waves	Relation
φ_D, φ_j	Haskind
φ_i, φ_j	$f_{ij} = f_{ji}$
φ_i^*, φ_j	Damping coef. and Kochin func.
$\varphi(\chi_A), \varphi(\chi_B)$	Kashiwagi (reciprocity)
$\varphi^*(\chi_A), \varphi(\chi_B)$	Kashiwagi (wave energy)
$\nabla_j \varphi^*, \varphi$	Maruo's drift force ($j = 1, 2$) Newman's drift moment ($j = 6$)

反的な近場表示を導き、Greenの第2公式を介して定常波漂流力の相反的な遠場表示を導き、さらに停留位相法を用いて、MaruoとNewmanの公式⁸⁾⁹⁾へ変形した。

本第2報では、流体領域に関する運動量定理から直接、定常波漂流力の相反的な表示を導くことを試みる。

2. 問題の設定

浮体に円振動数 ω 、微小振幅の平面波が入射し、系全体が円振動数 ω で調和振動する問題を考える。静止時の浮体浮面心位置を空間固定座標系の原点 o 、静止水面上に $x(=x_1)$ 軸と $y(=x_2)$ 軸、鉛直上方に $z(=x_3)$ 軸、となるように空間固定の座標系 $o-xyz$ を設定する (Fig. 1)。浮体を剛体、流体を非回転非圧縮

* 大阪府立大学大学院

の理想流体とし、水深は十分深いとする。無限遠方の検査面 S_∞ は円筒検査面とする。また、流体境界面の外向き単位法線ベクトル $n_j, j = 1, 2, 3$ を導入し、 z 軸周りのモーメントを計算するために便宜的に n_6 を以下のように導入する。

$$n_6 \equiv xn_2 - yn_1 \tag{1}$$

これに対応して以下のように ∇_6 を導入する。

$$\nabla_6 \equiv x\nabla_2 - y\nabla_1 \tag{2}$$

運動量定理より、浮体に働く波漂流力の時間平均値 $\bar{F}_j, j = 1, 2, 6$ は以下のように表される⁸⁾⁹⁾。

$$\bar{F}_j = - \overline{\iint_{S_\infty} \left\{ pn_j + \rho \nabla_j \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} dS} \tag{3}$$

ここで、 Φ は速度ポテンシャル、 ρ は流体密度、 p は水圧で Bernoulli の式より以下のように表せる。

$$p = -\rho gz - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \tag{4}$$

3. 無限水深の時の浮体に作用する波漂流力

$j = 1$ の場合を考える。Bernoulli の式 (4) を式 (3) に代入すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \bar{F}_j &= - \overline{\iint_{S_\infty} \left\{ -\rho gz - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} n_j dS} \\ &\quad + \rho \overline{\iint_{S_\infty} \left\{ \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi n_j - \nabla_j \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} dS} \\ &= -\frac{\rho}{2} \oint_{C_\infty} \frac{1}{g} \overline{\frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t}} n_j ds \\ &\quad + \rho \overline{\iint_{S_\infty} \left\{ \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi n_j - \nabla_j \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} dS} \end{aligned} \tag{5}$$

ここで C_∞ は円筒検査面の $z = 0$ 上の円で、また以下の線形化された自由表面条件を用いている。

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{on } z = 0 \tag{6}$$

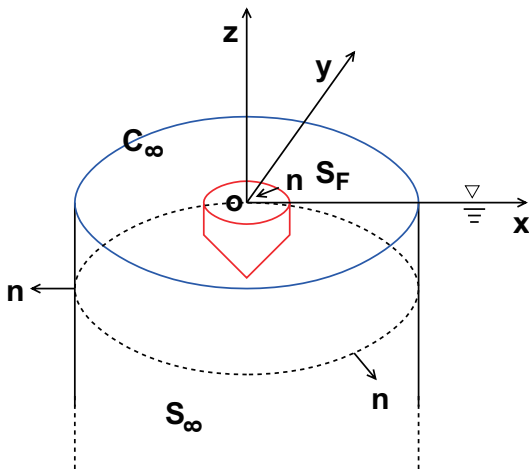


Fig. 1 Coordinate system, control surface and unit normal vector

ここで ζ は水面変位を表す。流体の運動エネルギーの流速の z 成分の項は z について部分積分して以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} &\rho \iint_{S_\infty} \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z}} n_j dS \\ &= \frac{\rho}{2} \iint_{S_\infty} \overline{\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - K^2 \Phi \Phi \right\} n_j dS} \\ &= \frac{\rho}{2} \oint_{C_\infty} K \overline{\Phi \Phi} n_j ds + \frac{\rho}{2} \iint_{S_\infty} \overline{\{-K^2 \Phi \Phi\}} n_j dS \end{aligned} \tag{7}$$

$$K = \frac{\omega^2}{g} \tag{8}$$

ここで、遠方で Φ の z 依存性が e^{Kz} の形であることと、以下の自由表面条件を用いている。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = K \Phi \quad \text{on } \bar{S}_F \tag{9}$$

よって式 (5) は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \bar{F}_j &= \frac{\rho}{2} \oint_{C_\infty} \overline{\left\{ -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + K \Phi \Phi \right\} n_j ds} + \rho \times \\ &\quad \overline{\iint_{S_\infty} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - K^2 \Phi \Phi \right) n_j - \nabla_j \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} dS} \end{aligned} \tag{10}$$

以下のように速度ポテンシャルを変数分離し複素数表示にすると式 (10) の線積分項が消えることが確認できる。

$$\Phi = \text{Re} \left[\frac{g}{i\omega} \varphi e^{-i\omega t} \right] \tag{11}$$

円筒検査面上では $n_z = 0$ なので

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = n_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{12}$$

この両辺に $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ を掛けると

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} n_x = \nabla_1 \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - n_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \nabla_1 \Phi \\ &= \nabla_1 \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - n_y \frac{\partial}{\partial y} (\Phi \nabla_1 \Phi) + n_y \frac{\partial \nabla_1 \Phi}{\partial y} \Phi \end{aligned} \tag{13}$$

一方、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} n_x = n_x \frac{\partial}{\partial y} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - n_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Phi \\ &= n_x \frac{\partial}{\partial y} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + n_x \frac{\partial \nabla_1 \Phi}{\partial x} \Phi + n_x K^2 \Phi \Phi \end{aligned} \tag{14}$$

ここで $\nabla^2 \Phi = 0$ を用いている。式 (13)(14) そして (12) より、

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - K^2 \Phi \Phi \right\} n_x = \\ &\nabla_1 \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - n_y \frac{\partial}{\partial y} (\Phi \nabla_1 \Phi) + \frac{\partial \nabla_1 \Phi}{\partial n} \Phi + n_x \frac{\partial}{\partial y} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \end{aligned} \tag{15}$$

さらに円筒座標系 (R, θ, z) では以下の関係

$$n_x \frac{\partial}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \quad (16)$$

があることに注意すると式 (15) の最後の項は

$$\begin{aligned} n_x \frac{\partial}{\partial y} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + n_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

右辺第1項の $\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ の θ に関する周期性に注意して、式 (17) を (15) に代入することにより x 方向の波漂流力 (10) は以下のように表される。

$$\bar{F}_1 = \frac{\rho}{2} \iint_{S_\infty} \left\{ \frac{\partial \nabla_1 \Phi}{\partial n} \Phi - \nabla_1 \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} dS \quad (18)$$

$$= \frac{\rho g}{4K} Re \iint_{S_\infty} \left\{ \frac{\partial \nabla_1 \varphi^*}{\partial n} \varphi - \nabla_1 \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS \quad (19)$$

$$= \frac{\rho g}{4K} Re \iint_{\bar{S}_H} \left\{ \nabla_1 \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \nabla_1 \varphi^*}{\partial n} \varphi \right\} dS \quad (20)$$

ここで \bar{S}_H は浮体浸水表面の時間平均で、最後の等式は Green の第2公式を用いている。 $j=2$ すなわち \bar{F}_y についても同様に变形できる。参考までに2次元無限水深の場合を付録に示す。

4. 無限水深の時の浮体に作用する波漂流モーメント

$j=6$ の場合を考える。円筒検査面 S_∞ 上では

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta \quad (21)$$

$$n_1 = \cos \theta, \quad n_2 = \sin \theta \quad (22)$$

であるので

$$n_6 = xn_2 - yn_1 = 0 \quad (23)$$

に注意すると式 (3) は以下のように变形できる。

$$\begin{aligned} \bar{F}_6 &= -\rho \iint_{S_\infty} \nabla_6 \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \\ &= -\frac{\rho}{2} \iint_{S_\infty} \left\{ \nabla_6 \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \nabla_6 \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} dS \\ &= -\frac{\rho}{2} \iint_{S_\infty} \left\{ \nabla_6 \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) - \frac{\partial \nabla_6 \Phi}{\partial n} \Phi + \nabla_6 \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} dS \\ &= -\frac{\rho}{2} \iint_{S_\infty} \left\{ -\frac{\partial \nabla_6 \Phi}{\partial n} \Phi + \nabla_6 \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} dS \end{aligned} \quad (24)$$

ここで $\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial R}$ の θ に関する周期性と円筒検査面 S_∞ 上での以下の関係を用いている。

$$\nabla_6 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial R}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (25)$$

変数分離 (11) を行い、 $\nabla_6 \varphi^*$ と φ のペアに対して Green の第2公式を用いることを考える。時間平均の自由表面 \bar{S}_F 上では以下の関係

$$\iint_{\bar{S}_F} \left\{ \frac{\partial (x \nabla_2 - y \nabla_1) \varphi^*}{\partial n} \varphi - (x \nabla_2 - y \nabla_1) \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS = 0 \quad (26)$$

$$n_x = n_y = 0 \quad \text{on } \bar{S}_F \quad (27)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = K \varphi \quad \text{on } \bar{S}_F \quad (28)$$

があることに注意すると前章と同型の結果を得る。

$$\bar{F}_j = \frac{\rho}{2} \iint_{S_\infty} \left\{ \frac{\partial \nabla_j \Phi}{\partial n} \Phi - \nabla_j \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} dS \quad (29)$$

$$= \frac{\rho g}{4K} Re \iint_{S_\infty} \left\{ \frac{\partial \nabla_j \varphi^*}{\partial n} \varphi - \nabla_j \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS \quad (30)$$

$$= \frac{\rho g}{4K} Re \iint_{\bar{S}_H} \left\{ \nabla_j \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \nabla_j \varphi^*}{\partial n} \varphi \right\} dS \quad (31)$$

5. 結 論

本論文では、線形ポテンシャル理論の範疇で、運動量定理から定常波漂流力の相反的な遠場表示を導き、Green の第2公式を介して相反的な近場表示を導いた。Maruo の公式や Newman の公式に比べ計算に便利な形とは言えないが、波漂流力・漂流モーメントは同じ形で表現されており、流速・角速度と速度ポテンシャルのペアに対して Green の公式を適用することと運動量定理あるいは定常波漂流力・モーメントが関係していることは興味深いと思われる。

参 考 文 献

- 1) 柏木正 (1999) 特集「よくわかる海事流体力学」第6章 船舶・海洋構造物の動揺を計算する, TECHNO MARINE 日本造船学会誌, 第845号, pp. 815-825.
- 2) 高木又男, 新井信一 (1996) 船舶・海洋構造物の耐波理論, 成山堂書店.
- 3) 別所正利 (1965) 波の中の船の横揺れ運動の理論について, 防大理工学研究報告, 3(1), pp. 47-59.
- 4) Newman, J. N. (1975) Interaction of Waves with Two-Dimensional Obstacles: A Relation Between the Radiation and Scattering Problems, J. of Fluid Mechanics, Vol. 71, pp. 273-282.
- 5) Kashiwagi, M. (2006) Wave Reflection and Transmission by an Antisymmetric Floating Body in Regular Waves, Proceedings of 2nd PAAMES and AMEC2006, pp. 50-60.
- 6) 坪郷尚 (2007) 浮体に作用する波漂流力の定常成分について, 日本船舶海洋工学会論文集, 5, pp. 143-153.
- 7) Newman, J. N. (1977) Marine Hydrodynamics, pp. 290-294, Cambridge MIT Press.

- 8) Maruo, H. (1960) The Drift of a Body Floating on Waves, J. Ship Res., Vol. 4, pp. 1-10.
- 9) Newman, J. N. (1967) The Drift Force and Moment on Ships in Waves, J. Ship Res., Vol. 11, No. 1, pp. 51-60.

Appendix

A. 無限水深の時の浮体に作用する波漂流力 (2次元)

2次元無限水深の場合を考える。奥行きが dx の直方体検査領域を設定し (Fig. 2), 平面入射波は $+y$ 方向に進行しているとす。運動量定理より y 方向の定常波漂流力 \bar{F}_y は以下のように表せる⁸⁾。

$$\begin{aligned} \bar{F}_y &= - \overline{\iint_{S_\infty+S_{-\infty}} \left\{ pn_y + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} dS} \\ &= - \overline{\iint_{S_\infty} \left\{ p + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\} dS} \\ &\quad - \overline{\iint_{S_{-\infty}} \left\{ p(-1) + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial(-y)} \right\} dS} \\ &= \overline{\iint_{S_{-\infty}-S_\infty} \left\{ p + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\} dS} \end{aligned} \tag{32}$$

これに2次元のBernoulliの式を代入して、 z 方向流速の項を部分積分すると

$$\begin{aligned} \bar{F}_y &= \overline{\iint_{S_{-\infty}-S_\infty} \left\{ -\rho gz - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} dS} + \\ &\quad \overline{\iint_{S_{-\infty}-S_\infty} \left\{ -\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\} dS} \\ &= dx \cdot \left[-\rho g \frac{\zeta^2}{2} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \zeta \right]_{y=\infty, z=0}^{y=-\infty, z=0} - \frac{\rho}{2} dx \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Phi \right]_{y=\infty, z=0}^{y=-\infty, z=0} \\ &\quad + \frac{\rho}{2} dx \left[\int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + K^2 \Phi \Phi \right) dz \right]_{y=\infty}^{y=-\infty} \end{aligned}$$

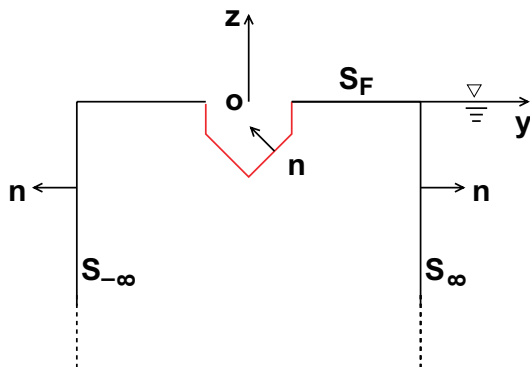


Fig. 2 Coordinate system, control surface and unit normal vector

$$\begin{aligned} &= \frac{\rho dx}{2} \overline{\left[\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - K^2 \Phi \Phi \right]_{y=\infty, z=0}^{y=-\infty, z=0}} \\ &\quad + \frac{\rho dx}{4K} \overline{\left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + K^2 \Phi \Phi \right]_{y=\infty, z=0}^{y=-\infty, z=0}} \end{aligned} \tag{33}$$

ここで、遠方での Φ の z 依存性が e^{Kz} の形であることを用いている。速度ポテンシャル Φ を式 (11) のように変数分離し複素数で表示すると、式 (33) の最初の項は消える。

$$\bar{F}_y = \frac{\rho g dx}{8K^2} Re \left[\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + K^2 \varphi^* \varphi \right]_{y=\infty, z=0}^{y=-\infty, z=0} \tag{34}$$

さらに速度ポテンシャルの遠方での表示

$$\varphi = \zeta_I e^{iKy} + \zeta_R e^{-iKy} \quad \text{at } y = -\infty, z = 0 \tag{35}$$

$$\varphi = \zeta_T e^{iKy} \quad \text{at } y = \infty, z = 0 \tag{36}$$

を代入して、エネルギー保存則:

$$|\zeta_R|^2 + |\zeta_T|^2 = \zeta_I^2 \tag{37}$$

を用いると Maruo の公式が得られる。

$$\bar{F}_y = \frac{\rho g dx}{2} \zeta_R^* \zeta_R \tag{38}$$

一方で、式 (30) において $dS = dz dx$, $j = 2$ として

$$\begin{aligned} \bar{F}_y &= - \frac{\rho g}{4K} Re \iint_{S_\infty+S_{-\infty}} \left\{ \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \varphi \right\} dS \\ &= - \frac{\rho g}{4K} Re \iint_{S_{-\infty}} \left\{ \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial(-y)} - \frac{\partial}{\partial(-y)} \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \varphi \right\} dS \\ &\quad - \frac{\rho g}{4K} Re \iint_{S_\infty} \left\{ \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \varphi \right\} dS \\ &= \frac{\rho g}{4K} Re \iint_{S_{-\infty}-S_\infty} \left\{ \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \varphi \right\} dS \\ &= \frac{\rho g}{8K^2} Re \left[\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \varphi \right]_{y=\infty, z=0}^{y=-\infty, z=0} dx \\ &= \frac{\rho g}{8K^2} Re \left[\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + K^2 \varphi^* \varphi \right]_{y=\infty, z=0}^{y=-\infty, z=0} dx \end{aligned} \tag{39}$$

最後の等式は遠方の解 (35)(36) を y で偏微分している。式 (39) は式 (34) に等しい。