追波中における波乗り発生の閾値を表す大域的分岐点の推定

学生員　牧　　敦　生*　　正員　梅　田　直　哉*
正員　　堀　　正　寿*

Prediction of Global Bifurcation Points as Surf-Riding Threshold in Following Seas

by　Atsuo Maki, *Student Member*　Naoya Umeda, *Member*
Masatoshi Hori, *Member*

Summary

Surf-riding is a prerequisite for broaching-to, which is a major threat to ship capsizing. So far it had been revealed that the threshold of surf-riding is a heteroclinic bifurcation, a kind of global bifurcation. In this research numerical methods identifying the global bifurcation were investigated for predicting a threshold of surf-riding of a ship in following seas. Firstly, the Newton method focusing on the propeller revolution number was applied and then numerical examples were successfully provided. Secondly, for explicitly utilizing other unknown variables, the multi-valued Newton method was developed. Thirdly, for improving efficiently, a method avoiding backward integration in time was proposed based on an analytical investigation, and was confirmed to improve the convergence. Finally, the method was validated with the existing free-running model experiments. It was concluded that these methodology can be used for developing a ship-specific operational guidance as an alternative to IMO's ship-independent guidance.

1. 緒　　言

艦艇や漁船などの高フルード数の船舶が追波中を航行する際、波乗り状態での操縦不能現象をおこすことは古くから経験的に知られてきた。事実、実船の追波中操縦不能現象の発生報告 [1] も多く、自由航走模型実験においてもその発生が確認されている [2]。このような追波中の操縦不能現象はブローチングと呼ばれ、国際海事機関 (IMO) の定める非損傷時復原性基準を満足する船舶においても、大規模な横傾斜や転覆などの危険な現象の引き金になることから、海事関係者にとっては無視し得ない重大な脅威であるとの認識が高まっている。このようなブローチング現象に対する研究は古くより行われ、その発生の必要条件が波乗り現象であることも広く知られるとおりである。実際に IMO の操船指針では、追波中の波乗り現象を回避するための操船ガイダンス（MSC.1/Circ, 1228）が定められているが、標準船についての位相面解析から求められた波乗り限界により定められたものにすぎず、個々の船について厳密に波乗り限界を判定できるわけではない。そこで本論では、波乗り限界を、想定した様々な海象条件について効率的に求め、個々の船舶を対象に追波航行の際の操船指針を提供しうる方法論を示すことを目的とした。

本論のような規則波中における波乗り発生条件の理論的検討は Grim [3] により始められたということができる。Grim は、波乗りの発生限界が、不安定波乗り平衡から別の不安定波乗り平衡に移るケースにあることを示した。これは波乗り発生がヘテロクリニック分岐という大域的分岐現象によって表されることに他ならない [4]。よって Makov [5]、梅田ら [6] や菅 [7] は位相面解析を行うことで波乗り限界を求めうることを示し、現在の IMO 操船ガイダンスの基礎となった。また Ananiev [8] は前後揺れ方程式の近似解析解により、Spyrou [9] は近似前後揺れ方程式の厳密解から波乗り限界を求めている。このように追波中の波乗りの研究は進んでいるが、方程式の形に制約を設けず、かつ効率的に分岐限界を求める方法論を体系的に示すことは行われていない。そこで本論ではこの観点に基づき、追波中を航行する船舶に対し、波乗り発生の閾値を表すヘテロクリニック分岐点を体系的に求める手法を提案した。そして、その手法を用いた計算を行い、追波中を航行する船舶に対し、その安全を担保するための操船指針策定に用いるツールとなりうることを確認した。以下ご報告し、ご批判を仰ぐ次第である。

*　大阪大学大学院工学研究科

原稿受理　平成 19 年 4 月 3 日

2. 対象船

本研究は、ある135トン型まき網漁船（網船）を対象として行われた。これはITTCの復原性数値シミュレーションのベンチマークテストに用いられた船（ITTC Ship A-2）であり、その船体正面線図をFig.2.1に、主要目をTable.2.1に示す。

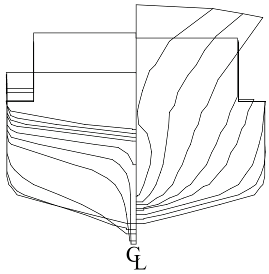

Fig.2.1　Body plan of the 135GT purse seiner.

Table.2.1　Principal particulars of the 135GT purse seiner.

Items	Values
Length	34.5 m
Breadth	7.60 m
Draught	2.65 m
Block Coefficient	0.597

3. 追波中船体運動の力学系

3. 1　数学モデルについて

本論で用いたモデルは、船体抵抗、推進器推力、線形のFroude-Krylov 力による波浪強制力から成り立っている。プロペラ回転数nは時間的に一定と仮定し、ノミナルフルード数という概念を用いて表示する。これはその回転数により平水中を自航する速度を、垂線間長Lと重力加速度gにより無次元化したフルード数Fnである。

3. 2　数学モデル

3. 2. 1　座標系

本論で用いる数学モデルの座標系をFig.3.1に示す。

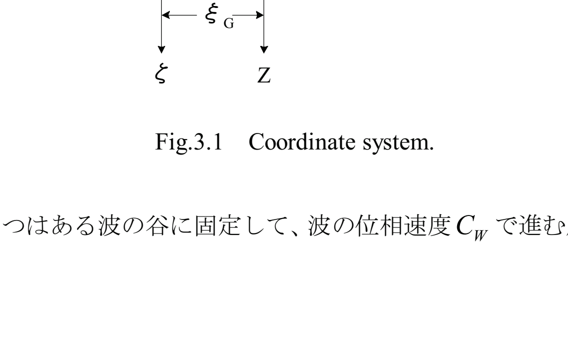

Fig.3.1　Coordinate system.

1つはある波の谷に固定して、波の位相速度C_Wで進む座標系$o-\xi\zeta$と、もう一方は船体重心に固定した座標系$O-XZ$である。そして、波の谷から船体重心までの距離をξ_Gとし、波長λとの比で波と船の相対位置を表す。

3. 2. 2　状態方程式

追波中船体運動を表す運動方程式は (3.1) 式で与えられるとする。ただし式中、ドットは時間による微分を表す。

$$(m+m_x)\dot{u} = T(u;Fn) - R(u) + X_w(\xi_G/\lambda) \tag{3.1}$$

ここで状態変数を (3.2) 式と定める。

$$\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)^T \equiv (\xi_G/\lambda, u)^T \tag{3.2}$$

これより船体運動を表す力学系は、(3.3) 式に示す状態方程式により支配されることになる。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x};Fn) = \left(f_1(\mathbf{x};Fn), f_2(\mathbf{x};Fn)\right)^T \tag{3.3}$$

式中、右辺のベクトル要素は (3.4) 式に従う。

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x};Fn) &= (u - C_W)/\lambda \\ f_2(\mathbf{x};Fn) &= \{T(u;Fn) - R(u) + X_w(\xi_G/\lambda)\}/(m+m_x) \end{aligned} \tag{3.4}$$

3. 2. 3　船体抵抗と推力

プロペラ推力Tは (3.5) 式で定義されるプロペラの前進定数Jを用いて (3.6) 式により表現できる。

$$J \equiv \frac{(1-w_p)u}{nD_p} \tag{3.5}$$

$$T = (1-t_p)\rho n^2 D_p^4 K_T(J) \tag{3.6}$$

また船体抵抗Rは、(3.7) 式に示すように、全抵抗係数C_Tに基づき計算される。ただし本船の抵抗試験データ 6) はFn=0.55までしか存在しなかったため、それ以後は直線で増加するとの仮定を施している。その値の妥当性に関しては、本論の性格上問題にならないと判断した。

$$R = \frac{1}{2}\rho u^2 S_F C_T(F_n) \tag{3.7}$$

3. 2. 4　波浪強制力

前後方向波浪強制力はFroude-Krylov 力により次式のごとく推定する。ここでAEとFEは、各々没水船体の後端と先端を表す。

$$X_w(\xi_G/\lambda) = -\rho g \zeta_w k \times \int_{AE}^{FE} S(x) e^{-kd(x)/2} \sin k(\xi_G + x) dx \tag{3.8}$$

4. プロペラ回転数のみを陽に未知数とした解法

4. 1 計算アルゴリズム

この章ではプロペラ回転数のみを未知変数として陽に扱う Newton 法を用いた計算アルゴリズムと、それにより得た計算結果を示す。この手法を用いたヘテロクリニック分岐点の探索では、平衡点の計算、固有値解析、固有ベクトルの計算、積分軌道の計算をシーケンシャルに行う必要がある。

まず、あるノミナルフルード数 $Fn^{(j)}$ を仮定する。以下において添え字 j を計算反復数を示す自然数として定義する。これより平衡点 $\mathbf{x}^{(j)}$ は (4.1) 式を満たすものとして容易に定まる。

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(j)}; Fn^{(j)}\right) = \mathbf{0} \tag{4.1}$$

このとき一般的に、(4.1) 式を満たす 2 つの平衡点のうち、波の谷付近に存在するものは安定な挙動を示し、また波の山付近に存在する平衡点は不安定な挙動を示す。この不安定な挙動を示す平衡点における固有値を計算すると、1 つは安定であり、もう一方は不安定となることから鞍型（サドル型）平衡点となる。次に、鞍型平衡点 $\mathbf{G}_0 \equiv (G_0, C_W)^T$ の不安定な固有ベクトル方向に微小長さだけずらした点を初期値とした正時間積分を行う。またそれとは別に、1 つ隣に存在する鞍型平衡点 $\mathbf{G}_1 \equiv (G_1, C_W)^T$ より安定な固有ベクトル方向に微小長さだけずらした点を初期値とした逆時間積分を行う。ただし G_0 と G_1 はそれぞれの平衡点の状態変数 ξ_G/λ を表す。そして二つの鞍型平衡点の中間において、正逆両時間積分軌道の差を評価関数 $\psi(Fn)$ とし、これが零に近づくように Newton 法を作用させる。まず評価関数 $\psi(Fn)$ を (4.1) 式に示す。

$$\psi(Fn) \equiv u/C_W\big|_{\xi_G/\lambda = G_0 - 0.5} - u/C_W\big|_{\xi_G/\lambda = G_1 + 0.5} \tag{4.1}$$

このときの計算において、評価関数 $\psi(Fn)$ が (4.2) 式に示す如く、定められた零近傍の数値誤差 $\varepsilon_\psi > 0$ に落ち着いたことをもって、ヘテロクリニック分岐点が形成されたとみなすことができる。

$$\|\psi(Fn)\| < \varepsilon_\psi \tag{4.2}$$

ここで用いる Newton 法は下式群の計算に従う。ただし (4.5) 式中の Δ は数値的に評価関数の傾きを計算するための、微小なフルード数を表している。

$$Fn^{(j+1)} = Fn^{(j)} + h \tag{4.5}$$

$$h = -\frac{\psi\left(Fn^{(j)}\right)}{\psi'\left(Fn^{(j)}\right)} \tag{4.6}$$

$$\psi'\left(Fn^{(j)}\right) \equiv \frac{\partial \psi}{\partial Fn}\bigg|_j = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\psi\left(Fn^{(j)} + \Delta\right) - \psi\left(Fn^{(j)}\right)}{\Delta} \tag{4.7}$$

4. 2 ヘテロクリニック分岐点探索結果

4. 2. 1 下限ヘテロクリニック分岐点

Fig.4.1 に **4. 1** に示した解法を用いて計算されたヘテロクリニック分岐点である、 $\mathrm{Fn} = 0.3483$ における正逆の両積分軌道を示す。海象条件は波長船長比を $\lambda/L = 1.5$ 、波岨度を $H/\lambda = 0.0667$ とした。同図に示したのはひとつ後ろの鞍型平衡点との間で形成されるヘテロクリニック軌道であり、これはフルード数がやや速い領域に現れるものである。本論ではこれを下限ヘテロクリニック分岐点と称する。

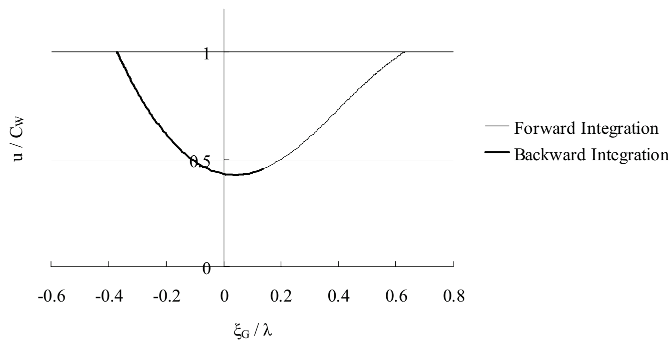

Fig.4.1 Lower heteroclinic connection at Fn=0.3483.

Fig.4.1 より 2 つの積分軌道が中間において一致し、ヘテロクリニック軌道を形成していることがうかがえる。

ここで、得られた分岐点に相当するプロペラ回転数より僅かに上下させた値に対して得た位相面軌道を Fig.4.2 に示す。

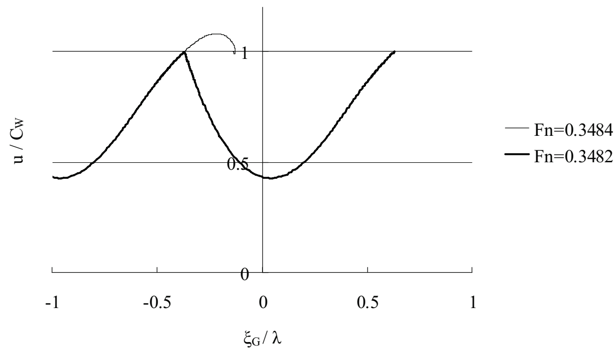

Fig.4.2 Comparison of phase trajectories.

Fig.4.2 より、分岐点より高いプロペラ回転数では波乗りを起こし､逆に低い回転数では周期的に波に追い抜かれていることが理解できる。このことは、この系がヘテロクリニック分岐点を境に､定性的に異なる現象を起こしていることを例示している。

4. 2. 2　上限ヘテロクリニック分岐点

前節では、1 つ後ろの鞍型平衡点との間に形成されるヘテロクリニック軌道を求めたが､この節では 1 つ前の鞍型平衡点との間に形成されるヘテロクリニック軌道を求める。これは船速が極めて速い領域で現れるものであり､前節で示した分岐点との分類の便宜上､本論ではこれを上限ヘテロクリニック分岐点と呼ぶ。ただし上限ヘテロクリック分岐点は、抵抗試験データを外挿した範囲での解を求めているため､その値の妥当性に関する保証はない。しかしながら、この速度域の抵抗試験結果が存在すれば､本論で示した方法論を適用することで実際の計算が可能である。したがってこの節は、あくまでこの目的から述べられたものであることに注意されたい。

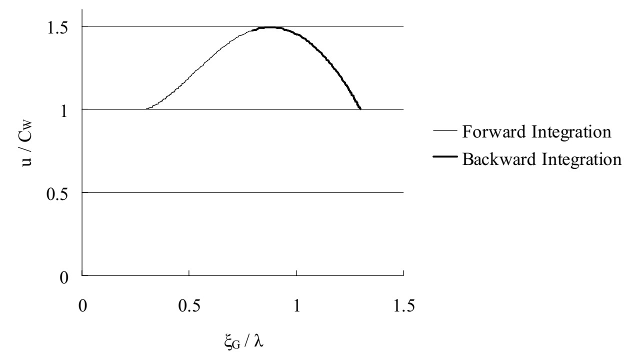

Fig.4.3　Upper heteroclinic bifurcation with Fn=0.6552.

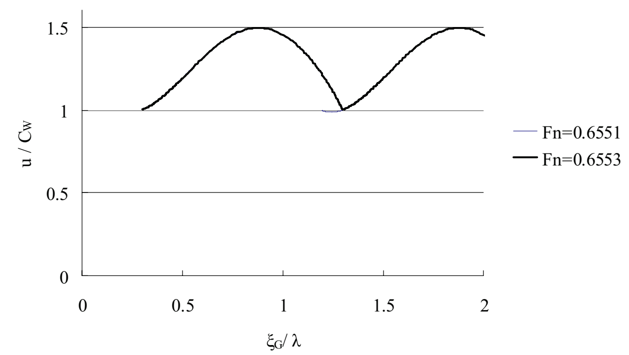

Fig.4.4　Comparison of phase trajectories.

Fig.4.3 に上側ヘテロクリニック分岐点 $\mathrm{Fn}=0.6552$ における正逆の両積分軌道を示す。海象条件は **4. 2. 1** と同一である。探索手法は **4. 1** に従うが、上限ヘテロクリニック分岐点は、下限ヘテロクリニック分岐点とは積分の方向が異なっており、1 つ前の平衡点との間に形成されたものであることが Fig.4.3 より理解できる。

ここで､得られた分岐点に相当するプロペラ回転数より僅かに上下させた値に対して得た位相面軌道を Fig.4.4 に示す。この図より､分岐点より高いプロペラ回転数では周期的に波を追い抜き､逆に低い回転数では波乗りを起こしていることが理解できる。

5.　すべての未知変数を陽に考慮した Newton 法

5. 1　定式化

4 章ではノミナルフルード数のみを陽に考慮した Newton 法を適用し、ヘテロクリニック分岐点を求めた。しかしながら､この手法はノミナルフルード数以外の未知変数の情報を陽に利用しておらず､数学的に洗練されているとはいえない。そこでこの章では、川上ら [10] の示したすべての未知変数を陽に考慮した Newton 法を追波中の問題に適用し、ヘテロクリニック分岐点を求める。

まずは定式化より始める。(3.3) 式の力学系において、鞍型平衡点を $\mathbf{x}_0 \equiv (G_0, u_0)^T$ 、 $\mathbf{x}_1 \equiv (G_1, u_1)^T$ と定義すれば、(5.1) 式の平衡点条件を得る。

$$\begin{cases} f_1(C_W)=0 \\ f_2(G_0,C_W)=0 \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} f_1(C_W)=0 \\ f_2(G_1,C_W)=0 \end{cases} \tag{5.1}$$

今平衡点近傍領域において､この力学系を局所線形化すると (5.2) 式となる。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_\alpha \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_\omega \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}_1) \end{cases} \tag{5.2}$$

式中 $\mathbf{A}_\alpha$ 、$\mathbf{A}_\omega$ は次式で与えられる。ただし $G \equiv \xi/\lambda$ とする。

$$\begin{cases} \mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\lambda \\ \dfrac{\partial f_2(G_0,C_W)}{\partial G} & \dfrac{\partial f_2(G_0,C_W)}{\partial u} \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}_\omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\lambda \\ \dfrac{\partial f_2(G_1,C_W)}{\partial G} & \dfrac{\partial f_2(G_1,C_W)}{\partial u} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{5.3}$$

ここで、$\mathbf{A}_\alpha$ に関する固有値のうちで実部が正のものを μ_α 、$\mathbf{A}_\omega$ に関する固有値のうちで実部が負のものを μ_ω とする。そして各々に対応した固有ベクトルを $\mathbf{h}_\alpha$ と $\mathbf{h}_\omega$ とする。そし

て $\mathbf{x}_0$ に関する不安定多様体（α －枝）と、$\mathbf{x}_1$ に関する安定多様体（ω －枝）上にそれぞれ $\mathbf{x}_\alpha$ と $\mathbf{x}_\omega$ という点を、各々 $\mathbf{x}_0$ と $\mathbf{x}_1$ の近傍に配置する。これら固有ベクトルと、平衡点近傍の点は (5.4) 式にて関係づけられる。

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_\alpha &\equiv \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_0 = (G_\alpha, u_\alpha)^T \\ \mathbf{h}_\omega &\equiv \mathbf{x}_\omega - \mathbf{x}_1 = (G_\omega, u_\omega)^T\end{aligned} \tag{5.4}$$

また $\mathbf{h}_\alpha$ と $\mathbf{h}_\omega$ は固有ベクトルの条件として、次の方程式を満足している。

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}_\alpha - \mu_\alpha \mathbf{I})\cdot\mathbf{h}_\alpha = \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}_\omega - \mu_\omega \mathbf{I})\cdot\mathbf{h}_\omega = \mathbf{0}\end{aligned} \tag{5.5}$$

(5.5) 式左辺の行列部に、逆行列が存在すると $\mathbf{h}_\alpha$ と $\mathbf{h}_\omega$ が零ベクトルになるため題意に矛盾する。したがって、以下の条件が必要となる。

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\alpha_{11}-\mu_\alpha & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\mu_\alpha\end{pmatrix} = 0 \\ \det\begin{pmatrix}\omega_{11}-\mu_\omega & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22}-\mu_\omega\end{pmatrix} = 0\end{aligned} \tag{5.6}$$

上式を展開すれば (5.7) 式を得る。ただし式中、D_α と D_ω は (5.8) 式で表される。

$$\begin{aligned}2\mu_\alpha - (\alpha_{11}+\alpha_{22}) - \sqrt{D_\alpha} = 0 \\ 2\mu_\omega - (\omega_{11}+\omega_{22}) + \sqrt{D_\omega} = 0\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}D_\alpha \equiv (\alpha_{11}+\alpha_{22})^2 - 4(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) \\ D_\omega \equiv (\omega_{11}+\omega_{22})^2 - 4(\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21})\end{aligned} \tag{5.8}$$

さらに $\mathbf{h}_\alpha$ と $\mathbf{h}_\omega$ は (5.5) 式より (5.9) 式を満たす。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\alpha_{11}-\mu_\alpha & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\mu_\alpha\end{pmatrix}\cdot\mathbf{h}_\alpha = \mathbf{0} \\ \begin{pmatrix}\omega_{11}-\mu_\omega & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22}-\mu_\omega\end{pmatrix}\cdot\mathbf{h}_\omega = \mathbf{0}\end{aligned} \tag{5.9}$$

(5.9) 式を展開すると、固有ベクトルの条件として (5.10) 式を得る。

$$\begin{aligned}(\alpha_{11}-\mu_\alpha)G_\alpha + \alpha_{12}u_\alpha = 0 \\ (\omega_{11}-\mu_\omega)G_\omega + \omega_{12}u_\omega = 0\end{aligned} \tag{5.10}$$

これだけでは固有ベクトルを一意に決定することはできないので、ベクトルの大きさをこちらで指定する必要がある。よって微少量 δ に対する規格化条件 (5.11) 式を用意する。

$$\begin{aligned}G_\alpha{}^2 + u_\alpha{}^2 = \delta^2 \\ G_\omega{}^2 + u_\omega{}^2 = \delta^2\end{aligned} \tag{5.11}$$

最後に、ヘテロクリニック軌道形成の条件として、不安定多様体と安定多様体をなす積分軌道が 2 つの平衡点間において接合する条件が必要である。軌道の接合を表す概念図を Fig.5.1 に示す。

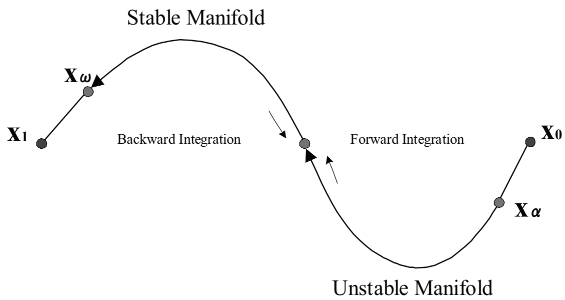

Fig.5.1　Notion of heteroclinic bifurcation.

いま、積分軌道を $(\varphi,\psi)^T$ と定めると、この条件は (5.12) 式となる。式中、第一項は正時間積分を、第二項は逆時間積分を表している。

$$\begin{aligned}\varphi(\tau, G_\alpha, u_\alpha; Fn) - \varphi(-\tau, G_\omega, u_\omega; Fn) = 0 \\ \psi(\tau, G_\alpha, u_\alpha; Fn) - \psi(-\tau, G_\omega, u_\omega; Fn) = 0\end{aligned} \tag{5.12}$$

以上の条件群をまとめると、(5.13) 式に示すように、10 元非線形連立方程式になる。

$$\mathbf{W}(\mathbf{X}) \equiv (W_1, W_2, \cdots, W_9, W_{10})^T = \mathbf{0} \tag{5.13}$$

連立方程式のそれぞれの要素は (5.14) 式にて表される。

$$\begin{aligned}
&W_1 : \{T(c_W; n) - R(c_W) + X_W(G_0)\}/(m+m_x) = 0 \\
&W_2 : \{T(c_W; n) - R(c_W) + X_W(G_1)\}/(m+m_x) = 0 \\
&W_3 : 2\mu_\alpha - (\alpha_{11}+\alpha_{22}) - \sqrt{D_\alpha} = 0 \\
&W_4 : 2\mu_\omega - (\omega_{11}+\omega_{22}) + \sqrt{D_\omega} = 0 \\
&W_5 : (\alpha_{11}-\mu_\alpha)G_\alpha + \alpha_{12}u_\alpha = 0 \\
&W_6 : (\omega_{11}-\mu_\omega)G_\omega + \omega_{12}u_\omega = 0 \\
&W_7 : G_\alpha{}^2 + u_\alpha{}^2 - \delta^2 = 0 \\
&W_8 : G_\omega{}^2 + u_\alpha{}^2 - \delta^2 = 0 \\
&W_9 : \varphi(\tau, G_\alpha, u_\alpha; Fn) - \varphi(-\tau, G_\omega, u_\omega; Fn) = 0 \\
&W_{10} : \psi(\tau, G_\alpha, u_\alpha; Fn) - \psi(-\tau, G_\omega, u_\omega; Fn) = 0
\end{aligned} \tag{5.14}$$

未知変数は (5.15) 式に示すように $\dim \mathbf{X} = 10$ となる。

$$\mathbf{X} = \left(G_0, G_1, \mu_\alpha, \mu_\omega, G_\alpha, u_\alpha, G_\omega, u_\omega, \tau, Fn\right)^T \qquad (5.15)$$

このような非線形連立方程式を解くためにはNewton法を用いる必要がある。Newton法のアルゴリズムは (5.16) 式で表されるものになる。 $\mathbf{s}$ は各ステップにおける更新量である

$$\mathbf{X}^{(j+1)} = \mathbf{X}^{(j)} + \mathbf{s} \qquad for \;\; j = 0, 1, 2, \cdots \qquad (5.16)$$

ここで、更新量 $\mathbf{s}$ は (5.17) 式で計算される。この公式は多変数ベクトル値関数に対する Taylor 展開を $\mathbf{W}(\mathbf{X})$ に対して行い、二次以上の高次項を無視することにより導かれるものである。

$$\frac{\partial \mathbf{W}\left(\mathbf{X}^{(j)}\right)}{\partial \mathbf{X}} \cdot \mathbf{s} = -\mathbf{W}\left(\mathbf{X}^{(j)}\right) \qquad for \;\; j = 0, 1, 2, \cdots \qquad (5.17)$$

以上がすべての未知変数を陽に扱うNewton法を用いた大域的分岐点探索法である。

このような非線形連立方程式は、大域的な収束性が保障されないことから、Newton 法の初期値として、真の解に対する近似値を与える必要がある。そのため、位相面解析を行い試行錯誤により近似値を与えなければならない。しかしながら、パラメータを逐次変化させた連続的な解の追跡を行う場合には、1つ前のパラメータに対するすべての変数を引き継いで用いることができるため、**4. 1** の解法に比して大変効率的に分岐点の探索を行うことが可能となる。

5. 2　計算例

5. 1 に示した解法を適用して得た結果を Figs.5.2-5.3 に示す。海象条件は **4. 2. 1** と同一である。Fig.5.2 は初期値として与えたノミナルフルード数が Fn=0.3483 に収束する振る舞いを示し、また Fig.5.3 は増分ベクトル $\mathbf{s}$ のノルムが零に漸近する様子を表している。

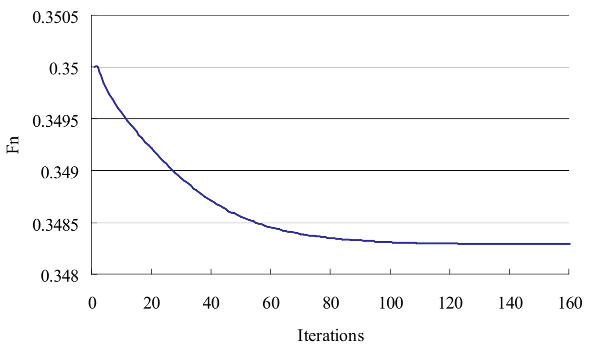

Fig.5.2　Behavior of Fn.

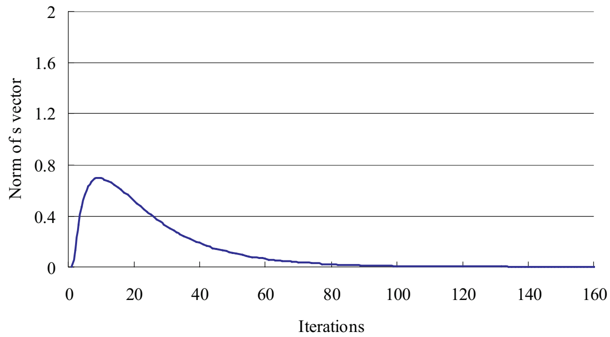

Fig.5.3　Descent behavior of norm of $\mathbf{s}$.

得られた結果は、**4. 2. 1** で計算されたものと同一である。したがって、このようなすべての未知変数を陽に扱う Newton 法を用いたアルゴリズムによりヘテロクリニック分岐点が探索可能であることが確認されたわけであるが、同時に計算の反復回数が大変多いことも理解できる。

6. 改良された分岐点探索法

6. 1　定式化

5. 1 に示した手法はすべての未知変数を陽に扱う Newton 法であり、**4. 1** で用いたプロペラ回転数のみを陽に未知数とした解法とは異なり、数学的に整備されたものであると考えられる。しかしながら、この手法には必ずしも考慮しておくべき必要の無い変数が含まれているとも考えられる。すなわち、この問題では1つ前、もしくは1つ後ろの平衡点との間に形成されるヘテロクリニック軌道を求めることを目的としている。したがって、この問題では (6.1) 式が必ず成立している。

$$G_1 = G_0 \pm 1 \qquad (6.1)$$

また、平衡点近傍には様々な方向より軌道が収束するため、逆時間積分を行うことは好ましいことではない。すなわち、少しの数値誤差に対して積分軌道が大きく変化することが起こりえるのである。（Appendix 参照。）したがって効率的な分岐点の探索のためには、逆時間積分をアルゴリズムより除外することが求められる。幸運なことに、本論で扱ったような二次元自律系では、鞍型平衡点に近づく軌道は、安定多様体方向のみであるため、正時間積分が軌道に近づくことのみをもって、ヘテロクリニック軌道が形成されたと考えることができる。

以上の観点から、未知変数を整理すると (6.2) 式となる。

$$\mathbf{X} = \left(G_0, \mu_\alpha, G_\alpha, u_\alpha, Fn\right)^T \qquad (6.2)$$

$\dim \mathbf{X} = 5$ より、これに等しい数の方程式は次式となる。

$$
\begin{aligned}
&W_1 \ : \{T(c_W ; n) - R(c_W) + X_W(G_0)\} / (m + m_x) = 0 \\
&W_2 \ : 2\mu_\alpha - (\alpha_{11} + \alpha_{22}) - \sqrt{(\alpha_{11} + \alpha_{22})^2 - 4(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})} = 0 \\
&W_3 \ : (\alpha_{11} - \mu_\alpha) G_\alpha + \alpha_{12} u_\alpha = 0 \\
&W_4 \ : G_\alpha{}^2 + u_\alpha{}^2 - \delta^2 = 0 \\
&W_5 \ : \{G_t - (G_0 - 1)\}^2 + (u_t - C_W)^2 = 0
\end{aligned}
\qquad (6.3)
$$

式中、$(G_t, u_t)^T$ は正時間積分軌道が平衡点に最も接近したときの、位相面上における座標を示している。よって第 5 式は軌道と平衡点の接合条件となる。

6. 2　ヘテロクリニック分岐点探索結果

6. 2. 1　下限ヘテロクリニック分岐点

海象条件をこれまでと同様、波長船長比を $\lambda / L = 1.5$ 、波岨度を $H / \lambda = 0.0667$ とし、この解法を用いて得られた結果を Figs.6.1-6.2 に示す。Fig.6.1 は初期値として与えたノミナルフルード数が Fn=0.3483 に収束する振る舞いを示し、また Fig.6.2 は増分ベクトル $\mathbf{s}$ のノルムが零に漸近する様子を表している。

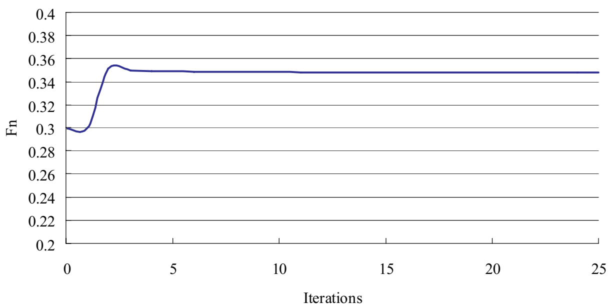

Fig.6.1　Behavior of Fn.

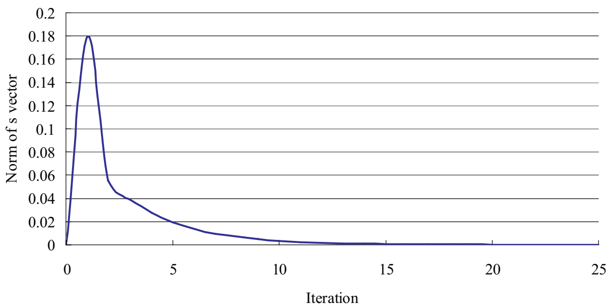

Fig.6.2　Descent behavior of norm of $\mathbf{s}$.

この結果より、**5. 1** で説明したオリジナルの解法に比して、このアルゴリズムでは収束までに要する反復計算の回数が大変少なくなっていることが理解できる。

Newton 法の収束がきわめて速いことから、この解法は連続的な分岐点の探索に用いることが可能である。Fig.6.3 は、波岨度 $H / \lambda = 0.07$ の海象条件下で波長船長比 λ / L を順次変化させて求めた結果である。この計算は、パラメータを変化させた際、その前のパラメータに対する計算によって得た 5 つの変数値のすべてを引き継いで計算するため、大変効率的に分岐点を探索可能となる。

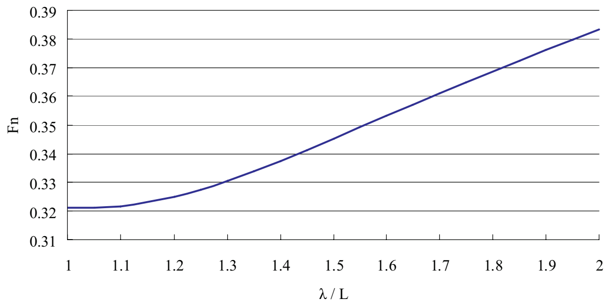

Fig.6.3　Lower heteroclinic bifurcation points for various wave lengths.

6. 2. 2　上限ヘテロクリニック分岐点

上限ヘテロクリニック分岐点の探索においても収束性が良好であることを確認のうえ、前節と同じく波岨度を $H / \lambda = 0.07$ と固定し、波長船長比 λ / L を順次変化させて連続的に分岐点を探索した結果を Fig.6.4 に示す。

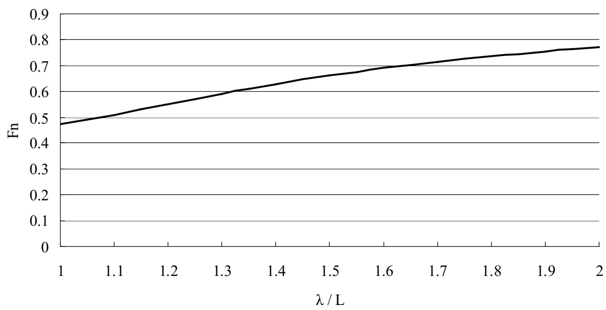

Fig.6.4　Upper heteroclinic bifurcation points for various wave lengths.

6. 3　分岐点の網羅的計算

6. 2 に示したように、改良された手法を用いれば分岐点の波長船長比に対する連続的な追跡が可能となる。さらに波高影響を明らかにするため、変数を (6.4) 式と定義しなおすと、$\mathbf{W}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ は $\mathbf{W} : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ となることより、ヘテロクリニック分岐点の集合は二次元多様体となる。

$$
\mathbf{X} = (G_0, \mu_\alpha, G_\alpha, u_\alpha, Fn, \lambda / L, H / \lambda)^T \qquad (6.4)
$$

この探索を行った結果得られた下限ヘテロクリニック分岐集合のなす多様体を Fig.6.5 に、上限ヘテロクリニック分岐集合のなす多様体を Fig.6.6 に示す。

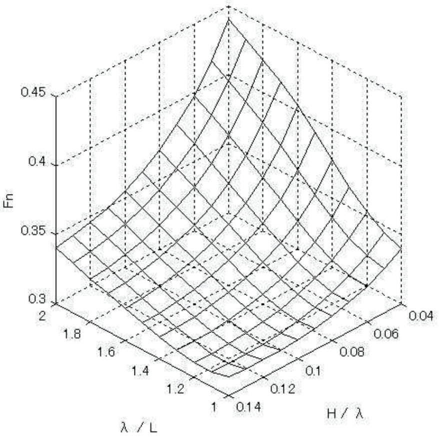

Fig.6.5　Lower heteroclinic bifurcation manifold.

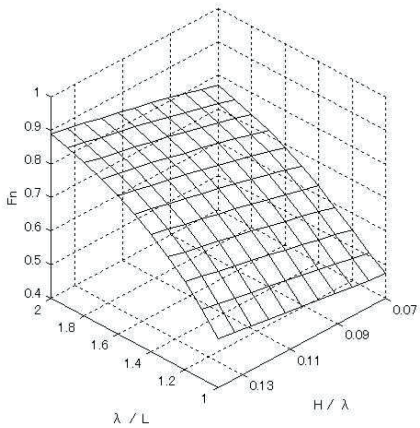

Fig.6.6　Upper heteroclinic bifurcation manifold.

波浪強制力は波高に対して線形としたため、波高の大きな場合では、小さなプロペラ回転数でも波乗りを起こすことが理解できる。この解法を用いることで、船型データとプロペラ単独特性、抵抗試験結果といったデータから、波乗り発生の閾値となるヘテロクリニック分岐点を計算することが可能となる。

7. 実験結果との比較

7. 1　前後方向波浪強制力の修正について

3. 2 に示した数学モデルでは、船体に作用する波浪強制力として、波岨度に対して線形な波力を考えていた。しかし、橋本ら [11] が行った実験によると、波浪強制力の前後方向成分に関しては、波岨度についての非線形性が確認されている。そこで、この実験によって得られた結果をもとに、波岨度に対する非線形影響を考慮したモデルを用いて計算を行う。

いま $X_W^{Nonlinear}$ を非線形波浪強制力、X_W^{Linear} を線形理論により計算された波浪強制力であるとすると、修正式は (7.1) 式となる。

$$X_W^{Nonlinear} = \left\{-29.1 \times (H/\lambda)^2 + 1.0\right\} \cdot X_W^{Linear} \qquad (7.1)$$

7. 2　実験結果との比較

過去に水産工学研究所の角水槽を用いて行われた自由航走試験結果 [12] と、上述の修正を施した追波中船体運動数学モデルを用いて得た計算結果との比較を Fig.7.1 に示す。海象条件は波長船長比 $\lambda/L = 1.637$ 、波岨度 $H/\lambda = 0.1$ とする。

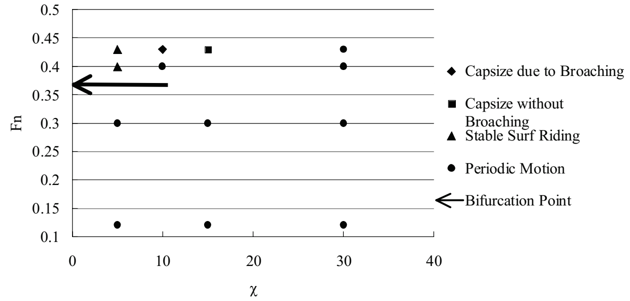

Fig.7.1　Comparison between experimental results and heteroclinic bifurcation point.

同図より、計算により求められたヘテロクリニック分岐点が、波に周期的に追い抜かれる現象と、波乗りやブローチング、転覆などの非周期的な現象を分け隔てていることが理解できる。

この波浪強制力の波岨度に対する非線形性を考慮したモデルに対して、**6. 3** と同様の網羅的計算をした結果を Fig.7.2 に示す。ただし橋本ら [11] の検討では、(7.1) 式を用いるに際し波岨度 $H/\lambda = 0.1$ までこの修正式の正当性を確認したが、それ以上の波岨度に関する検討はなされていないため、計算は波岨度 $H/\lambda = 0.1$ までを上限として行う。

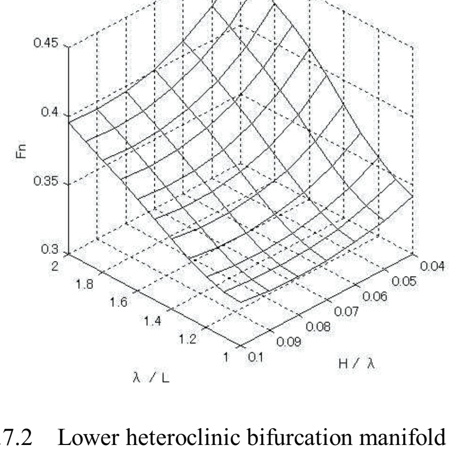

Fig.7.2　Lower heteroclinic bifurcation manifold with nonlinearity of wave induced surge force.

この結果より、波浪強制力の波岨度に対する非線形性を考慮することにより、波乗り限界が上昇することがうかがえる。このように、本論の計算法を用いれば波乗り限界の傾向を網羅的に計算することができ、多様体として分岐点の集合を表すことが可能になる。したがって、このような図を描くことで、波乗りの傾向を容易に把握することが可能になるのである。

8. 結言

追波中船体運動数学モデルに対し、ノミナルフルード数のみを未知変数として陽に扱う Newton 法を適用し、ヘテロクリニック分岐点の探索を行った。その結果得られた下限ヘテロクリニック分岐点が波乗りと、周期的に波に追い抜かれる運動を分け隔てていることを確認した。また上限ヘテロクリニック分岐点も同様の手法を用いて計算された。

また、すべての未知変数を陽に扱う Newton 法を適用して下限ヘテロクリニック分岐点を求め、このときの結果がノミナルフルード数のみを陽に扱う Newton 法と同等の結果を与えることを確認した。さらにこの手法を改良し、収束性を向上させた計算アルゴリズムを適用し、パラメータを変化させた網羅的計算に用いうることを確認した。その結果、波乗り限界の波岨度と波長船長比に対する傾向を捉えることに成功した。この方法は IMO の定める操船指針に代えて個船毎の操船ガイダンスを作成する場合の有力な手段として期待できる。

さらに前後方向波浪強制力の波岨度に対する非線形性を考慮した数学モデルにも同様な方法論を適用し、得られたヘテロクリニック分岐点が、自由航走模型実験結果とよく一致することを確認した。

謝　　辞

徳島大学高度情報化基盤センターの上田哲史准教授より大域的分岐点追跡法に関するご助言を賜った。また本研究の一部は日本学術振興会科学研究費補助金（基盤 B：18360415）によった。ここに記して謝意を表する次第である。

参 考 文 献

1) Saunders, H.E.: Hydrodynamics in Ship Design, Soc Nav Archit Mar Eng, 1965.

2) Nicholson, K. : Some Parametric Model Experiment to Investigate Broaching-to, Proc Int Symp Dynamics of Marine Vehicle and Structure, 1974.

3) Grim, O. : Das Schiff von Achtern Auflaufender See, Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gasellscaft, Vol.45, 1951.

4) Umeda, N. : Nonlinear Dynamics of Ship Capsizing due to Broaching in Following and Quartering seas, Journal of Marine Science and Technology, Vol.4, 1999.

5) Makov, Y. : Some Results of Theoretical Analysis of Surfriding in Following Seas (in Russian). T krylov Soc 126, 1969.

6) 梅田直哉，神山保：規則波中の船の波乗り現象，関西造船協会誌第 213 号，1990.

7) 菅信：追波中の船の大振幅前後揺れと波乗り現象（その 3　位相面解析による検討），日本造船学会論文集第 166 号，1989.

8) Ananiev, DM., Loseva, L. : Vessel's Heeling and Stability in the Regime of Manoeuvaring and Broaching in Following and Quartering Seas, Proceeding of 5th International Conference on Stability of Ships and Ocean Vehicles, Florida Tech Melbourne, Vol.5, 1994.

9) Spyrou, KJ. : Asymmetric Surging of Ships in Following Seas and its repercussions for Safety, Nonlinear Dynamics, Vol.43, 2006.

10) 川上博, 吉永哲也, 上田哲史：力学系の計算機シミュレーション, 応用数理, Vol.7, 1997.

11) Hashimoto, H., Umeda, N., Matsuda, A. : Importance of Several Nonlinear Factors on Broaching Prediction, Journal of Marine Science and Technology, Vol.9, 2004.

12) Umeda, N., Matsuda, A., Hamamoto, M. : Stability Assessment for Intact Ships in the Light of Model Experiments, Journal of Marine Science and Technology, Vol.4, 1999.

Appendix

本論で扱った追波中船体運動を表す状態方程式に対して簡単化を施すと、一定の外力項が働いた、空気抵抗の存在する単振り子と考えることができる。Fig.A.1 にこのシステムの概略図を示す。このとき (A.1) 式が運動方程式となる。θ は振り子の角度、v は振り子の速度、μ は錘の重さ、l は振り子のアームの長さ、κ は空気抵抗係数、F はモーターにより振り子に働く定常な外力を表している。また錘は剛体棒により接続されているものとし、その撓みや伸びは考慮しない。

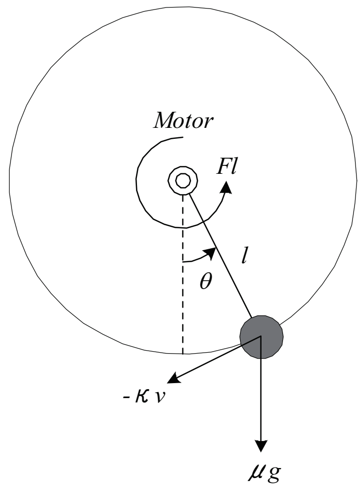

Fig.A.1　Notion of pendulum system.

$$\begin{aligned} \mu \dot{v} + \kappa v + \mu g \sin\theta &= F \\ l \frac{d\theta}{dt} &= v \end{aligned} \tag{A.1}$$

(A.1) 式より v を消去し、定数を整理すると (A.2) 式となる

$$\begin{gathered} \ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \beta\sin\theta = \gamma \\ \text{where } \alpha = \kappa/\mu,\ \beta = g, \gamma = F/\mu \end{gathered} \tag{A.2}$$

式中、すべての定数は正であるとする。いま $\dot{\theta} = \Theta$ とし、行列形式に改めると (A.3) 式となる。

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\Theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta \\ -\alpha\Theta - \beta\sin\theta + \gamma \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

さて平衡点の条件は、(A.3) 式が零ベクトルとなることである。これより (A.4) 式が得られる。

$$\begin{aligned} \Theta &= 0 \\ \theta &= \arcsin\frac{\gamma}{\beta} \end{aligned} \tag{A.4}$$

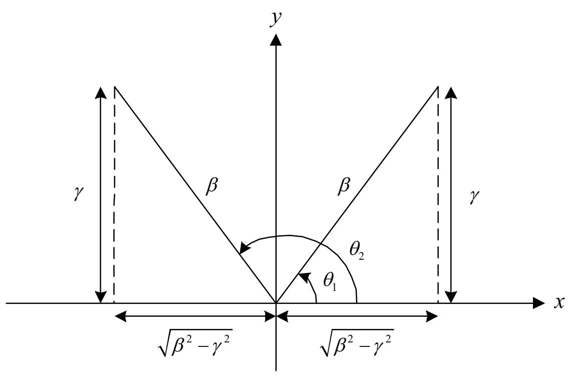

Fig.A.2　Reference system.

いま、$0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ を満足すると仮定し、θ_1 および θ_2 はいずれも (A.4) 式を満たすとする。このときの θ_1 と θ_2 の関係は Fig.A.2 に示す。さて、(A.3) 式に対し、(A.4) 式を満足する点で局所線形化を施して、各々の局所線形化領域内における固有値を計算する。

（1） $\theta = \theta_1$ のとき

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\Theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta\cos\theta & -\alpha \end{pmatrix}\Bigg|_{\theta_1} \begin{pmatrix} \theta \\ \Theta \end{pmatrix} = \mathbf{A}_1 \begin{pmatrix} \theta \\ \Theta \end{pmatrix} \\ \text{where} \quad \mathbf{A}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta\cos\theta_1 & -\alpha \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{A.5}$$

さて平衡点の定義より、$\cos\theta_1 = \sqrt{\beta^2 - \gamma^2}/\beta$ であるので $\mathbf{A}_1$ は (A.6) 式のように書き改められる。

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{\beta^2-\gamma^2} & -\alpha \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

さて $\mathbf{A}_1$ に対する固有値 λ_1 は $\det \mathbf{A}_1 = 0$ より以下となる。

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}}{2} < 0 \tag{A.7}$$

これより $\theta = \theta_1$ が安定平衡点である。

（2） $\theta = \theta_2$ のとき

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\Theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta\cos\theta & -\alpha \end{pmatrix}\Bigg|_{\theta_2} \begin{pmatrix} \theta \\ \Theta \end{pmatrix} = \mathbf{A}_2 \begin{pmatrix} \theta \\ \Theta \end{pmatrix} \\ \text{where} \quad \mathbf{A}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta\cos\theta_2 & -\alpha \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{A.8}$$

平衡点の定義より、$\cos\theta_2 = -\sqrt{\beta^2-\gamma^2}/\beta$ であるので $\mathbf{A}_2$ は次のように表される。

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{\beta^2-\gamma^2} & -\alpha \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

さて $\mathbf{A}_2$ に対する固有値 λ_2 は、$\det \mathbf{A}_2 = 0$ より以下となる。

$$\lambda_2 = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}}{2} \tag{A.10}$$

λ_2 は根号内の符号によって正負いずれの値をとりうる。し

たがって、$\theta=\theta_2$ は鞍型平衡点である。今後の考察は鞍型平衡点 $\theta=\theta_2$ に的を絞って行う。

さて、(A.2) 式に $\dot{\theta}$ を乗じて時間積分すると次式となる。

$$\int\ddot{\theta}\dot{\theta}dt+\alpha\int\dot{\theta}^2dt+\beta\int\dot{\theta}\sin\theta dt=\int\gamma\dot{\theta}dt \qquad \text{(A.11)}$$

(A.11) 式に変数変換を施すと、 (A.12) 式となる。

$$\int\Theta d\Theta+\alpha\int\Theta^2dt+\beta\int\sin\theta d\theta=\int\gamma d\theta \qquad \text{(A.12)}$$

ここで、この積分において初期値を、位相平面内における鞍型平衡点 $\theta=\theta_2$ 近傍で Θ 方向に微小量だけずらした点 $(\theta_2,\Delta\Theta)$ を初期値として、Fig.A.3 に示す積分経路 Θ_1 上で定積分すると、(A.13) 式となる。

$$\int_{\Delta\Theta}^{\Theta}\Theta_1 d\Theta+\alpha\int_0^t\dot{\theta}^2dt-[\beta\cos\theta]_{\theta_2}^{\theta}=\int_{\theta_2}^{\theta}\gamma d\theta \qquad \text{(A.13)}$$

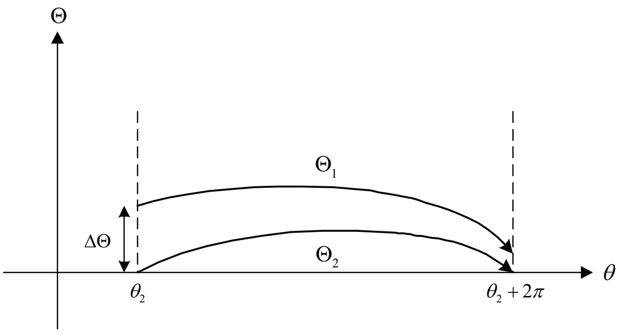

Fig.A.3　Notion of both trajectories.

いま、終端の点が $\theta=\theta_2+2\pi$ であるとすると、(A.13) 式は以下となる。

$$\frac{1}{2}\Theta^2-\frac{1}{2}(\Delta\Theta)^2+\alpha\int_0^t\Theta_1^2dt=2\pi\gamma \qquad \text{(A.14)}$$

終端の Θ 座標を $\Theta=\Theta_E$ として、(A.14) 式を Θ_E に関して解くことにより次式となる。

$$\Theta_E=\sqrt{(\Delta\Theta)^2+4\pi\gamma-2\alpha\int_{\theta_2}^{\theta_2+2\pi}\Theta_1^2d\theta} \qquad \text{(A.15)}$$

さて、ここで微小ずらした積分ではなく、鞍型平衡点から鞍型平衡点へ直接到達する Θ_2 軌道に関して計算する。このとき初期値は $(\theta_2,0)$、終端値は $(\theta_2+2\pi,0)$ であり、到達には無限時間を要するため、便宜上 t_∞ と記す。このときの計算は次式となる。

$$\begin{aligned}\int_0^0\Theta_2 d\Theta+\alpha\int_0^{t_\infty}\Theta_2^2dt-[\beta\cos\theta]_{\theta_2}^{\theta_2+2\pi}&=\int_{\theta_2}^{\theta_2+2\pi}\gamma d\theta\\ \alpha\int_{\theta_2}^{\theta_2+2\pi}\Theta_2^2d\theta&=2\pi\gamma\end{aligned} \qquad \text{(A.16)}$$

(A.16) 式の $2\pi\gamma$ を (A.15) 式に代入することで下式を得る。

$$\begin{aligned}\Theta_E&=\sqrt{(\Delta\Theta)^2+2\alpha\left\{\int_{\theta_2}^{\theta_2+2\pi}\Theta_2^2d\theta-\int_{\theta_2}^{\theta_2+2\pi}\Theta_1^2d\theta\right\}}\\&<\Delta\Theta\end{aligned} \qquad \text{(A.17)}$$

したがって、(A.17) 式の条件を満たすとき、平衡点より Θ 方向に $\Delta\Theta$ 離れた点を初期値とした積分から得られた軌道は、平衡点に対して収束する様相を呈する。このことは、鞍型平衡点の安定多様体近傍には様々な方向からの軌道が収束してくることを示している。したがって逆時間積分を行う場合、初期値に対して少しでも数値的な擾乱が加われば、軌道が真の値から大きく逸脱する可能性をはらんでいる。逆に正時間積分は、この問題に関しては初期値に対する微小擾乱に対し、結果的には収束する振る舞いを示すことになるため、計算が精度良く行えることになる。以上が本論で逆時間積分を除外したアルゴリズムを提案した理由である。

本文中の記号の補足

D_P	プロペラ直径
$d(x)$	船体横断面の喫水
H	波高
k	波数
K_T	スラスト係数
m	船体質量
m_x	x 方向の付加質量
$S(x)$	船体横断面の没水面積
S_F	浸水表面積
t_P	推力減少率
u	船体速度の x 方向成分
w_P	伴流係数
X_W	波浪強制力
χ	波方向に対するオートパイロットコース
π	円周率
ρ	水の密度
ζ_W	波振幅