

浮体に作用する波漂流力の定常成分について

正員 坪 郷 尚*

The Drift Force Acting on a Floating Body in Waves

by Takashi Tsubogo, Member

Summary

This paper proves Maruo's wave-drift-force and Newman's wave-drift-moment without using the momentum and energy conservation principles. Firstly a method to estimate the surface integral and to linearize the boundary conditions of a freely floating body in waves is proposed. Then Kashiwagi's 1st and 2nd reciprocity relations, i.e. the energy conservation law and the directivity of radiating wave amplitude at a far field respectively for an asymmetric body floating freely in waves proven by Kashiwagi recently, are introduced in three dimension without using Green's 2nd identity. Finally, a reciprocity relation for the drift force and moment is shown.

1. 緒言

線形理論の範囲では、浮体の波浪応答に関する相反性が多数知られている^{1,2)}。例えば radiation 力の対称性であったり、造波減衰係数と Kochin 関数の関係であったりする。これらは Green の第 2 公式から機械的に導かれ、ペアとして選ぶ関数次第でいくつもの関係が得られそうである¹⁾。選ぶ関数の振幅まで考慮すると、Green の第 2 公式を用いるということは振幅の 2 乗のオーダーまで考慮していることになる。他方で Maruo の定常波漂流力³⁾ や Newman の定常波漂流モーメント⁴⁾ は同じく振幅の 2 乗のオーダーの物理量であるが物理的考察すなわち運動量定理から導かれている。ところで最近、Kashiwagi は 2 次元浮体の動揺問題における興味深い 2 つの相反関係を導いている⁵⁾。Kashiwagi は Green の第 2 公式を用いることにより機械的にそれらの関係を求めているわけであるが、得られた関係の 1 つは、波のエネルギー保存則 (Maruo 理論で用いられ、そこではエネルギー定理から導かれている) を一般化したものである。このことは運動量定理を用いるかわりに、Green の第 2 公式を用いることにより機械的に Maruo の定常波漂流力や Newman の定常波漂流モーメントが導けることを暗示している。

本論文では、このことを考察するために、まず定常的に微小振動する境界条件の線形化について考える。通常は実質微分と摂動パラメタを用いた線形化が行われるが、境界条件が流体領域境界の表面積分内で用いられることに着目し、この境界表面積分を線形近似することを考えた。輸送定理 (例えば Newman の教科書

⁶⁾ では体積分の変化分を変化する前の境界表面積分で評価 (近似) するが、この考えを用いた展開法を提案する。次に 3 次元浮体の波浪応答に関する Kashiwagi の関係を Green の第 2 公式を用いることなく導出する。最後に Maruo の定常波漂流力や Newman の定常波漂流モーメントに潜む相反性について考察する。

2. 問題の設定

浮体に円振動数 ω (波長 λ_0)、微小振幅 ξ_0 の平面波が入射する問題を考える。空間固定の座標系 $o-xyz$ を、静止水面上に $x(=x_1)$ 軸と $y(=x_2)$ 軸、鉛直上方に $z(=x_3)$ 軸となるように設定する。本稿では浮体を剛体と仮定し、流体を非回転非圧縮の理想流体とし、さらに以下の仮定を設ける: 1) 系が入射波の円振動数 ω で調和振動する。2) 浮体は Euler の浮面心 (center of floatation) を中心に微小回転する。3) 微小振動の仮定、すなわち、入射波の振幅 ξ_0 および浮体による散乱波の振幅は微小であり、浮体の 6 自由度の運動振幅 $\xi_j, j=1, 2, \dots, 6$ も微小でこれらによって作られる 6 つの水波の速度ポテンシャルはそれぞれ対応する浮体 6 自由度の運動振幅 ξ_j に比例する。水波を表す速度ポテンシャル $\Phi(\mathbf{x}, t)$ は上記微小な速度ポテンシャルすなわち入射波 $\xi_0\varphi_0$ 、散乱波 $\xi_0\varphi_7$ 、運動振幅に比例する速度ポテンシャル $\xi_j\varphi_j$ の線形結合で表される。

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left[\sum_{j=0}^7 \xi_j \frac{g}{i\omega} \varphi_j(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \right], \quad \xi_7 = \xi_0 \quad (1)$$

また、入射波 $\xi_0\varphi_0$ と散乱波 $\xi_7\varphi_7$ の和を以下のように $\xi_0\varphi_D$ と表すことにする。

$$\xi_0\varphi_D(\mathbf{x}) = \xi_0\varphi_0(\mathbf{x}) + \xi_7\varphi_7(\mathbf{x}) \quad (2)$$

* 大阪府立大学大学院

原稿受理 平成 19 年 1 月 10 日

次に、空間固定の原点 o に対し並進運動する点 o' を考え、さらに o' 点周りに回転する系 $o' - x'y'z'$ を設定する。この $o' - x'y'z'$ 系は浮体（剛体）に固定されているものとする。仮定 2) より、 o' は浮体の浮面心である。浮体に固定された座標系 $o' - x'y'z'$ は静止時に $o - xyz$ と一致している。浮体（剛体）内の任意の点 P の位置ベクトル $\vec{oP} = \mathbf{x}$ は $o' - x'y'z'$ 系での位置ベクトル $\vec{o'P} = \mathbf{x}'$ を用いて以下のように表される (Fig. 1)。

$$\mathbf{x} = \vec{oo'}(t) + \mathbf{x}' \quad (3)$$

$o' - x'y'z'$ 系の回転角を $o - xyz$ 系の成分で $\Theta_j, j = 1, 2, 3$

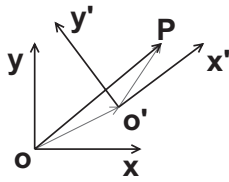


Fig. 1 Coordinate system

と表すことにする。これらは $\epsilon = \xi_0/\lambda_0$ のオーダーの微小量と仮定する。

$$\Theta_j \sim O(\epsilon), \quad j = 1, 2, 3$$

$o - xyz$ 系の基底を \mathbf{e}_j , $o' - x'y'z'$ 系の基底を \mathbf{e}'_j と表すことにすると各座標軸間の方向余弦は以下のように表せる。

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_k = \begin{bmatrix} 1 & -\Theta_3 & \Theta_2 \\ \Theta_3 & 1 & -\Theta_1 \\ -\Theta_2 & \Theta_1 & 1 \end{bmatrix} + O(\epsilon^2) \quad (4)$$

座標変換 (3) を成分表示すると以下ようになる。

$$x_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{x} = \vec{oo'}_j(t) + \sum_{k=1}^3 [\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_k] x'_k \quad (5)$$

入射波により誘起される浮体運動の複素振幅 ξ_j を以下のように導入する。

$$\vec{oo'}_j(t) = \text{Re}[\xi_j e^{-i\omega t}], \quad j = 1, 2, 3 \quad (6)$$

$$\Theta_{j-3}(t) = \text{Re}[\xi_j e^{-i\omega t}], \quad j = 4, 5, 6 \quad (7)$$

また、流体境界面の外向き単位法線ベクトル $n_j, j = 1, 2, 3$ を導入し、原点 o 周りのモーメントを計算するために便宜的に $n_j, j = 4, 5, 6$ を以下のように導入する。

$$\begin{aligned} n_4 &\equiv yn_3 - zn_2 \\ n_5 &\equiv zn_1 - xn_3 \\ n_6 &\equiv xn_2 - yn_1 \end{aligned} \quad (8)$$

これに対応して以下のように $\nabla_4, \nabla_5, \nabla_6$ を導入する。

$$\begin{aligned} \nabla_4 &\equiv y\nabla_3 - z\nabla_2 \\ \nabla_5 &\equiv z\nabla_1 - x\nabla_3 \\ \nabla_6 &\equiv x\nabla_2 - y\nabla_1 \end{aligned} \quad (9)$$

さて、運動状態での浮体表面上の位置 x_j と、もとの静止状態（あるいは振動中心）での位置 $\bar{x}_j = x'_j$ との差を $o - xyz$ 系の成分で $\Delta x_j = x_j - \bar{x}_j$ と置くことにすると座標変換 (5) より以下の関係式が導かれる。

$$\Delta x_j = x_j - \bar{x}_j = \vec{oo'}_j(t) + \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} \Theta_k \bar{x}_l + O(\epsilon^2) \quad (10)$$

ここで ϵ_{jkl} は交代記号である。静止状態での浮体表面の法線ベクトル（浮体内向き） \bar{n}_j と変位成分 Δx_j の内積は以下のように表される。

$$\sum_{j=1}^3 \Delta x_j n_j = \sum_{j=1}^6 \text{Re}[\xi_j e^{-i\omega t}] n_j \quad \text{on } \bar{S}_H \quad (11)$$

ここで S_H は浮体の浸水表面を表し、overline は時間平均を表す。明らかに $\bar{n}_j = n_j$ on \bar{S}_H である。

3. 面積分の近似方法

空間座標 x_j と時間 t のスカラー関数を $p(x_j, t)$ とする。勾配 $\nabla_i p$ の、調和振動する領域 $V(t)$ に関する積分を平均位置 \bar{V} 周りで展開することを考える。平均積分領域 \bar{V} からの変化分を $\Delta V(t)$ と表す。

$$\iiint_{V(t)} = \iiint_{\bar{V} + \Delta V(t)} = \iiint_{\bar{V}} + \iiint_{\Delta V(t)} \quad (12)$$

輸送定理⁶⁾を参考にして積分範囲 $\Delta V(t)$ の積分を \bar{V} の表面 \bar{S} 上での時刻 t における積分として近似する。

$$\iiint_{\Delta V(t)} \nabla_i p dV = \iint_{\bar{S}} \nabla_i p \sum_{j=1}^3 \Delta x_j n_j dS + O(\Delta x_j^2) \quad (13)$$

$$\Delta x_j = x_j - \bar{x}_j, \quad x_j \text{ on } S(t), \quad \bar{x}_j \text{ on } \bar{S} \quad (14)$$

ここで \bar{x}_j, x_j は境界面上同一点の運動前後の $o - xyz$ 系での座標で前者は \bar{S} 上の、後者は $S(t)$ 上の座標である。式 (12)(13) より、面積分を以下のように平均位置での面積分で近似する。

$$\iint_{S(t)} p n_i dS = \iint_{\bar{S}} \left\{ p(t) n_i + \nabla_i p(t) \sum_{j=1}^3 \Delta x_j n_j \right\} dS, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (15)$$

ここで Gauss の定理が $i = 4, 5, 6$ に対しても成立することを用いている。

流体領域を $V(t)$ とし、その境界を浮体の浸水表面 $S_H(t)$ 、自由表面 $S_F(t)$ 、海底 S_B 、無限遠方 S_∞ に分割し、これらの境界面上では流体外向きの単位法線ベクトル \mathbf{n} と $\mathbf{x} \times \mathbf{n}$ が定義されているとする。浮体の浸水表面 $S_H(t)$ で水圧 p を積分する場合、高次の微小量である水面変化の影響を考慮に入れるため、浸水表面 $S_H(t)$ を静止時浸水表面の動揺部分 $S_{H1}(t)$ と自由表面の変化部分 $S_{H\epsilon}(t)$ に分解して考える (Fig. 2 a, b)。

$$S_H(t) = S_{H1}(t) + S_{H\epsilon}(t) \quad (16)$$

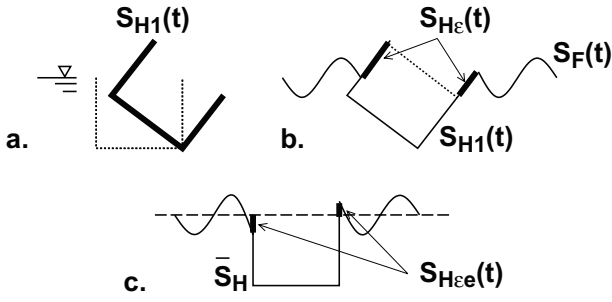


Fig. 2 Wetted surface of floating body

そして浮体動揺の平均位置まで引き戻す (Fig. 2 c).

$$\begin{aligned} \iint_{S_H(t)} p n_i dS &= \iint_{S_{H1}(t)+S_{H\epsilon}(t)} p n_i dS \\ &= \iint_{\bar{S}_H+S_{H\epsilon\epsilon}(t)} \left\{ p(t) n_i + \nabla_i p(t) \sum_{j=1}^3 \Delta x_j n_j \right\} dS, \\ & \quad i = 1, 2, \dots, 6 \end{aligned} \quad (17)$$

ここで \bar{S}_H は浸水表面の時間平均を表し、静止状態の浸水表面に等しい。また、 $S_{H\epsilon\epsilon}(t)$ は浮体動揺の平均位置での自由表面の変化部分を表す。上式中の圧力勾配の項が効いてくるのは $O(\epsilon)$ の線形理論では復原力 (静水圧) の計算においてのみである。これ以外の線形流体力は右辺積分内第 1 項の \bar{S}_H 上の積分から計算される。定常波漂流力には、 $O(\epsilon^2)$ の効果として圧力勾配の項と自由表面の変化部分が効いてくる。

境界要素法など Green の公式を用いて速度ポテンシャルを求める場合、速度ポテンシャルに関する境界条件は境界上の表面積分の中で現れるが、浸水表面の運動学的条件と自由表面の条件をそれぞれの時間平均位置で線形化すると、よく知られた以下の条件式になる。

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = K \varphi_j \quad \text{on } \bar{S}_F, \quad j = 0, 1, 2, \dots, 6, 7, D \quad (18)$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = K n_j \quad \text{on } \bar{S}_H, \quad j = 1, 2, \dots, 6 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \varphi_D}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \bar{S}_H \quad (20)$$

$$K = \frac{\omega^2}{g} \quad (21)$$

4. Kochin 関数 H_j と記号 $\mathcal{H}[*,*]$ の定義

以下では水深 h を一定と考え、速度ポテンシャルは海底での条件

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_B, \quad j = 0, 1, 2, \dots, 6, 7, D \quad (22)$$

を満足し、また入射波以外は無限遠方での放射条件を満足しているとする。入射波を、波数 $k_0 (= 2\pi/\lambda_0)$ で x 軸に対する進行角 χ で進む平面波とする。

$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} e^{ik_0(x \cos \chi + y \sin \chi)} \quad (23)$$

x, y, z が点 P の座標値の場合、本論文では $\varphi_0(P, \chi)$ などと表記することもある。明らかに以下の関係が成立する。

$$\varphi_0^*(P, \chi) = \varphi_0(P, \chi \pm \pi) \quad (24)$$

ここで * は複素共役を表す。流体領域 \bar{V} 内で下記の偏微分方程式を満足し、

$$\nabla^2 G(P, Q) = -\delta(P, Q) \quad \text{in } \bar{V} \quad (25)$$

自由表面条件と $z = -h$ での海底条件、さらに $e^{-i\omega t}$ で調和振動する場合の無限遠方での波の放射条件を満足する Green 関数を $G(P, Q)$ と置く。点 P と点 Q が十分離れているときの Green 関数は以下のように近似できる²⁾。

$$G(P, Q) \approx \alpha(P) \varphi_0^*(Q, \theta) \quad (26)$$

$$\alpha(P) = \frac{iC_0}{2} Z_0(z) \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 R}} e^{ik_0 R - \frac{\pi}{4} i} \quad (27)$$

$$C_0 = \frac{k_0^2}{h(k_0^2 - K^2) + K} = \frac{k_0 \cosh^2 k_0 h}{k_0 h + \cosh k_0 h \sinh k_0 h} \quad (28)$$

$$Z_0(z) = \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \quad (29)$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (30)$$

$$\cos \theta = \frac{x}{R}, \quad \sin \theta = \frac{y}{R} \quad (31)$$

式 (27) で定義した $\alpha(P)$ は遠方での円筒波を表している。また Green 関数の R 方向微分は点 P と点 Q が十分離れているとして近似すると以下ようになる。

$$\frac{\partial G(P, Q)}{\partial R} \approx ik_0 G(P, Q) \quad (32)$$

式 (26) と (32) を比較すると、形式的に

$$\frac{\partial \alpha(P)}{\partial R} \approx ik_0 \alpha(P) \quad (33)$$

とおける。

流体領域 \bar{V} に対して Green の第 2 公式を用いる。関数のペアは $G(P, Q)$ と $\varphi_j(Q)$, $j = 1, 2, \dots, 6, 7$ である。流体の境界 \bar{S} のうち、浮体表面 \bar{S}_H に関する積分が残ることになる。

$$\begin{aligned} \varphi_j(P) &= \iint_{\bar{S}_H} \left\{ G(P, Q) \frac{\partial \varphi_j(Q)}{\partial n_Q} - \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} \varphi_j(Q) \right\} dS_Q \\ &\equiv \mathcal{H}[G(P, Q), \varphi_j(Q)], \quad j = 1, 2, \dots, 6, 7 \end{aligned} \quad (34)$$

ここで点 P は境界上ではなく流体領域 \bar{V} 内の点である。本稿では 2 つの関数に作用する演算記号 $\mathcal{H}[*,*]$ を上式のように約束する。式 (34) は点 P と点 Q が十分離れているときは式 (26) を用いて、以下のように近似できる。

$$\varphi_j(P) \approx \alpha(P) \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi_j], \quad j = 1, 2, \dots, 6, 7 \quad (35)$$

$$\mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi_j] = \iint_{\bar{S}_H} \left\{ \varphi_0^*(\theta) \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_0^*(\theta)}{\partial n} \varphi_j \right\} dS$$

$$= H_j(k_0, \theta), \quad j = 1, 2, \dots, 6, 7 \quad (36)$$

ここで H_j は Kochin 関数である. このように \mathcal{H} の引数が φ_0^* と $\varphi_j, j = 1, 2, \dots, 6, 7$ の場合には Kochin 関数 H_j となる. 本稿では無限遠方の S_∞ 面にて $\alpha(P)\varphi_0^*(P, \chi)$, もしくはその複素共役を含む積分を計算することになる. ここで演算の要点を述べておく. S_∞ を半径 R の円筒検査面とする. このとき式 (31) で定義される θ に関して緩やかに変化する関数 $A(\theta)$ に対して以下の近似が許される.

$$\iint_{S_\infty} \alpha(P)\varphi_0^*(P, \chi)A(\theta)dS = \frac{i}{2k_0}A(\chi) + \frac{ie^{2i(k_0R - \frac{\pi}{4})}}{2k_0}A(\chi - \pi) + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \quad (37)$$

ここで, 左辺の被積分関数 $\varphi_0^*(P, \chi)$ の位相が $\theta = \chi, \chi - \pi$ にて停留することを用いている. また, 式 (37) の複素共役をとると以下の関係が得られる.

$$\iint_{S_\infty} \alpha^*(P)\varphi_0(P, \chi)A^*(\theta)dS = \frac{-i}{2k_0}A^*(\chi) + \frac{-ie^{-2i(k_0R - \frac{\pi}{4})}}{2k_0}A^*(\chi - \pi) + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \quad (38)$$

$A(\theta)$ がさらに周期 2π の関数であるとすると

$$\begin{aligned} & \iint_{S_\infty} \frac{\partial \varphi_0^*(P, \chi)}{\partial \theta} A(\theta) dS = \\ & \iint_{S_\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} [\varphi_0^*(P, \chi)A(\theta)] - \varphi_0^*(P, \chi) \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} \right\} dS \\ & = - \iint_{S_\infty} \varphi_0^*(P, \chi) \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} dS \end{aligned} \quad (39)$$

ここで θ について部分積分し $\varphi_0^*(P, \chi)A(\theta)$ の周期性を用いている.

5. Kashiwagi の関係

Kashiwagi は振動数は等しいが入射角の異なる 2 種類の波に対して Green の公式を用いることにより, 2 次元浮体の動揺問題における興味深い相反関係を導いている⁵⁾. 以下では, 振動数は等しいが入射角の異なる 2 種類の波に対する \mathcal{H} 関数を式変形することにより 3 次元浮体の動揺問題での Kashiwagi の関係を導く (Green の公式を用いた遠場解からも同じ結果が得られるが省略する).

最初の波のペアは波入射角の異なる $\varphi^*(\chi_A)$ と $\varphi(\chi_B)$ である.

$$\varphi^*(\chi_A) = \xi_0 \varphi_D^*(\chi_A) + \sum_{i=1}^6 \xi_i^*(\chi_A) \varphi_i^* \quad (40)$$

$$\varphi(\chi_B) = \xi_0 \varphi_D(\chi_B) + \sum_{j=1}^6 \xi_j(\chi_B) \varphi_j \quad (41)$$

ここで χ は入射波の進行角を表わし, radiation ポテンシャル φ_j は振動数が同じであれば波向きには寄らない. この 2 つの波に対する \mathcal{H} 関数は以下のように書ける.

$$\mathcal{H}[\varphi^*(\chi_A), \varphi(\chi_B)] =$$

$$\iint_{S_H} \left\{ \varphi^*(\chi_A) \frac{\partial \varphi(\chi_B)}{\partial n} - \frac{\partial \varphi^*(\chi_A)}{\partial n} \varphi(\chi_B) \right\} dS \quad (42)$$

Kashiwagi の証明法をただ踏襲するだけで 3 次元の場合も式 (42) の値がゼロになることが示せる (付録 A. 参照). 式 (42) は以下のようにも変形できる.

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}[\varphi^*(\chi_A), \varphi(\chi_B)] \\ & = \iint_{S_H} \left(\left\{ \xi_0 \varphi_0^*(\chi_A) + \sum_{i=1}^7 \xi_i^*(\chi_A) \varphi_i^* \right\} \frac{\partial \varphi(\chi_B)}{\partial n} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \xi_0 \varphi_0^*(\chi_A) + \sum_{i=1}^7 \xi_i^*(\chi_A) \varphi_i^* \right\} \varphi(\chi_B) \right) dS \\ & = \xi_0 \mathcal{H}[\varphi_0^*(\chi_A), \varphi(\chi_B)] + \\ & \quad \sum_{i=1}^7 \iint_{S_H} \left\{ \xi_i^*(\chi_A) \varphi_i^* \frac{\partial \varphi(\chi_B)}{\partial n} - \frac{\partial \xi_i^*(\chi_A) \varphi_i^*}{\partial n} \varphi(\chi_B) \right\} dS \\ & = \xi_0 \mathcal{H}[\varphi_0^*(\chi_A), \varphi(\chi_B)] + \\ & \quad \sum_{i=1}^7 \iint_{S_H} \left\{ \xi_i^*(\chi_A) \varphi_i^* \frac{\partial \xi_0 \varphi_0(\chi_B)}{\partial n} - \frac{\partial \xi_i^*(\chi_A) \varphi_i^*}{\partial n} \xi_0 \varphi_0(\chi_B) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=1}^7 \xi_i^*(\chi_A) \varphi_i^* \frac{\partial \xi_j(\chi_B) \varphi_j}{\partial n} - \frac{\partial \xi_i^*(\chi_A) \varphi_i^*}{\partial n} \xi_j(\chi_B) \varphi_j \right\} dS \\ & = \xi_0 \mathcal{H}[\varphi_0^*(\chi_A), \varphi(\chi_B)] - \xi_0 \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\chi_B), \varphi(\chi_A)] \\ & \quad + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 \iint_{S_H} \left\{ \varphi_i^* \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n} \varphi_j \right\} dS \times \xi_i^*(\chi_A) \xi_j(\chi_B) \\ & = \xi_0 \mathcal{H}[\varphi_0^*(\chi_A), \varphi(\chi_B)] - \xi_0 \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\chi_B), \varphi(\chi_A)] \\ & \quad + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 \mathcal{H}[\varphi_i^*, \varphi_j] \xi_i^*(\chi_A) \xi_j(\chi_B) \end{aligned} \quad (43)$$

ここで入射波が任意の入射角 θ_A と θ_B に対して満足する関係²⁾,

$$\mathcal{H}[\varphi_0(\theta_A), \varphi_0(\theta_B)] = 0 \quad (44)$$

を用いている. 以上は \mathcal{H} 演算子の線形性を示したにすぎないが, Bessho-Newman の関係^{7, 8)} と同様に φ_7 まで含めて成立する以下の関係¹⁾,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[\varphi_i^*, \varphi_j] & = \frac{C_0}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\theta), \varphi_i] \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi_j] d\theta, \\ & \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, 7 \end{aligned} \quad (45)$$

1 式 (45) は Kochin 関数を用いると以下のように表現できる.

$$\mathcal{H}[\varphi_i^*, \varphi_j] = \frac{C_0}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} H_i^*(k_0, \theta) H_j(k_0, \theta) d\theta$$

$i, j = 1, 2, \dots, 6$ の場合には Bessho-Newman の関係となる.

$$\mathcal{H}[\varphi_i^*, \varphi_j] = K(f_{ij}^* - f_{ij}) = -2iK \cdot \text{Im} [f_{ij}]$$

ここで f_{ij} は式 (70) により定義した radiation 力の係数であり $f_{ji} = f_{ij}$ の関係を用いている.

および式 (43) の値がゼロであることを用いると、式 (43) は Kashiwagi の関係 (波のエネルギーの関係) となる。

$$\begin{aligned} & \xi_0 \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\chi_B), \varphi(\chi_A)] - \xi_0 \mathcal{H}[\varphi_0^*(\chi_A), \varphi(\chi_B)] = \\ & \frac{C_0}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi_A)] \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi_B)] d\theta \quad (46) \end{aligned}$$

式 (46) において $\chi_A = \chi_B$ と置くと、流体領域 $V(t)$ に対するエネルギー保存則²⁾ (波漂流力を求める際に用いられる有名な式) が得られる。

もう一つの波のペア $\varphi(\chi_A \pm \pi)$ と $\varphi(\chi_B)$ についても \mathcal{H} 関数を計算すると、第 2 の Kashiwagi の関係 (波の指向性の相反性) が導かれる。

$$\mathcal{H}[\varphi_0^*(\chi_A), \varphi(\chi_B)] = \mathcal{H}[\varphi_0^*(\chi_B \pm \pi), \varphi(\chi_A \pm \pi)] \quad (47)$$

ここで、以下の関係を用いている。

$$\mathcal{H}[\varphi_i, \varphi_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, 7 \quad (48)$$

χ_B 方向に進む入射波によって浮体が動揺し、それによって発生する波の指向性 (χ_A 方向に出て行く波の振幅) は χ_A 方向からやってくる ($\chi_A \pm \pi$ 方向に進む) 入射波によって浮体が動揺し、それによって発生する波の指向性 ($\chi_B \pm \pi$ 方向に出て行く波の振幅) に等しい (Fig. 3 参照)。

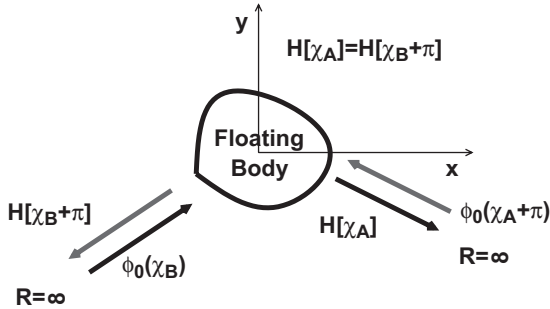


Fig. 3 Kashiwagi's 2nd reciprocity

6. 定常波漂流力に関する相反性

Maruo³⁾ による定常波漂流力の x 成分 \overline{F}_x 、および y 成分 \overline{F}_y 、は以下のように表せる²⁾。

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \overline{F}_x \\ \overline{F}_y \end{array} \right\} = \frac{\rho g k_0 C_0}{8\pi K} \times \\ & \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]|^2 \left\{ \begin{array}{l} \cos \chi - \cos \theta \\ \sin \chi - \sin \theta \end{array} \right\} d\theta \quad (49) \end{aligned}$$

²⁾ $\mathcal{H}[\varphi_0^*, \varphi]$ は Kochin 関数を用いると以下のように表せる。

$$\mathcal{H}[\varphi_0^*, \varphi] = \sum_{j=1}^7 \xi_j H_j(k_0, \theta)$$

Newman⁴⁾ による z 軸周りの定常波漂流モーメント \overline{M}_z は以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \overline{M}_z = & \operatorname{Im} \left[\frac{\rho g C_0}{8\pi K} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)] \frac{\partial \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]}{\partial \theta} d\theta \right] \\ & - \frac{\rho g \xi_0}{2K} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\chi} \right] \quad (50) \end{aligned}$$

ここで χ は入射波の進行角を表す。本論文では水圧の $S_H(t)$ 上での積分値 (17) の時間平均について考え、上記 $\overline{F}_x, \overline{F}_y, \overline{M}_z$ との関係調べる。浮体運動に伴う座標変換は $O(\epsilon^2)$ を無視し、式 (11) が成立していると仮定する。Bernoulli の式は以下のように表せる。

$$p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \quad (51)$$

$$\Phi = \operatorname{Re} \left[\frac{g}{i\omega} \varphi(\chi) e^{-i\omega t} \right] \quad (52)$$

$$\varphi(\chi) = \xi_0 \varphi_D(\chi) + \sum_{j=1}^6 \xi_j(\chi) \varphi_j \quad (53)$$

$$\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_6 \sim O(\epsilon)$$

式 (17) の積分において $n_i, i = 1, 2, 6$ のとき、時間平均後、値が残るのは $O(\epsilon^2)$ の項のみである。式 (17), (51)-(53) より $O(\epsilon^2)$ の項は 3 つあることになる。1 つ目は自由表面の変化部分の面積分で以下のように表せる。

$$\begin{aligned} & \overline{\iint_{S_{H\epsilon\epsilon(t)}} \left(-\rho g z - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) n_i dS} \\ & = \overline{\iint_{S_{H\epsilon\epsilon(t)}} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho g \frac{z^2}{2} - \rho \int_0^z \frac{\partial \Phi}{\partial t} dz \right) n_i dS} \\ & = \oint_{C_{WL}} \overline{\left(-\rho g \frac{\zeta^2}{2} - \rho \int_0^{\zeta} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dz \right) \frac{n_i}{\cos \gamma} \Big|_{z=0}} ds \\ & = \oint_{C_{WL}} \overline{\left(-\rho g \frac{\zeta^2}{2} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} \zeta \right) \nu_i ds} \\ & = \frac{\rho g}{4} \oint_{C_{WL}} \operatorname{Re} [\varphi^*(\chi) \varphi(\chi) \Big|_{z=0}] \nu_i ds \quad (54) \end{aligned}$$

ここで overline は時間平均を表し、 C_{WL} は waterline、 ds はその微小線素、 ν_i は ds に対する水線面内向き単位法線ベクトルで、 γ は waterline 近傍での浮体表面と z 軸とのなす角である ($dS \cos \gamma = dz ds$, Fig. 4)。また ζ が $O(\epsilon)$ であるので z に関する最初の積分を実行するとき n_i の z による変化を無視している。さらに waterline の単位法線ベクトル ν_i に関する条件式、

$$\nu_x^2 + \nu_y^2 = 1, \quad \nu_z = 0 \quad (55)$$

$$\sum_{i=1}^3 n_i \nu_i = \cos \gamma \quad (56)$$

$$n_x : \nu_x = n_y : \nu_y \quad (57)$$

より導かれる以下の ν_i と n_i の関係を用いている.

$$\nu_x = \frac{n_x}{\cos \gamma}, \quad \nu_y = \frac{n_y}{\cos \gamma} \quad (58)$$

これより ν_6 を以下のように定義している.

$$\nu_6 = x\nu_y - y\nu_x \quad (59)$$

そして最後に以下の関係と式 (52) を代入している.

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (60)$$

$O(\epsilon^2)$ の項の 2 つ目は p 中の運動エネルギーの項で, 以下のよ

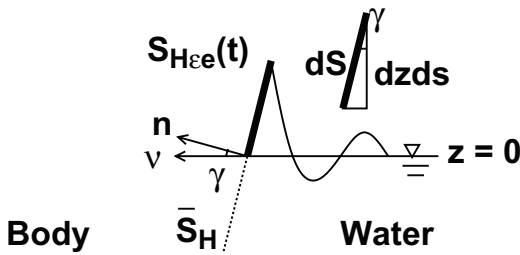


Fig. 4 Water elevation on equilibrium body surface

うに表せる (付録 B. 式 (86) 参照).

$$\begin{aligned} & \iint_{\bar{S}_H} -\frac{\rho}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi n_i dS = -\frac{\rho}{2} \times \\ & \sum_{j=1}^3 \iint_{\bar{S}_H} \overline{\operatorname{Re} \left[\frac{g}{i\omega} \nabla_j \varphi(\chi) e^{-i\omega t} \right] \operatorname{Re} \left[\frac{g}{i\omega} \nabla_j \varphi(\chi) e^{-i\omega t} \right] n_i dS} \\ & = -\frac{\rho g}{4K} \sum_{j=1}^3 \iint_{\bar{S}_H} \operatorname{Re} [\nabla_j \varphi^*(\chi) \nabla_j \varphi(\chi)] n_i dS = \\ & -\frac{\rho g}{4K} \iint_{\bar{S}_H} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial \nabla_i \varphi^*(\chi)}{\partial n} \varphi(\chi) + \left\{ \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} \nabla_i \varphi^*(\chi) \right\}^* \right] dS \\ & -\frac{\rho g}{4} \oint_{C_{WL}} \operatorname{Re} [\varphi^*(\chi) \varphi(\chi)|_{z=0}] \nu_i ds \quad i = 1, 2, 6 \quad (61) \end{aligned}$$

$O(\epsilon^2)$ の項の 3 つ目は Φ の時間微分の項で以下のように表せる.

$$\begin{aligned} & \iint_{\bar{S}_H} \overline{\nabla_i p \sum_{j=1}^3 \Delta x_j n_j dS} = \rho g \times \\ & \iint_{\bar{S}_H} \overline{\operatorname{Re} [\nabla_i \varphi(\chi) e^{-i\omega t}] \cdot \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^6 \xi_j(\chi) e^{-i\omega t} n_j \right]} dS \\ & = \frac{\rho g}{K} \iint_{\bar{S}_H} \overline{\operatorname{Re} [\nabla_i \varphi(\chi) e^{-i\omega t}] \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} e^{-i\omega t} \right]} dS \\ & = \frac{\rho g}{2K} \iint_{\bar{S}_H} \operatorname{Re} \left[\nabla_i \varphi^*(\chi) \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} \right] dS, \quad i = 1, 2, 6 \quad (62) \end{aligned}$$

よって式 (54)(61)(62) より定常波漂流力およびモーメントは以下ようになる.

$$\begin{aligned} & \overline{\iint_{S_H(t)} p n_i dS} = \overline{\iint_{\bar{S}_H + S_{H\epsilon\epsilon}(t)} \left\{ p n_i + \nabla_i p \sum_{j=1}^3 \Delta x_j n_j \right\} dS} \\ & = \frac{\rho g}{4K} \iint_{\bar{S}_H} \operatorname{Re} \left[\nabla_i \varphi^*(\chi) \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} - \frac{\partial \nabla_i \varphi^*(\chi)}{\partial n} \varphi(\chi) \right. \\ & \quad \left. + \nabla_i \varphi^*(\chi) \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} - \left\{ \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} \nabla_i \varphi^*(\chi) \right\}^* \right] dS \\ & = \frac{\rho g}{4K} \operatorname{Re} \left[\iint_{\bar{S}_H} \left\{ \nabla_i \varphi^*(\chi) \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} - \frac{\partial \nabla_i \varphi^*(\chi)}{\partial n} \varphi(\chi) \right\} dS \right] \\ & = \frac{\rho g}{4K} \operatorname{Re} \mathcal{H}[\nabla_i \varphi^*(\chi), \varphi(\chi)], \quad i = 1, 2, 6 \quad (63) \end{aligned}$$

ここで虚部は結果に影響しないことを用いている. これは近場解より漂流力および漂流モーメントを計算する式であり, $\nabla_i \varphi^*(\chi)$ と $\varphi(\chi)$ の相反関係になっている. そこで流体領域 \bar{V} に対して Green の第 2 公式を用いる. 関数のペアは $\nabla_i \varphi^*(\chi)$, $i = 1, 2, 6$ と $\varphi(\chi)$ である. Green の公式を適用すると $\nabla^2 \nabla_i \varphi^*(\chi) = 0$ より体積分は消え, 表面積分のうち, 水深 h が一定であるなら浮体表面 \bar{S}_H と無限遠方 S_∞ に関する積分が残ることになる.

$$\begin{aligned} & \iint_{\bar{S}_H} \left\{ \nabla_i \varphi^*(\chi) \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} - \frac{\partial \nabla_i \varphi^*(\chi)}{\partial n} \varphi(\chi) \right\} dS = \\ & - \iint_{S_\infty} \left\{ \nabla_i \varphi^*(\chi) \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} - \frac{\partial \nabla_i \varphi^*(\chi)}{\partial n} \varphi(\chi) \right\} dS, \quad i = 1, 2, 6 \quad (64) \end{aligned}$$

ここで \bar{S}_F 上や \bar{S}_B 上の積分では $i = 6$ のとき $n_x = n_y = 0$ に注意して

$$\begin{aligned} & \iint_{\bar{S}_F + \bar{S}_B} \left\{ (x\nabla_2 - y\nabla_1) \varphi^*(\chi) \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial (x\nabla_2 - y\nabla_1) \varphi^*(\chi)}{\partial n} \varphi(\chi) \right\} dS = 0 \quad (65) \end{aligned}$$

となることを用いている. 式 (64) における S_∞ 上の積分値は式 (78)(79)(82)(83) となることから, 近場解 (63) は Maruo の式 (49), Newman の式 (50), にそれぞれ一致する.

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{c} \bar{F}_x \\ \bar{F}_y \\ \bar{M}_z \end{array} \right\} = \overline{\iint_{S_H(t)} p n_i dS} \\ & = \overline{\iint_{\bar{S}_H + S_{H\epsilon\epsilon}(t)} \left\{ p n_i + \nabla_i p \sum_{j=1}^3 \Delta x_j n_j \right\} dS} \\ & = \frac{\rho g}{4K} \operatorname{Re} \left[\iint_{\bar{S}_H} \left\{ \nabla_i \varphi^*(\chi) \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} - \frac{\partial \nabla_i \varphi^*(\chi)}{\partial n} \varphi(\chi) \right\} dS \right] \\ & = \frac{\rho g}{4K} \operatorname{Re} \mathcal{H}[\nabla_i \varphi^*(\chi), \varphi(\chi)], \quad i = 1, 2, 6 \quad (66) \end{aligned}$$

7. 結 論

本論文では、線形ポテンシャル理論の範疇で 3 次元浮体の定常波漂流力に関する相反性について考察し、以下のことを示した。

1. 定常的に微小振動する境界を振動中心周りで効率的に展開する方法を提案した。
2. 3 次元浮体の波浪応答に関する 2 つの Kashiwagi の関係を Green の第 2 公式を用いずに導いた。
3. Maruo の定常波漂流力, Newman の定常波漂流モーメントを運動量定理を用いず Green の第 2 公式を用いて証明した。
4. 定常波漂流力・モーメントの近場解を示すとともに、そこに潜む相反性について示した。

本論文の結果は実用性に欠けるが、Maruo 理論の正しさを異なる視点から示し、浮体運動学の理解を深めることに微力ながら貢献できたのではないかと考える。

参 考 文 献

- 1) 柏木正 (1999) 特集「よくわかる海事流体力学」第 6 章 船舶・海洋構造物の動揺を計算する, TECHNO MARINE 日本造船学会誌, 第 845 号, pp. 815-825.
- 2) 高木又男, 新井信一 (1996) 船舶・海洋構造物の耐波理論, 成山堂書店.
- 3) Maruo, H. (1960) The Drift of a Body Floating on Waves, J. Ship Res., Vol. 4, pp. 1-10.
- 4) Newman, J. N. (1967) The Drift Force and Moment on Ships in Waves, J. Ship Res., Vol. 11, No. 1, pp. 51-60.
- 5) Kashiwagi, M. (2006) Wave Reflection and Transmission by an Antisymmetric Floating Body in Regular Waves, Proceedings of 2nd PAAMES and AMEC2006, pp. 50-60.
- 6) Newman, J. N. (1977) Marine Hydrodynamics, Cambridge MIT Press.
- 7) 別所正利 (1965) 波の中の船の横揺れ運動の理論について, 防大理工学研究報告, 3(1), pp. 47-59.
- 8) Newman, J. N. (1975) Interaction of Waves with Two-Dimensional Obstacles: A Relation Between the Radiation and Scattering Problems, J. of Fluid Mechanics, Vol. 71, pp. 273-282.

Appendix

 A. Kashiwagi の証明法 ⁵⁾

ρM_{ij} を質量マトリックス, $\rho g K_{ij}$ を復原力係数とすると浮体の運動方程式から以下の関係がある。

$$\sum_{i=1}^6 [-K M_{ji} + K_{ji}] \xi_i^*(\chi_A) = \xi_0 E_j^*(\chi_A) + \sum_{i=1}^6 f_{ji}^* \xi_i^*(\chi_A) \quad (67)$$

$$\sum_{j=1}^6 [-K M_{ij} + K_{ij}] \xi_j(\chi_B) = \xi_0 E_i(\chi_B) + \sum_{j=1}^6 f_{ij} \xi_j(\chi_B) \quad (68)$$

ここで, E_i と f_{ij} は以下のように定義している。

$$E_i = \iint_{\bar{S}_H} \varphi_D n_i dS, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (69)$$

$$f_{ij} = \iint_{\bar{S}_H} \varphi_j n_i dS, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (70)$$

式 (42) に式 (40)(41) を代入し浮体浸水表面での条件を用いると以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} & \iint_{\bar{S}_H} \left(\left\{ \xi_0 \varphi_D^*(\chi_A) + \sum_{i=1}^6 \xi_i^*(\chi_A) \varphi_i^* \right\} \sum_{j=1}^6 \xi_j(\chi_B) K n_j \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^6 \xi_i^*(\chi_A) K n_i \left\{ \xi_0 \varphi_D(\chi_B) + \sum_{j=1}^6 \xi_j(\chi_B) \varphi_j \right\} \right) dS \\ & = K \xi_0 \sum_{j=1}^6 E_j^*(\chi_A) \xi_j(\chi_B) + K \sum_{i,j=1}^6 \xi_j(\chi_B) f_{ji}^* \xi_i^*(\chi_A) \\ & \quad - K \xi_0 \sum_{i=1}^6 E_i(\chi_B) \xi_i^*(\chi_A) - K \sum_{i,j=1}^6 \xi_j(\chi_B) f_{ij} \xi_i^*(\chi_A) \\ & = K \sum_{j=1}^6 \left\{ \xi_0 E_j^*(\chi_A) + \sum_{i=1}^6 f_{ji}^* \xi_i^*(\chi_A) \right\} \xi_j(\chi_B) \\ & \quad - K \sum_{i=1}^6 \left\{ \xi_0 E_i(\chi_B) + \sum_{j=1}^6 f_{ij} \xi_j(\chi_B) \right\} \xi_i^*(\chi_A) \\ & = K \sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^6 [-K M_{ji} + K_{ji}] \xi_i^*(\chi_A) \xi_j(\chi_B) \\ & \quad - K \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 [-K M_{ij} + K_{ij}] \xi_j(\chi_B) \xi_i^*(\chi_A) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (71)$$

ここで運動方程式 (67)(68) と M_{ij}, K_{ij} の対称性を用いた。

B. 式 (61) の証明

流体領域 \bar{V} で Gauss の定理を用いると以下の関係を導くことができる (付録 C. 式 (91) 参照).

$$\sum_{j=1}^3 \iint_{\bar{S}} \nabla_j \varphi^*(\chi) \nabla_j \varphi(\chi) n_i dS = \iint_{\bar{S}} \left\{ \frac{\partial \nabla_i \varphi^*(\chi)}{\partial n} \varphi(\chi) + \left\{ \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} \nabla_i \varphi^*(\chi) \right\}^* \right\} dS, \quad i = 1, 2, 6 \quad (72)$$

また,

$$\iint_{\bar{S}} = \iint_{\bar{S}_H + \bar{S}_F + S_B + S_\infty} = \iint_{\bar{S}_H} + \iint_{\bar{S}_F} + \iint_{S_B} + \iint_{S_\infty} \quad (73)$$

と積分区間を分割し, 式 (72) の \bar{S}_F, S_B, S_∞ 上の積分値を以下に示す.

S_B 上での積分

$n_1 = n_2 = n_6 = 0$ であるので

$$\sum_{j=1}^3 \iint_{S_B} \nabla_j \varphi^*(\chi) \nabla_j \varphi(\chi) n_i dS = 0 = \iint_{S_B} \left\{ \frac{\partial \nabla_i \varphi^*(\chi)}{\partial n} \varphi(\chi) + \left\{ \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} \nabla_i \varphi^*(\chi) \right\}^* \right\} dS, \quad i = 1, 2, 6 \quad (74)$$

\bar{S}_F 上での積分

$n_1 = n_2 = n_6 = 0$ であるので

$$\sum_{j=1}^3 \iint_{\bar{S}_F} \nabla_j \varphi^*(\chi) \nabla_j \varphi(\chi) n_i dS = 0, \quad i = 1, 2, 6 \quad (75)$$

また式 (72) 右辺の方は以下のように変形する.

$$\begin{aligned} & \iint_{\bar{S}_F} \left\{ \frac{\partial \nabla_i \varphi^*(\chi)}{\partial n} \varphi(\chi) + \frac{\partial \varphi^*(\chi)}{\partial n} \nabla_i \varphi(\chi) \right\} dS \\ &= K \iint_{\bar{S}_F} \nabla_i \{ \varphi^*(\chi) \varphi(\chi) \} dS \\ &= K \oint_{C_{WL} + C_\infty} \varphi^*(\chi) \varphi(\chi) \nu_i ds, \quad i = 1, 2, 6 \quad (76) \end{aligned}$$

ここで自由表面条件 (18) と平面の Gauss の定理を用いている (Fig. 5). C_{WL} は waterline, C_∞ は $z = 0$ 平面上の半径 R の円である. 無限遠方の C_∞ での積分は $i = 1, 2$ のとき以下のように表せる.

$$\begin{aligned} & K \oint_{C_\infty} \varphi^*(\chi) \varphi(\chi) |_{z=0} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} ds \\ &= K \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^*(\chi) \varphi(\chi) |_{z=0} R \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta \quad (77) \end{aligned}$$

$i = 6$ のとき C_∞ では $n_6 = xn_y - yn_x = 0$ となり線積分はゼロとなる.

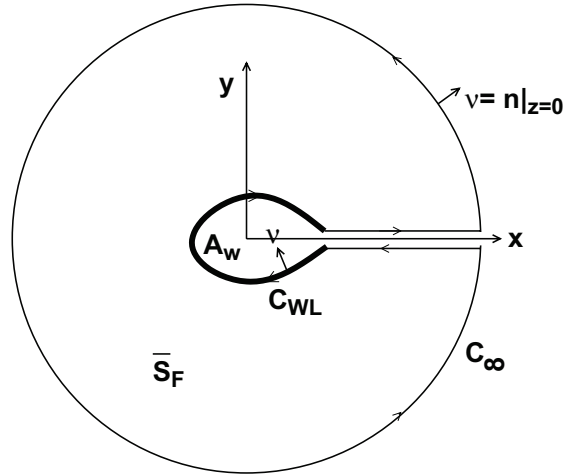


Fig. 5 Two dimensional Gauss theorem on free surface in static equilibrium

S_∞ 上での積分

半径 R の円筒検査面として計算する. まず $i = 1, 2$ のとき以下の関係を導くことができる (付録 D. 参照).

$$\begin{aligned} & \iint_{S_\infty} \nabla_i \varphi^*(\chi) \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} dS = \\ & -\frac{k_0 C_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]|^2 \begin{Bmatrix} \cos \chi - \cos \theta \\ \sin \chi - \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta \\ & + (\mathcal{H}_\epsilon + \mathcal{H}_\epsilon^*) \begin{Bmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iint_{S_\infty} \frac{\partial \nabla_i \varphi^*(\chi)}{\partial n} \varphi(\chi) dS = \\ & \frac{k_0 C_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]|^2 \begin{Bmatrix} \cos \chi - \cos \theta \\ \sin \chi - \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta \\ & + (\mathcal{H}_\epsilon + \mathcal{H}_\epsilon^*) \begin{Bmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (79) \end{aligned}$$

ここで \mathcal{H}_ϵ は式 (97) により定義している. よって $i = 1, 2$ のとき

$$\begin{aligned} & \iint_{S_\infty} \left\{ \frac{\partial \nabla_i \varphi^*(\chi)}{\partial n} \varphi(\chi) + \left\{ \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} \nabla_i \varphi^*(\chi) \right\}^* \right\} dS \\ &= 2(\mathcal{H}_\epsilon + \mathcal{H}_\epsilon^*) \begin{Bmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (80) \end{aligned}$$

$i = 6$ の場合は

$$\nabla_6 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (81)$$

に注意して以下の関係を導くことができる (付録 E. 参照).

$$\iint_{S_\infty} \nabla_6 \varphi^*(\chi) \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} dS = \xi_0 Re \left[\frac{\partial \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\chi} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{iC_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)] \frac{\partial \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]}{\partial \theta} d\theta \\
 & + \Delta \mathcal{H}_\epsilon - \Delta \mathcal{H}_\epsilon^* \quad (82)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S_\infty} \frac{\partial \nabla_6 \varphi^*(\chi)}{\partial n} \varphi(\chi) dS = -\xi_0 \operatorname{Re} \left[\left. \frac{\partial \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]}{\partial \theta} \right|_{\theta=\chi} \right] \\
 & - \frac{iC_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)] \frac{\partial \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]}{\partial \theta} d\theta \\
 & + \Delta \mathcal{H}_\epsilon - \Delta \mathcal{H}_\epsilon^* \quad (83)
 \end{aligned}$$

ここで $\Delta \mathcal{H}_\epsilon$ は式 (102) により定義している。よって以下の結果を得る事ができる。

$$\iint_{S_\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial \nabla_6 \varphi^*(\chi)}{\partial n} \varphi(\chi) + \left\{ \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} \nabla_6 \varphi^*(\chi) \right\}^* \right] dS = 0 \quad (84)$$

ここで虚部が結果に影響しないことを用いている。式 (72) の左辺に現れる S_∞ 上の積分は $i = 1, 2$ のとき、以下の関係を導くことができる (付録 F. 参照)。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^3 \iint_{S_\infty} \nabla_j \varphi^*(\chi) \nabla_j \varphi(\chi) n_i dS = 2(\mathcal{H}_\epsilon + \mathcal{H}_\epsilon^*) \begin{Bmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \end{Bmatrix} \\
 & + K \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^*(\chi) \varphi(\chi) |_{z=0} R \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta, \quad i = 1, 2 \quad (85)
 \end{aligned}$$

$i = 6$ のときは S_∞ を半径 R の円筒検査面とすると $n_6 = xn_y - yn_x = 0$ であるので式 (85) の左辺の値はゼロとなる。

以上より式 (72) の積分で残るのは \overline{S}_H 上の表面積分と C_{WL} 上の線積分となる。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^3 \iint_{\overline{S}_H} \nabla_j \varphi^*(\chi) \nabla_j \varphi(\chi) n_i dS \\
 & = \iint_{\overline{S}_H} \left\{ \frac{\partial \nabla_i \varphi^*(\chi)}{\partial n} \varphi(\chi) + \left\{ \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} \nabla_i \varphi^*(\chi) \right\}^* \right\} dS \\
 & + K \oint_{C_{WL}} \varphi^*(\chi) \varphi(\chi) \nu_i ds, \quad i = 1, 2, 6 \quad (86)
 \end{aligned}$$

C. 式 (72) の証明

流体領域 \overline{V} で添え字 $i = 1, 2, 6$ について Gauss の定理を用いる。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^3 \iint_{\overline{S}} \nabla_j \varphi^*(\chi) \nabla_j \varphi(\chi) n_i dS \\
 & = \sum_{j=1}^3 \iiint_{\overline{V}} \nabla_i \{ \nabla_j \varphi^*(\chi) \nabla_j \varphi(\chi) \} dV \quad (87)
 \end{aligned}$$

$i = 1, 2$ については明らかに

$$\sum_{j=1}^3 \nabla_i \{ \nabla_j \varphi^*(\chi) \nabla_j \varphi(\chi) \}$$

$$= \sum_{j=1}^3 \nabla_j \{ \nabla_j \nabla_i \varphi^*(\chi) \varphi(\chi) + \nabla_j \varphi^*(\chi) \nabla_i \varphi(\chi) \} \quad (88)$$

$i = 6$ のときは

$$\begin{aligned}
 \nabla_6 \nabla_j f & = \nabla_j (\nabla_6 f) - \{ \nabla_j x \nabla_2 f - \nabla_j y \nabla_1 f \} \\
 & = \nabla_j (\nabla_6 f) - \{ \delta_{j1} \nabla_2 f - \delta_{j2} \nabla_1 f \} \quad (89)
 \end{aligned}$$

となることに注意して

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^3 \nabla_6 \{ \nabla_j \varphi^*(\chi) \nabla_j \varphi(\chi) \} = \sum_{j=1}^3 \nabla_6 \nabla_j \{ \nabla_j \varphi^*(\chi) \varphi(\chi) \} \\
 & = \sum_{j=1}^3 \nabla_j \nabla_6 \{ \nabla_j \varphi^*(\chi) \varphi(\chi) \} \\
 & - \{ \nabla_2 [\nabla_1 \varphi^*(\chi) \varphi(\chi)] - \nabla_1 [\nabla_2 \varphi^*(\chi) \varphi(\chi)] \} \\
 & = \sum_{j=1}^3 \nabla_j \{ \nabla_6 \nabla_j \varphi^*(\chi) \varphi(\chi) + \nabla_j \varphi^*(\chi) \nabla_6 \varphi(\chi) \} \\
 & - \{ \nabla_1 \varphi^*(\chi) \nabla_2 \varphi(\chi) - [\nabla_1 \varphi^*(\chi) \nabla_2 \varphi(\chi)]^* \} \\
 & = \sum_{j=1}^3 \nabla_j \{ \nabla_j \nabla_6 \varphi^*(\chi) \varphi(\chi) + \nabla_j \varphi^*(\chi) \nabla_6 \varphi(\chi) \} \\
 & - [\delta_{j1} \nabla_2 \varphi^*(\chi) - \delta_{j2} \nabla_1 \varphi^*(\chi)] \varphi(\chi) \\
 & - \{ \nabla_1 \varphi^*(\chi) \nabla_2 \varphi(\chi) - [\nabla_1 \varphi^*(\chi) \nabla_2 \varphi(\chi)]^* \} \\
 & = \sum_{j=1}^3 \nabla_j \{ \nabla_j \nabla_6 \varphi^*(\chi) \varphi(\chi) + \nabla_j \varphi^*(\chi) \nabla_6 \varphi(\chi) \} \\
 & + \nabla_1 \varphi^*(\chi) \nabla_2 \varphi(\chi) - [\nabla_1 \varphi^*(\chi) \nabla_2 \varphi(\chi)]^* \\
 & - \{ \nabla_1 \varphi^*(\chi) \nabla_2 \varphi(\chi) - [\nabla_1 \varphi^*(\chi) \nabla_2 \varphi(\chi)]^* \} \\
 & = \sum_{j=1}^3 \nabla_j \{ \nabla_j \nabla_6 \varphi^*(\chi) \varphi(\chi) + \nabla_j \varphi^*(\chi) \nabla_6 \varphi(\chi) \} \quad (90)
 \end{aligned}$$

結局 $i = 6$ の場合も $i = 1, 2$ の場合の結果 (88) と同じになる。式 (88) で添え字 $j = 1, 2, 3$ について Gauss の定理を用いると式 (72) が得られる。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^3 \iint_{\overline{S}} \nabla_j \varphi^*(\chi) \nabla_j \varphi(\chi) n_i dS \\
 & = \sum_{j=1}^3 \iiint_{\overline{V}} \nabla_j \{ \nabla_j \nabla_i \varphi^*(\chi) \varphi(\chi) + \nabla_j \varphi^*(\chi) \nabla_i \varphi(\chi) \} dV \\
 & = \iint_{\overline{S}} \left\{ \frac{\partial \nabla_i \varphi^*(\chi)}{\partial n} \varphi(\chi) + \left\{ \frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} \nabla_i \varphi^*(\chi) \right\}^* \right\} dS, \\
 & \quad i = 1, 2, 6 \quad (91)
 \end{aligned}$$

D. 式(78)(79)の証明

遠方では式(35)(44)より

$$\varphi(\chi) \approx \xi_0 \varphi_0(\chi) + \alpha(P) \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)] \quad (92)$$

のように近似できる。また式(33)を用いると円筒検査面 S_∞ では $i = 1, 2, 6$ でそれぞれ以下の近似が許される。

$$\begin{aligned} \nabla_i \varphi^*(\chi) &\approx \left\{ \begin{array}{l} -ik_0 \cos \chi \\ -ik_0 \sin \chi \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{array} \right\} \xi_0 \varphi_0^*(\chi) \\ + \alpha^*(P) &\left\{ \begin{array}{l} -ik_0 \cos \theta \\ -ik_0 \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{array} \right\} \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)] \end{aligned} \quad (93)$$

$$\frac{\partial \varphi(\chi)}{\partial n} \approx ik_0 \cos(\theta - \chi) \cdot \xi_0 \varphi_0(\chi) + ik_0 \alpha(P) \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)] \quad (94)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla_i \varphi^*(\chi)}{\partial n} &\approx \left\{ \begin{array}{l} -ik_0 \cos \chi \\ -ik_0 \sin \chi \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{array} \right\} (-ik_0) \cos(\theta - \chi) \xi_0 \varphi_0^*(\chi) \\ - ik_0 \alpha^*(P) &\left\{ \begin{array}{l} -ik_0 \cos \theta \\ -ik_0 \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{array} \right\} \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)] \end{aligned} \quad (95)$$

まず式(78)において $i = 1$ の場合を考える。式(78)の計算で現れる以下の積分を計算する。

$$\begin{aligned} &\iint_{S_\infty} \{-ik_0 \cos \chi \cdot \xi_0 \varphi_0^*(\chi)\} \times ik_0 \alpha(P) \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)] dS \\ &= k_0^2 \xi_0 \cos \chi \iint_{S_\infty} \alpha(P) \varphi_0^*(\chi) \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)] dS \\ &\approx \frac{ik_0 \cos \chi}{2} \cdot \xi_0 \mathcal{H}[\varphi_0^*(\chi), \varphi(\chi)] + \mathcal{H}_\epsilon \cos \chi \end{aligned} \quad (96)$$

$$\mathcal{H}_\epsilon \equiv \frac{ik_0 \xi_0}{2} e^{2i(k_0 R - \frac{\pi}{4})} \mathcal{H}[\varphi_0^*(\chi - \pi), \varphi(\chi)] \quad (97)$$

ここで式(37)を用いている。同様に式(78)の計算で現れる以下の積分を計算する。

$$\begin{aligned} &\iint_{S_\infty} \{ik_0 \cos(\theta - \chi) \cdot \xi_0 \varphi_0(\chi)\} \times \\ &\{\alpha^*(P) \cdot (-ik_0) \cos \theta \cdot \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]\} dS = \\ &k_0^2 \xi_0 \iint_{S_\infty} \alpha^*(P) \varphi_0(\chi) \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)] \cos(\theta - \chi) \cos \theta dS \\ &\approx -\frac{ik_0 \cos \chi}{2} \cdot \xi_0 \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\chi), \varphi(\chi)] + \mathcal{H}_\epsilon^* \cos \chi \end{aligned} \quad (98)$$

ここで式(38)を用いている。同様に式(78)の計算で現れる以下の積分を計算する。

$$\iint_{S_\infty} \{-ik_0 \cos \theta \cdot \alpha^*(P) \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]\} \times$$

$$\begin{aligned} &ik_0 \alpha(P) \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)] dS \\ &= -ik_0 \times ik_0 \int_{-h}^0 \alpha^*(P) \alpha(P) Rdz \times \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)] \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)] \cos \theta d\theta \\ &= \frac{k_0 C_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]|^2 \cos \theta d\theta \end{aligned} \quad (99)$$

ここで以下の関係を用いている。

$$\int_{-h}^0 \alpha^*(P) \alpha(P) Rdz = \frac{C_0}{4\pi k_0} \quad (100)$$

式(78)の計算で現れる残りの積分はゼロであるので式(96)(98)(99)の和に Kashiwagi の関係(46)を用いると式(78)の $i = 1$ の場合となる。 $i = 2$ の場合についても同様に計算できる。また式(79)の積分も同様にして確かめることができる。

E. 式(82)(83)の証明

式(82)の計算で現れる以下の積分を計算する。

$$\begin{aligned} &\iint_{S_\infty} \xi_0 \frac{\partial \varphi_0^*(\chi)}{\partial \theta} \times ik_0 \alpha(P) \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)] dS \\ &= -ik_0 \xi_0 \iint_{S_\infty} \alpha(P) \varphi_0^*(\chi) \frac{\partial \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]}{\partial \theta} dS \\ &\approx \frac{\xi_0}{2} \frac{\partial \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\chi} + \Delta \mathcal{H}_\epsilon \end{aligned} \quad (101)$$

$$\Delta \mathcal{H}_\epsilon \equiv \frac{\xi_0}{2} e^{2i(k_0 R - \frac{\pi}{4})} \frac{\partial \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\chi-\pi} \quad (102)$$

ここで式(39)(37)を用いている。同様に式(82)の計算で現れる以下の積分を計算する。

$$\begin{aligned} &\iint_{S_\infty} \{ik_0 \cos(\theta - \chi) \cdot \xi_0 \varphi_0(\chi)\} \times \\ &\alpha^*(P) \frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)] dS = \\ &ik_0 \xi_0 \iint_{S_\infty} \alpha^*(P) \varphi_0(\chi) \frac{\partial \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]}{\partial \theta} \cos(\theta - \chi) dS \\ &\approx \frac{\xi_0}{2} \frac{\partial \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\chi} - \Delta \mathcal{H}_\epsilon^* \end{aligned} \quad (103)$$

ここで式(38)を用いている。同様に式(82)の計算で現れる以下の積分を計算する。

$$\begin{aligned} &\iint_{S_\infty} \alpha^*(P) \frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)] \times \\ &ik_0 \alpha(P) \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)] dS \\ &= \frac{iC_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)] \frac{\partial \mathcal{H}^*[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]}{\partial \theta} d\theta \end{aligned} \quad (104)$$

ここで式(100)を用いている。式(82)の計算で現れる残りの積分はゼロであるので式(101)(103)(104)の和を計算すると式(82)となる。式(83)の積分も同様にして確かめることができる。

F. 式 (85) の証明

式 (85) 左辺は z で微分している項を部分積分して以下のように変形する.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^3 \iint_{S_\infty} \nabla_j \varphi^*(\chi) \nabla_j \varphi(\chi) n_i dS \\
 &= \iint_{S_\infty} \{ \nabla_x \varphi^*(\chi) \nabla_x \varphi(\chi) + \nabla_y \varphi^*(\chi) \nabla_y \varphi(\chi) \\
 & \quad - k_0^2 \varphi^*(\chi) \varphi(\chi) \} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} dS \\
 &+ K \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^*(\chi) \varphi(\chi) |_{z=0} R \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta, \quad i = 1, 2 \quad (105)
 \end{aligned}$$

ここで右辺最後の項では海底の条件と自由表面条件を用いている. 式 (93)(37)(38)(100) そして最後に Kashiwagi の関係 (46) を用いると以下の関係を導くことができる.

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S_\infty} \nabla_x \varphi^*(\chi) \nabla_x \varphi(\chi) \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} dS \approx \\
 & - \frac{k_0 C_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]|^2 \cos^2 \chi \begin{Bmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \end{Bmatrix} d\theta \\
 & + \frac{k_0 C_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]|^2 \cos^2 \theta \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta \\
 & + \cos^2 \chi \cdot (\mathcal{H}_\epsilon + \mathcal{H}_\epsilon^*) \begin{Bmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \end{Bmatrix} \quad (106)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S_\infty} \nabla_y \varphi^*(\chi) \nabla_y \varphi(\chi) \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} dS \approx \\
 & - \frac{k_0 C_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]|^2 \sin^2 \chi \begin{Bmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \end{Bmatrix} d\theta \\
 & + \frac{k_0 C_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]|^2 \sin^2 \theta \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta \\
 & + \sin^2 \chi \cdot (\mathcal{H}_\epsilon + \mathcal{H}_\epsilon^*) \begin{Bmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \end{Bmatrix} \quad (107)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S_\infty} -k_0^2 \varphi^*(\chi) \varphi(\chi) \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} dS \approx \\
 & \frac{k_0 C_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{H}[\varphi_0^*(\theta), \varphi(\chi)]|^2 \begin{Bmatrix} \cos \chi - \cos \theta \\ \sin \chi - \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta \\
 & + (\mathcal{H}_\epsilon + \mathcal{H}_\epsilon^*) \begin{Bmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \end{Bmatrix} \quad (108)
 \end{aligned}$$

ここで \mathcal{H}_ϵ は式 (97) により定義している. 以上より式 (85) の結果となる.