

外圧を受けるリング補強円筒殻の 全体圧壊強度と有効幅に関する研究

正員 吉川孝男* 学生員 吉村健司**

General Buckling Strength of Ring-Stiffened Cylindrical Shells under External Pressure and Effective Breadth of Ring-Stiffeners

by Takao Yoshikawa, Member Kenshi Yoshimura, Student Member

Summary

Recently, we usually use the numerical method to calculate the buckling strength of plate and shell structure. But at early design stage, we even now use the theoretical or some simplified formula to check the buckling strength.

For most of typical plate and shell structures, the precise formulas of buckling strength have been developed. For the general buckling strength of ring-stiffened cylindrical shell under external pressure, the several formulas have been proposed, but the accuracy of those are hardly adequate. In those formulas, the effective breadth of ring-stiffeners is introduced, but the exact value has not been presented.

In this paper, the calculation procedure of effective breadth is developed based on mechanical consideration of pre-buckling deformation, and the modified simplified formula of general buckling strength of ring-stiffened cylindrical shells under external pressure is also proposed. The accuracy of proposed formula is confirmed by comparison with numerical results.

1. 緒言

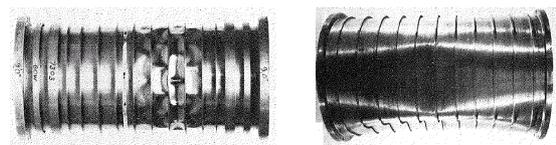
リング補強円筒殻は海洋構造物や潜水船などの主要構造部材として広く用いられているが、その構造強度設計においては、外圧作用下での圧壊強度を精度良く推定することが重要である。

外圧作用下でのリング補強円筒殻の座屈には、Fig. 1に示すように、①リング間の胴板の局部座屈（胴板圧壊）と、②リング補強材を巻き込んだ胴板全長にわたっての座屈（全体圧壊）の2つがある。これまでの設計では、全体圧壊が生じないようにリング補強材の寸法を十分に大きくしていた。このため、胴板圧壊については多くの研究がなされ、精度良い胴板圧壊強度の評価式も提案されている。一方、全体圧壊については、徳川ら¹⁾によって圧壊強度評価式が提案されているが、これらの評価式で使用されてきた胴板のリング補強材に対する有効幅の値²⁾に問題があり、評価式はかなり安全側の圧壊強度を与えることが知られている。

近年、重量削減の観点から、これまでの設計では余裕のあ

った全体圧壊強度を、リング補強材の寸法を減じることによって、胴板圧壊強度に近づける設計検討がなされつつある。そのため、設計初期段階でリング材の必要寸法を決定する際に、全体圧壊強度の精度良い推定法が必要となっている。

そこで、本研究ではリング補強円筒殻の精度良い全体圧壊強度評価式を提案することを目標として、まず、補強材寸法、周方向の座屈波数、および胴板の半径/板厚比など、種々のパラメータに対してどのように有効幅が変化するかを、非線形有限要素法を用いて調べた。この結果と力学的な考察に基づき、従来提案されている有効幅の算定式の意味づけ、および問題点について論ずると共に、従来より精度良い有効幅の算定式を提案した。さらに、この有効幅と、胴板座屈との連成の影響を考慮した全体圧壊強度の評価式を新たに提案するとともに、FEM解析結果と比較してその精度を検証した。



(a) shell buckling (b) general buckling

Fig.1 Buckling mode of ring stiffened cylinder³⁾

* 九州大学大学院工学研究院
** 九州大学大学院工学府

2. 全体圧壊評価式と有効幅に関する従来研究

2.1 全体圧壊強度評価式について

リング補強円筒殻の全体圧壊については、徳川が初めて分離剛性に基づいた算定式を提案した。すなわち、圧壊圧力に対する胴板の寄与分とリング材の寄与分を別々に求め、その合計を圧壊圧力とする考え方である。また、Kendrick⁴⁾は撓み形を全体変形とリング間の局所変形の和で表し、周方向の座屈波数毎にエネルギー法を用いて陰な形で全体圧壊圧力の算定式を与えている。一方、Flugge、Bordner、Beckerらはリング補強円筒殻を直交異方性の円筒殻と捉えて圧壊圧力を求め、また、BallはBordnerの解がKendrickの解と良く一致すると報告している³⁾。

また、山本⁵⁾は両端支持の条件とともに、固定の条件でもリング補強円筒殻の圧壊強度評価式を示している。さらにBryant⁶⁾はシェルとリングの相関を考慮した近似解をつくり、徳川の式とほぼ一致した(1)式を提案している。これらの算定式ではいずれも、周方向の座屈波数毎に圧壊圧力を求め、圧壊圧力が最も小さくなる周方向波数を求めれば、その値が実際に起りえる圧壊圧力および座屈波数の推定値となる。

$$P_c = \frac{Et}{R} \frac{\lambda^4}{(n^2 + \lambda^2/2 - 1)(n^2 + \lambda^2)^2} + \frac{EI_e(n^2 - 1)}{RR_S^2 L_S} \quad (1)$$

ここに、 $\lambda = \pi R/L$ 、 L ；円筒殻の全長、 L_S ；リング間長、 R ；円筒の外半径、 R_S ；有効幅を含んだ補強材の中性軸位置の半径、 E ；ヤング率、 t ；胴板の板厚、 n ；周方向の座屈波数、 I_e ；有効幅を考慮したリングの曲げ剛性である。(1)式の第1項は圧壊圧力に対する胴板の寄与分、第2項はリングの寄与分と考えることができる。本式において、 I_e の算出の際に必要な胴板のリングに対する有効幅 b_e が正確に評価できれば、推定式の精度が高まる。

2.2 有効幅について

胴板のリングに対する有効幅 b_e について、寺田、島本らは数多くのリング補強円筒殻の全体圧壊試験を実施して、その全体圧壊圧力と一致するように有効幅 b_e を逆算し、 $2t \sim 3t$ との結果を得ている²⁾。しかしながら、初期不整による圧壊圧力の低下の影響も含めているため、現在の工作精度を考えると、寺田、島本らが提案した有効幅の値を(1)式に代入して求めた圧壊圧力は小さすぎる値となる。また、本来は初期不整の影響は別途検討すべき性質のものであり、有効幅 b_e の算定にその影響を入れるべきではない。また、Pulos⁷⁾らは有効幅として $1.56\sqrt{Rt}$ を提案している。この有効幅は、Fig.2に示すように外圧を受けるリング補強円筒殻の変形が

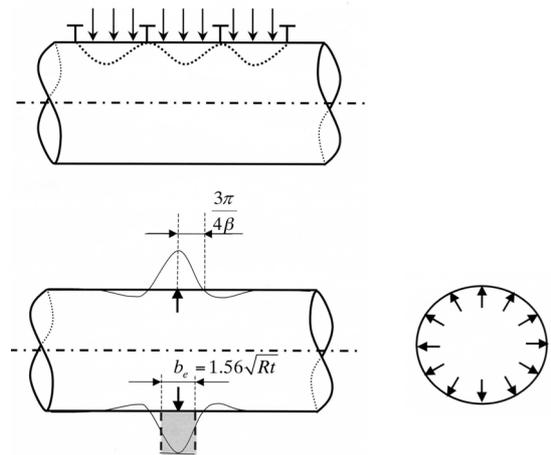


Fig.2 Concept of effective breadth $1.56\sqrt{Rt}$

軸対称に集中荷重を受ける円筒殻の変形形状と相似になることを用いて求めたものであり、周方向応力を円筒殻の長手方向に積分して、リング材位置での応力で除すれば有効幅が求まる。

さらに、大坪らはリング補強材の断面形状を考慮すべきとして、 $b_e = L_S \times (1 - 1.2\sqrt{I_e/A_s}/\sqrt{Rt})$ を近似式として提案している⁸⁾。

本報では、まず上記の有効幅 b_e を全体圧壊強度の評価式に代入して求めた圧壊圧力が、どの程度の精度を有しているかを、FEM解析との比較により調べた。比較に用いた評価式としては、より正確な評価式と考えられる(2)式を用いた。すなわち、胴板の寄与分として第2項を追加したMisesの無補強円筒殻の圧壊圧力式を用い、また補強材の寄与分として、補強材の曲げ剛性 I_e から有効幅分の胴板の板としての曲げ剛性(いわゆるセルフ I)を減じたものを用いて、全体圧壊強度の推定式としている。

$$P_c = \frac{Et}{R} \frac{\lambda^4}{(n^2 + \lambda^2/2 - 1)(n^2 + \lambda^2)^2} + \frac{E}{12(1-\nu^2)} \frac{t^3}{R^3} \frac{(\lambda^2 + n^2 - 1)^2}{n^2 + \lambda^2/2 - 1} + \frac{EI_e(n^2 - 1)}{RR_S^2 L_S} \quad (2)$$

比較に用いた解析では、著者の一人が開発した座屈前の非線形挙動を考慮できる軸対称殻の非軸対称座屈FEM解析プログラムAXIS-BUCK⁹⁾を用いている。計算では、Fig.3に示す補強円筒殻を、2節点の円錐台要素を用いて各リングを3要素で、また1リング間長を10要素でモデル化している。境界条件としては、剛体変位を止めると共に、胴板両端で半径方向を拘束した。荷重は圧力荷重とし、軸方向には断面積に相当する圧力荷重を胴板の板厚中心に作用させている。なお、本プログラムの解析精度に関しては、機械加工で製作されたリング補強円筒殻の全体圧壊モデル、および胴板圧壊

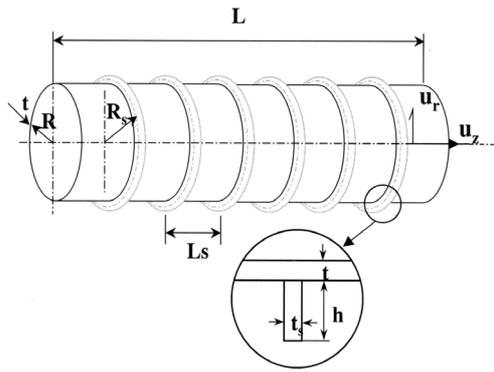


Fig.3 Model for axisymmetrical analysis

Table.1 Principal particulars of models

	series 1	series 2
Length of cylinder	2.0D	2.0D
Radius of cylinder (D/2)	150mm	490mm
Thickness of shell	2.3mm	7.5mm
Ring space	50mm	163mm
Thickness of ring	2.5mm	8.2mm
Ring height	0~14mm	23~38mm

モデルに対する圧壊圧力の計算値が実験値と5%以下の誤差で一致することを確認している¹⁰⁾。

検討対象としたリング補強円筒殻の寸法は、胴板の全長 $L=2.0D$ 、胴板の半径 $R=D/2=150\text{mm}$ 、胴板板厚 $t=2.3\text{mm}$ 、リング間長 $L_s=50\text{mm}$ 、リング板厚 $t_r=2.5\text{mm}$ 、リング高さ $h=0\sim 14\text{mm}$ である (Table. 1 の series 1 参照)。

計算結果を Fig.4 に示す。縦軸は、各有効幅を全体圧壊強度の評価式に代入して求めた圧壊圧力を FEM 解析で求めた圧壊圧力で除している。

Fig.4 に示した結果より、 $b_e=3t$ とした場合の圧壊圧力は、今回の計算の範囲内では最大 25%程度低めに評価する場合がある。また、 $b_e=1.56\sqrt{Rt}$ とした場合の圧壊圧力は、補強

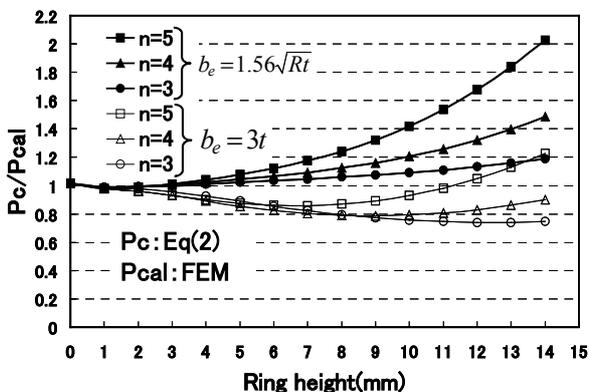


Fig.4 Accuracy of general buckling pressure using proposed effective breadth

材寸法が小さい場合に比較的精度が良いものの、補強材の寸法が大きくなるにつれて圧壊圧力を大きめに評価する結果となった。また、 $b_e=L_s \times (1-1.2\sqrt{I_s/A_s}/\sqrt{Rt})$ とした場合には、今回の検討対象モデルの範囲内では、有効幅は $b_e=1.56\sqrt{Rt}$ より大きくなり、より高めの座屈荷重を与える結果となった。したがって、この評価式についても適用限界があると考えられる。

3. リング補強材の有効幅の算定

3.1 全体圧壊評価式を用いた有効幅の間接的評価

有効幅の値は、全体圧壊強度が分かれば(2)式を用いて逆算することができる。そこで、全体圧壊強度を 2.2 節と同様に FEM 解析で求め、有効幅が補強材寸法、周方向の座屈波数、および胴板の半径/板厚比など種々のパラメータに対してどのように変化するかを調べる。解析対象としたリング補強円筒殻の基準寸法は 2.2 節と同じとした。

まず、胴板の全長 L が直径の 1.0, 1.5 および 2.0 倍の各ケースについて、リング材の高さを変更した場合に有効幅がどのように変化するかを求めた。結果を Fig. 5 に示す。図より、有効幅は周方向の座屈波数 n が少ないほど大きくなっていることがわかる。また、リング寸法が大きくなるに伴って有効幅が減少している。なお、本節で対象としたモデルで、 $b_e=3t$ および $b_e=1.56\sqrt{Rt}$ として有効幅の値を求めると、それぞれ 6.9mm および 29.0mm となり、FEM 計算結果をもとに逆算した有効幅は両者の中間の値になっている。

次に、胴板の半径を変化させて有効幅がどのように変化するかを調べた結果を Fig. 6 に示す。今回の計算の範囲では有効幅は半径の増加に対してほぼ線形に増加しており、 $b_e=1.56\sqrt{Rt}$ より求めた場合と明らかに傾向が異なる。

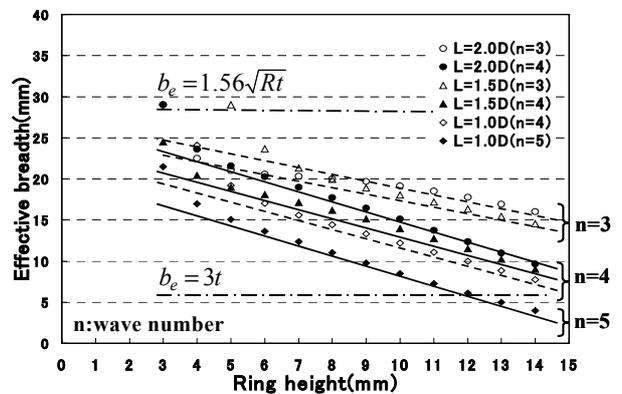


Fig.5 Relation between effective breadth and ring height for various length of cylinder (by AXIS-BUCK)

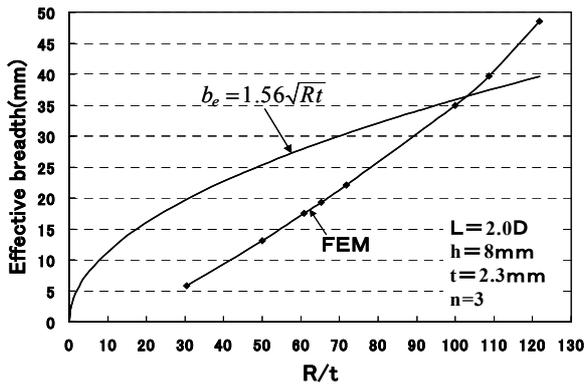


Fig.6 Relation between effective breadth and radius of cylinder

3.2 FEM 解析による有効幅の直接的評価

従来の有効幅を用いた場合に、全体圧壊強度を正確に推定できない場合のあることを 2.2 節で示した。特に、軸対称変形のみを考慮して求めている $b_e = 1.56\sqrt{Rt}$ については、大きめの有効幅を与えている。また、FEM 計算から逆算して求めた有効幅が、周方向座屈モードによって変化する結果であることから、非軸対称座屈に伴う曲げ変形に対する、いわゆる“せん断遅れ”の効果を含めて有効幅を算定する必要があるものと推察される。

そこで、本節では座屈直前の変形状態をシェル要素を用いた非線形 FEM 解析で求め、その応力分布から有効幅を直接的に求めることを考えた。

Fig. 7 に解析モデルを示す。解析プログラムは MSC. Marc で、要素としては円筒の形状を正確に表すため 8 節点シェル要素 (EL No. 72) を用いている。解析範囲はリング補強円筒殻の 1/2 リングスペースを取り出し、周方向座屈波数として $n = 3, 4$ および 5 を考え、変形の対称性を考慮して $360^\circ/2n$ の領域を取り出して計算した。周方向に非軸対称な変形が生じるように (3) 式に示す初期不整を与えた。

$$\delta = \delta_{\max} \times \cos(\pi\theta / \theta_0) \tag{3}$$

ここに、 $\theta_0 = 360^\circ/2n$ である。

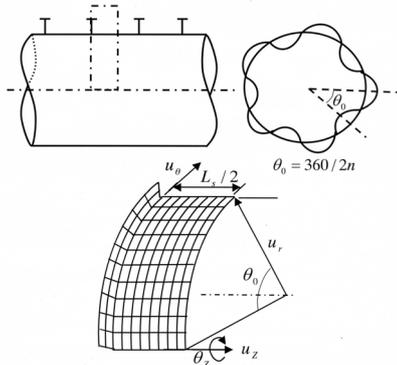


Fig.7 Model for analysis

荷重として圧力を胴板部分に与えるとともに、円筒端部に作用する圧力分を軸方向荷重としてモデル境界上に作用させた。また、変形の対称性を考慮して境界条件を与えると共に、境界上で直線保持の条件も付与している。

有効幅の算定方法としては、Fig. 8 に示すようにリング材の内外面の周方向応力から中性軸位置を求め、この中性軸位置となる有効幅を逆算している。また、求めた有効幅は周方向位置で変化するので、平均値を求めている。なお、最大初期不整として板厚の 0.01、0.05、0.1、および 0.2 倍を与えた計算を行い、これらの値から初期不整がない場合の有効幅を外挿して求めている。求めた有効幅を Fig. 9 に示す。

有効幅の値は、周方向の座屈波数 n が小さいほど大きく、全体圧壊圧力から間接的に評価した有効幅 (Fig. 5 参照) と傾向が一致している。このことから、軸対称変形のみを考慮した $b_e = 1.56\sqrt{Rt}$ に、曲げ変形に伴うせん断遅れに起因する有効幅の減少を考慮して、有効幅を算定すべきであることがわかる。そのほかの傾向として、補強材の大きさとともに有効幅が減少する傾向は見られるが、Fig. 5 ほど顕著でない結果であった。

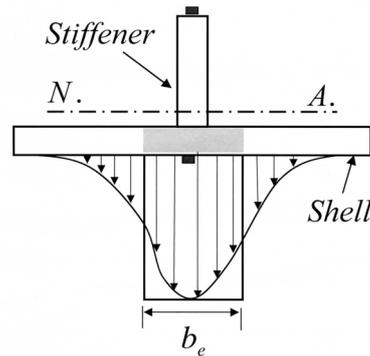


Fig.8 Evaluation technique of effective breadth using stresses at ring stiffener

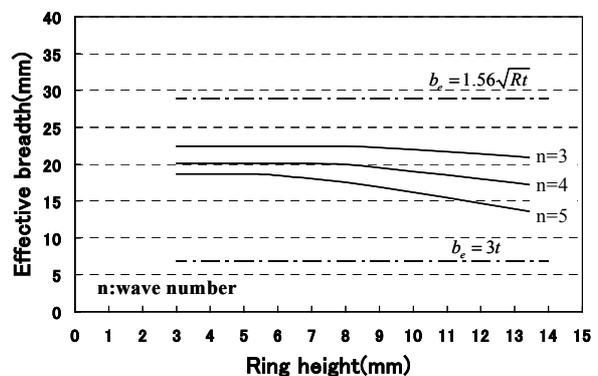


Fig.9 Relation between effective breadth and ring height for series I cylinder (calculated by Marc.)

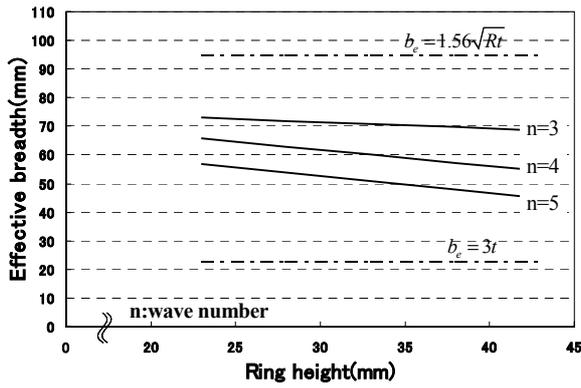


Fig. 10 Relation between effective breadth and ring height for series 2 cylinder (calculated by Marc.)

また、異なる寸法の円筒殻についても、有効幅が周方向座屈波数ならびにリング高さとともにどのように変化するかを調べるため、胴板の半径 $R = D/2 = 490\text{mm}$ 、胴板板厚 $t = 7.5\text{mm}$ 、リング間長 $L_s = 163\text{mm}$ 、リング板厚 $t = 8.2\text{mm}$ 、リング高さ $h = 23 \sim 38\text{mm}$ の補強円筒殻 (Table. 1 の series 2) についても同様に計算を行い、有効幅を求めた。計算で得られた有効幅を Fig. 10 に示す。有効幅の絶対値は円筒殻の寸法が違うのでもちろん Fig. 9 の結果と異なるが、周方向座屈波数やリング高さとの関係は、同様の傾向を示していることが分かる。

3.3 有効幅の評価方法の提案

前節で汎用 FEM ソフト MSC. Marc を用いた有効幅の直接的評価結果を示したが、設計初期段階で補強円筒殻の圧壊圧力を推定する場合に、Fig. 7 に示した解析モデルを作成して有効幅を求めることは、時間がかかり現実的でない。そこで、有効幅を簡易的に求める方法として以下の方法を提案する。

- ① リング補強材近傍の胴板の軸対称変形 (Fig. 2 参照) をもとに算定した有効幅 (以下、軸対称変形による有効幅と称する) $b_e = 1.56\sqrt{Rt}$ を求める。
- ② 次に、(2) 式より全体圧壊圧力が最も小さくなる n の値、すなわち全体座屈の周方向波数 n_0 を求める。
- ③ セン断遅れの影響を評価するため、Fig. 11 に示した連続補強平板の曲げの有効幅¹¹⁾のグラフより、有効幅の減少量を求める。すなわち、全体座屈の波数から座屈変形における曲げスパン $l = \pi R/n_0$ を求め、リング間長 L_s を Fig. 11 における補強材間隔 B と考え、 b_e/B を求める。
- ④ 軸対称変形による有効幅と曲げの有効幅より、(4) 式を用いて、リング補強材の有効幅 b_e' を求める。

$$b_e' = 1.56\sqrt{Rt} \times b_e/B \quad (4)$$

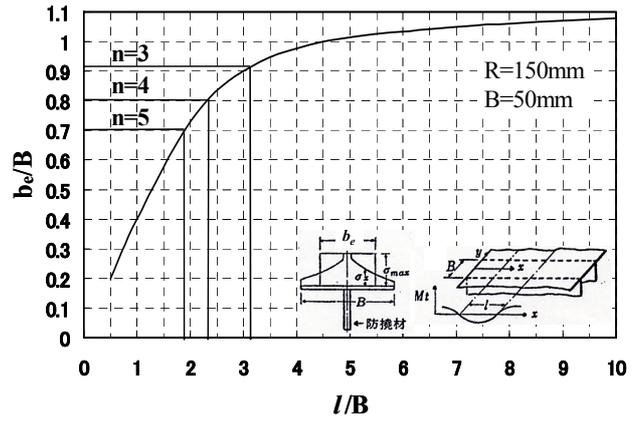


Fig. 11 Effective breadth of Multiple webs under uniform load

2.2 節で検討した寸法の円筒殻について、上記の手順で有効幅を求めた結果を Table. 2 に示す。Table. 2 にはこれまで提案されていた有効幅 $b_e = 1.56\sqrt{Rt}$ と $b_e = 3t$ の値も示したが、(4) 式で求めた有効幅は両者に比べて FEM を用いて直接的に求めた値に近く、より精度の良い有効幅の推定式であることがわかる。なお、FEM 解析の結果と (4) 式の結果の差は、補強材寸法が大きくなると増大する傾向にある。この原因としては補強材寸法が大きくなると全体圧壊圧力が高くなり、隣接するリング補強材間の胴板の局部座屈強度との差が小さくなり、胴板座屈による有効幅の低下の影響が徐々に現れてくるためと考えられる。

Table.2 Effective Breadth (series 1)

Wave number	Ring height (mm)	Effective breadth				
		Calculated by Marc. B_1 (mm)	By using Eq. (4) b_e' (mm)	b_e/B_1	$1.56\sqrt{Rt}/B_1$	$3t/B_1$
n=5 (L=1.0D)	6	18.5	20.3	1.10	1.57	0.37
	8	17.5	20.3	1.16	1.65	0.39
	10	16.2	20.3	1.25	1.79	0.43
n=4 (L=1.5D)	8	19.9	23.2	1.16	1.45	0.35
	10	20.0	23.2	1.16	1.45	0.35
	12	18.0	23.2	1.29	1.61	0.38
n=3 (L=2.0D)	10	22.0	26.7	1.21	1.32	0.31
	12	21.4	26.7	1.24	1.35	0.32
	14	20.1	26.7	1.33	1.44	0.34

4. 全体圧壊圧力の簡易評価法の提案

3.3 節に示した方法で求めた有効幅を (2) 式に代入して圧壊圧力を計算した結果を Table. 3 に示す。また、比較のため、正解値に近いと考えられる軸対称殻解析プログラム AXIS-BUCK で求めた結果も合わせて示す。従来の有効幅の算定式を用いた場合に比較して精度は向上しているものの、

Table.3 Estimated Collapse Pressure by using Equation (2)
(for series 1 cylinders)

Wave number	Ring height (mm)	Estimated collapse pressure		
		FEM Result P (kgf/mm ²)	By using Eq. (2)	
			Substituting b_c' P_c (kgf/mm ²)	(P_o/P)
n=5 (L=1.0D)	6	0.88	0.94	1.07
	8	1.37	1.59	1.16
	10	1.92	2.52	1.31
n=4 (L=1.5D)	8	0.96	1.03	1.08
	10	1.43	1.64	1.15
	12	1.96	2.46	1.26
n=3 (L=2.0D)	10	0.94	1.01	1.08
	12	1.31	1.46	1.12
	14	1.74	2.05	1.18

Table.4 Comparison between Estimated Collapse Pressure
by using Equation (5) and FEM Result

Model	Wave number	Ring height (mm)	Estimated collapse pressure		
			FEM Result P (kgf/mm ²)	By using Eq. (5) P_b (kgf/mm ²)	P_b/P
series 1	n=5 (L=1.0D)	6	0.88	0.89	1.01
		8	1.37	1.38	1.01
		10	1.92	1.90	0.99
	n=4 (L=1.5D)	8	0.96	0.99	1.03
		10	1.43	1.48	1.04
		12	1.96	2.02	1.03
	n=3 (L=2.0D)	10	0.94	0.98	1.05
		12	1.31	1.38	1.06
		14	1.74	1.85	1.06
series 2	n=5 (L=1.5D)	28	1.49	1.48	0.99
		33	1.94	1.89	0.97
		38	2.38	2.25	0.95
	n=4 (L=1.5D)	28	1.09	1.12	1.04
		33	1.46	1.51	1.04
		38	1.86	1.92	1.03
	n=3 (L=1.5D)	28	0.98	1.00	1.02
		33	1.21	1.24	1.03
		38	1.48	1.53	1.04

大きな補強材寸法の場合に、AXIS-BUCK を用いた結果との差は大きい。この原因として前節の最後でも述べたように、リング補強材が大きくなると胴板座屈との連成効果が表われて有効幅が低下するが、このことが有効幅の簡易評価手法では考慮できていないために、圧壊圧力の推定誤差が大きくなったものと考えられる。

そこで、この影響を考慮した全体圧壊圧力の評価式を検討する。Table. 3 に示した全体圧壊圧力に対して、胴板座屈との連成の影響を考慮して、(5)式を用いて補正する方法を提案する。

$$P_b / P_c + (P_b / P_s)^2 = 1 \tag{5}$$

ここに、 P_b は補正した圧壊圧力、 P_c は(4)式の有効幅を用いて(2)式で求めた圧壊圧力、 P_s は(2)式の第1項と第2項をもとにした(6)式より求めた胴板座屈圧力である。

$$P_s = \frac{Et}{R} \frac{\lambda_s^4}{(n^2 + \lambda_s^2 / 2 - 1)(n^2 + \lambda_s^2)^2} + \frac{E}{12(1-\nu^2)} \frac{t^3 (\lambda_s^2 + n^2 - 1)^3}{R^3 n^2 + \lambda_s^2 / 2 - 1} \tag{6}$$

ここに、 $\lambda_s = \pi R / L_s$ 、 n は全体圧壊モードの周方向波数である。

Table. 4 に、series 1 と series 2 の円筒に対して(5)式を用いて推定した圧壊圧力値 P_b を、正解値に近いと考えられるFEM解析プログラムAXIS-BUCKを用いて計算した結果と比較して示す。両者の比較より、(5)式を用いて推定した結果はリング補強円筒殻の外圧作用下での全体圧壊圧力を精度よく推定できることが分かる。

5. 結 言

これまで、リング補強円筒殻の全体圧壊強度の推定には、圧壊圧力に対する胴板の寄与分とリング材の寄与分を別々に求め、その合計を圧壊圧力とする算定式(分離剛性法)を用いる方法が一般的に用いられてきた。このうち、リング材の寄与分を計算する際に用いられる胴板の有効幅の評価式について、いくつかの提案がなされているが、確定的な評価法は見つかっておらず、結果として全体圧壊強度の推定精度は十分とはいえないものであった。

そこで、本研究では有限要素法を用いて有効幅を直接的に求める方法を示し、これに基づいて正確な有効幅を求めるとともに、従来提案されてきた有効幅の精度について検討した。また、計算結果を参考に力学的考察を加え、リング補強材の軸対称変形から算出される有効幅 ($b_c = 1.56\sqrt{Rt}$) に、非軸対称座屈モード波数から算出できる曲げの有効幅を考慮することにより、より正確な有効幅を算出できる評価式を提案した。

また、従来の全体圧壊圧力の算定式では考慮されていなかった胴板座屈との連成の影響を加味した新しい全体圧壊圧力の評価式を提案した。さらに、種々の寸法の補強円筒殻に対して、提案した評価式を用いて求めた全体圧壊圧力がFEMを用いた計算結果とよく一致することを示した。

なお、今回は全て弾性域での検討であり、塑性化の影響に

については初期不整による座屈強度の低下の影響とともに今後さらに検討してゆきたいと考える。

6. 参考文献

- 1) Tokugawa, T. : Model experiments on the elastic stability of closed and cross-stiffened circular cylinders under uniform external pressure, Proc. World Engineering Congress, Tokyo, Vol.29, 1929
- 2) 寺田明, 島本参之助 : 補強材を有する薄肉円筒殻の圧壊に関する研究, 造船協会論文集, Vol.108, 1960
- 3) Johnston, B.C. (edited by) : Guide to stability design criteria for metal structure, third edition, A Wiley-Interscience Publication, 1976
- 4) Kendrics, S. : The Buckling Under External Pressure of Ring Stiffened Circular Cylinders, Trans. RINA, Vol.107, 1965
- 5) 山本善之 : 補強円筒殻の外圧による全体圧壊の研究, 造船協会論文集, Vol.113, 1965
- 6) Bryant, A. R. : Hydrostatic Pressure Buckling of a Ring-stiffened Tube, Naval Construction. Research -Establishment Report, R-306
- 7) Pulos, J. G. at al. : Axi-symmetric Elastic Deformations and Stresses in a Ring-Stiffened Perfectly Circular Cylindrical Shell under External Hydrostatic Pressure, David Taylor Model Basin Report 1497, 1961
- 8) 大坪英臣, 吉田二郎 : 補強円筒殻の全体圧壊と有効幅の検討, 日本造船学会論文集, Vol.164, 1989
- 9) 安川度, 川上肇, 吉川孝男 : 初期不整を有する球殻の圧壊強度解析, 日本造船学会論文集, Vol.151, 1982
- 10) Y. Yamamoto, Y. Homma, K. Oshima, Y. Mishiro, H. Terada, Y. Yoshikawa, H. Morihana, Y. Yamauchi, M. Takenaka : General Instability of Ring-Stiffened Cylindrical Shells under External Pressure, Marine Structures 2, 1989
- 11) H. A. Schade : The Effective Breadth of Stiffened Plating Under Bending Loads, SNAME, Vol.59, 1951
- 12) 吉川孝男, 前田正広, 吉村健司 : 外圧を受けるリング補強円筒殻の全体座屈強度と有効幅に関する研究, 関西造船協会講演概要集, 第24号, 2005