

一种新的 mc-PPS 瞬时频率变化率的估计

张雯雯 司锡才

(哈尔滨工程大学信息与通信工程学院 哈尔滨 150001)

摘要: 该文在分数阶傅里叶(FRFT)计算分解的基础上, 讨论了其某些步骤在信号检测中的冗余, 提出了一种简化的分数阶傅里叶算法(RFRFT), 详细讨论了它的几种重要性质, 并结合一次相位差分法提出了乘积性RFRFT(PRFRFT)算法, 实现了 mc-PPS 的瞬时频率变化率(IFR)估计。同时借助角度变换提高了 RFRFT 识别参数的分辨率。该方法运算量小, 易于实现。仿真结果证实了该方法能够有效地抑制噪声和交叉项, 可以适应低信噪比环境。

关键词: 多分量多项式相位信号; 瞬时频率变化率; 参数估计; 分数阶傅里叶变换; 简化算法

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)12-2881-05

A New Estimation Method of Instantaneous Frequency Rate for Multicomponent Polynomial Phase Signal

Zhang Wen-wen Si Xi-cai

(College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: This paper discusses some redundancy steps of FRFT in signal detection based on the decomposition of FRFT, and puts forward a Reduced FRFT (RFRFT) algorithm. Then it discusses several important characters of RFRFT in detail. Combined with the phase difference method, it proposes the product RFRFT arithmetic to realize the Instantaneous Frequency Rate (IFR) estimation of mc-PPS. And it enhances the parameter resolution rate of RFRFT by angle transform. This method is easy to calculate and implement. Simulation results validate the method is able to suppress the noise and cross-terms, and can apply to low SNR environment.

Key words: Multicomponent Polynomial Phase Signal(mc-PPS); Instantaneous Frequency Rate(IFR); Parameter estimation; FRactional Fourier Transform(FRFT); Reduced arithmetic

1 引言

自然界的许多信号以及许多工程应用, 如通信、雷达、声纳等领域中所遇到的信号, 其相位都是时间 t 的连续函数。根据 Stone-Weierstrass 理论, 在有限观测时间内, 任何时间 t 的连续函数均可用 t 的高阶多项式一致逼近, 故此类信号的相位常被表示成时间 t 的高阶多项式形式, 此类信号亦被称为多项式相位信号(Polynomial Phase Signals, PPS)。

现有的PPS参量估计方法常可归为以下两类: (1)基于时频分析技术的方法, 它是一类非参数化方法^[1]。该方法首先采用时频分析技术, 如Cohen类时频分布等, 估计信号的瞬时频率, 然后再进行相位参数的估计。该方法通常不适于分析高阶PPS, 且易受交叉项困扰; (2)参数化方法^[2-5], 该方法利用信号时变相位的多项式结构估计相位参数。目前较受欢迎的参数化方法是一种基于高阶模糊度函数(HAF)及高阶模糊度函数积(PHAF)的方法, 因其计算量相对较小, 而日渐成为一种主要的估计PPS参量的次优方法。但它们均

首先要对信号进行 $M-1$ 次相位差分后再作相应的变换, 从文献[6]的分析知, 由于相位差分是非线性变换, 经过一次相位差分变换, 信号的信噪比至少下降3dB, 两次相位差分后信噪比至少损失7dB, 而且随着信噪比的降低, 其损失会远大于7dB。且使用这两种方法对各低阶参数的估计都是建立在利用高阶参数估计值对PPS解调频基础上的, 因此会导致误差累计, 造成误差的放大。针对以上现象, 本文结合相位差分法与分数阶傅里叶变换的性质首次提出了一种新的估计 mc-PPS 瞬时频率变化率(IFR)的方法——乘积性简化分数阶傅里叶(PRFRFT)方法。这种方法可以更好地在分数阶域滤出交叉项和噪声, 并最大程度保留自项, 从而达到抑制交叉项与噪声, 提高分辨率的目的。它为 mc-PPS 的检测及参量估计提供了新的思路。由于本文主要针对非线性调频信号在电子侦察中的应用, 所以只考虑三阶 PPS 信号的参数估计。

2 分数阶傅里叶变换的简化算法

2.1 分数阶傅里叶变换

FRFT 的概念早在 1929 年已被提出, 在 20 世纪 80 年代应用于光学领域, 从 90 年代起成为信号处理领域的研究

热点之一。FRFT 是 Fourier 变换的广义形式,它在统一的时频域上进行信号处理,因此它相对于传统的 Fourier 变换灵活性更强,适于进行非平稳信号的处理。FRFT 的许多性质在理论探讨上都有很大的意义,当 $\alpha \neq n\pi/2$ 时,FRFT 的计算过程可以拆解为以下 4 个步骤^[7]:

(1)原信号与一线性调频函数相乘

$$g(t) = x(t)e^{j\pi t^2 \cot \alpha} \quad (1)$$

(2)做 Fourier 变换(其变元乘以尺度系数 $\csc \alpha$)

$$g'_\alpha(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j2\pi ut \csc \alpha} dt \quad (2)$$

(3)再与一线性调频函数相乘

$$X'_p(u) = g'_\alpha(u)e^{j\pi u^2 \cot \alpha} \quad (3)$$

(4)乘以一复幅度因子

$$X_p(u) = \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{2\pi}} X'_p(u) \quad (4)$$

2.2 简化的分数阶傅里叶算法

在计算 FRFT 时,其第(3)和第(4)步分别保证了 FRFT 的旋转叠加性和保范数不变性,它们在解微分方程以及光学研究中有着重要的应用,这也使得这两个性质成为 FRFT 的本质特征。但在信号检测中这两个性质却是无关紧要的,因为模最大值搜索和二维谱峰搜索都没有利用这两个性质。考虑到第(3)步不会对 FRFT 变换的模值产生影响,而第(4)步虽然对计算变换的模值有影响,但它也只是将模值整体调大或调小,不会影响模最大值的分布位置,故本文省略了后两步的计算,从而简化了 FRFT,这里称这种新变换为简化的分数阶傅里叶变换(Reduced Fractional Fourier Transform, RFRFT)。信号的 RFRFT 定义 $Y_p(u)$ 为

$$Y_\alpha(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j\pi t^2 \cot \alpha} e^{-j2\pi ut \csc \alpha} dt, \quad \alpha \neq k\pi \quad (5)$$

它具有以下几种性质:

(1)线性特性

$$Y_\alpha \left[\sum_n c_n f_n(t) \right] = \sum_n c_n [Y_\alpha f_n(t)] \quad (6)$$

(2)可逆性

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \sin \alpha} e^{-j\pi t^2 \cot \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} Y_\alpha(u) e^{j2\pi ut \csc \alpha} du, \quad \alpha \neq k\pi \quad (7)$$

(3)时移特性

$$Y_\alpha[f(t-\tau)] = e^{j\pi \tau^2 \cot \alpha} e^{-j2\pi \tau u \csc \alpha} Y_\alpha(u - \tau \cos \alpha) \quad (8)$$

(4)频移特性

$$Y_\alpha[e^{j2\pi kt} f(t)] = Y_\alpha(u - k \sin \alpha) \quad (9)$$

(5)微分性

$$Y_\alpha[f'(t)] = \left(\cos \alpha \frac{d}{du} + j2\pi u \csc \alpha \right) Y_\alpha(u) \quad (10)$$

证明 由式(7)有 $f'(t) = \frac{1}{2\pi \sin \alpha} \left[e^{-j\pi t^2 \cot \alpha} (-j2\pi t \cot \alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} Y_\alpha(u) e^{j2\pi ut \csc \alpha} du + e^{-j\pi t^2 \cot \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} Y_\alpha(u) j2\pi u \csc \alpha \cdot e^{j2\pi ut \csc \alpha} du \right]$

将上式拆分为两个部分:

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi \sin \alpha} e^{-j\pi t^2 \cot \alpha} \cdot (-j2\pi t \cot \alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} Y_\alpha(u) e^{j2\pi ut \csc \alpha} du \quad (11)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi \sin \alpha} e^{-j\pi t^2 \cot \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} [Y_\alpha(u) j2\pi u \csc \alpha] \cdot e^{j2\pi ut \csc \alpha} du \quad (12)$$

由式(11)有

$$\frac{f_1(t)}{-j2\pi t \cot \alpha} = \frac{1}{2\pi \sin \alpha} e^{-j\pi t^2 \cot \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} Y_\alpha(u) e^{j2\pi ut \csc \alpha} du$$

$$\text{故} \quad Y_\alpha \left[\frac{f_1(t)}{-j2\pi t \cot \alpha} \right] = Y_\alpha(u) = Y_\alpha[f(t)]$$

$$\text{则} \quad f_1(t) = -j2\pi \cot \alpha \cdot t f(t)$$

$$\text{由于} \quad Y_\alpha[t \cdot f(t)] = j \frac{1}{2\pi} \sin \alpha \cdot \left[\frac{d}{du} Y_\alpha(u) \right]$$

$$\text{所以} \quad Y_\alpha[f_1(t)] = \cos \alpha \cdot \left[\frac{d}{du} Y_\alpha(u) \right]$$

同时由式(12)可知 $Y_\alpha[f_2(t)] = j2\pi u \csc \alpha \cdot Y_\alpha(u)$, 则

$$Y_\alpha[f'(t)] = Y_\alpha[f_1(t) + f_2(t)] = \left[\cos \alpha \frac{d}{du} + j2\pi u \csc \alpha \right] Y_\alpha(u) \quad (13)$$

(6)它不满足能量守恒,但满足下等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi \sin \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} |Y_\alpha(u)|^2 du \quad (14)$$

此式说明信号经过变换后不具备保范数不变性,能量被压缩,从而使得变换两边范数(能量)不守恒。但这个压缩因子可以使变换在对大调频斜率的 LFM 信号时,即在旋转角度较小时,压缩在旋转角度为零附近的那些幅度对所求峰值的影响,因此能很好地抑制时域轴附近信号的振荡干扰,从而能有效的检测和估计出具有大调频斜率的 LFM 信号。这一性质对本文研究的大频率 PPS 的参数估计是非常有用的。

(7)不满足旋转相加性,即

$$Y^{\alpha+\beta}(u) \neq Y^{\beta+\alpha}(u) \neq Y^\alpha[Y^\beta(u)] \quad (15)$$

2.3 LFM 信号的 RFRFT

2.3.1 参数值的估计方法 由 RFRFT 的性质可以知道,它在某个分数阶域对给定的 LFM 信号与 FRFT 一样具有很好的能量聚集特性,利用这一特性,可以实现对 LFM 信号的检测和参数估计。且此时的 LFM 的调频率 \hat{k} 、初始频率 \hat{f}_0 同样有如下对应关系式:

$$\left. \begin{aligned} \hat{k} &= -\cot(\hat{p}_0\pi/2) \\ \hat{f}_0 &= \hat{u}_0 \csc(\hat{p}_0\pi/2) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

值得注意的是由于文中在对运算数据快速 RFRFT 前,首先对数据做了量纲归一化处理,故信号在尺度伸缩归一化后,它的参数值必然发生变化,用 RFRFT 方法所估计得出的调频率和初始频率是归一化的信号参数值,而不是实际参数值。设归一化前信号的调频率为 k , 初始频率为 f_0 , 归一化后的信号参数分别为 k' 、 f'_0 , 则有:

$$\left. \begin{aligned} k' &= \frac{v}{x} = \frac{fs}{t/s} = ks^2 = kt_0/f_s \\ f'_0 &= f_0s = f\sqrt{t_0/f_s} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

2.3.2 分辨率的提高 为了保证 RFRFT 的分辨率, 可以采取在某一区间内减小旋转角 α 的搜索间距 Δp 的办法。但无限地减小 Δp 并不能使分辨率提高, 反而使计算量大大增大。因此, 单单通过减小旋转角的搜索间隔来提高其分辨率是不可行的。

文中采取了对采样数据内插或抽取 M 倍的办法来提高其分辨率。设搜索的数据长度为 τ , 与之匹配的旋转角为 α , 阶数为 p_1 , 变换后数据的长度为 $M\tau$, 与之匹配的旋转角为 β , 阶数为 p_2 。计算两者的 RFRFT, 由于经过无量纲化后, 两者搜索数据的时域长度不变, 而变换后数据的旋转域将被拉伸 ($M > 1$) 或压缩 ($M < 1$) M 倍, 如图 1 所示。因此, 达到最佳匹配时两者的旋转角 α , β 存在如式(18)关系。

$$\tan \beta = M \tan \alpha \quad (18)$$

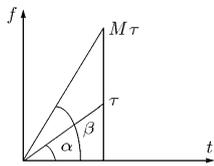


图1 角度变换示意图 ($M > 1$)

提高分辨率, 主要是要将不同信号参数值对应应在 p 轴上的差距拉大以区分信号。首先考虑两种极限情况: 当 p 值接近 0 或 2 时, 即对应的旋转角接近于 0 或 π 时, p 值的微小变化会导致 $\cot \alpha$ 和 $\cot \alpha$ 的剧烈变化, 不利于区分信号; 而当 p 值接近 1 即旋转角接近 $\pi/2$ 时, 由于 $\cot \alpha$ 和 $\cot \alpha$ 的值随 p 的变化过于缓慢, 亦不利于区分信号。因此, 需选择适当的 M 值, 以使得 $\cot \alpha$ 和 $\cot \alpha$ 随 p 值变化的速度适中, 即让旋转角向 $\pi/4$ 或 $3\pi/4$ 轴方向移动。所以应先对信号进行初定位, 根据 p 的取值范围找到适当的数据变化方式进而确定 M 值。

3 基于乘积 RFRFT 的 IFR 估计算法

对多分量三阶多项式相位信号进行一次相位差分后得到的信号含有对应个数的线性调频信号, 同时含有 p_M^2 个以三次相位函数形式存在的交叉项, 这些交叉项经 RFRFT 后会出现伪峰, 虽然其伪峰幅度相对较小, 当信号数较少且信噪比较高时, 不会影响信号的 IFR 估计。但随着信号分量数增多或信噪比的降低, 伪峰的存在很可能会导致错误的估计结果。而 PHAF 虽然能有效避免伪峰, 却会带来信噪比的损失以及误差的累积。针对以上现象, 本文首次提出了一种基于乘积性 RFRFT 的 IFR 估计算法。它首先对信号进行一次相位差分, 再根据信号自项的调频频率以及经处理后的自项初始频率均与延迟 τ_l 成正比, 而交叉项信号则与 τ_l 没有此依赖关系这一特征, 实现交叉项的抑制以达到估计参数的目的。

它具有如下特点: (1) 由于通过不同时延后的自项经坐标

变换后处于相同的位置, 所以自项将在 PRFRFT 中增强; (2) 交叉项和噪声经坐标变换后对其进行 RFRFT, 位于不同的位置, 所以交叉项和噪声将在 PRFRFT 中减弱; (3) 当 $L=1$ 时, PRFRFT 退化为 RFRFT, L 越大, 交叉项和噪声抑制的效果也越好, 但计算量越大。具体步骤如下:

(1) 对信号做 L 次不同延时的一次相位差分, 其对应线性调频信号的调频斜率分别为 $\hat{k}_m = 2a_{3,m}\tau_l$;

(2) 对它们做 RFRFT, 并将每个变换的横坐标作相应的坐标变换;

(3) 将处理结果做乘积运算, 此时的信号峰值即为待估参量 $a_{3,m}$ 。

(4) 已知 $a_{3,m}$ 与 τ_l 后, 初始频率 $\hat{f}_{0m} = a_{2,m}\tau_l - a_{3,m}\tau_l^2$ 也可以看作是一个与延迟 τ_l 成正比的量, 对其重复步骤(2), 步骤(3)即可估计出 $a_{2,m}$ 的值。

这里需要注意如下几个问题:

(1) 坐标变换问题。线性调频信号斜率满足 $\hat{k}_m = 2a_{3,m}\tau_l = -\cot \alpha_{m,l}$, 一旦延迟时间 τ_l 发生变化, 则信号斜率也随之改变, 即对应的 RFRFT 的最大值位置也会发生变换。若对每个横坐标都进行 $u = -\cot \alpha_{m,l} / 2\tau_l$ 的变换, 则每个自项的最大值都将位于 $u = a_{3,l}$ 处。而对于初始频率 \hat{f}_{0m} , 估计出参量 $a_{3,m}$ 后, 只需对每个横坐标都进行 $v = (\hat{f}_{0m} + a_{3,m}\tau_l^2) / \tau_l$ 的变换即可保证其最大值均位于 $v = a_{2,m}$ 处。

(2) 接收信号序列与实际三阶 PPS 信号序列起点不一致的问题。在实际接收到的信号序列中, 三阶 PPS 信号并不一定与实际接收信号序列的起始点一致, 由此造成了 τ_l 并不是三阶 PPS 相位差分运算的真实延迟时间, 这将直接导致参数估计误差的恶化甚至失效。为了避免这一现象, 可以采取对信号前后均补 τ_l 个零, 再将补零信号进行相位差分运算的方法实现, 此时的 τ_l 即为真实延迟时间。

4 仿真实验

下面以一组仿真实例说明本文方法的实际效果。仿真以如式(19)所示的 mc-PPS 为例, 假设各个分量具有相同强度, 持续时间 $4\mu\text{s}$, 且最高阶相位系数 $a_{3,m}$ 均不相等, 其参数如表 1 所示。综合计算量和识别效果等因素, 文中选 $L=5$, 所有仿真均以估计 $a_{3,m}$ 为例。

$$x(n) = \sum_{m=1}^M b_m \exp \left(j2\pi \sum_{i=0}^3 \frac{1}{i} a_{i,m} n^i \right) \quad (19)$$

实验 1 图 2 为信噪比为 -7dB , 第 2, 第 3 两个信号在不同 Δp , M 作用下, 进行 PRFRFT 后的识别效果放大图。

表 1 仿真中所用的 7 个分量的一、二、三阶相位系数

$a_{i,m}$	1	2	3	4	5	6	7
1(10^6Hz)	30	40	60	10	10	20	80
2(10^{12}Hz/s)	10	15	9	6	8	6	0
3(10^{18}Hz/s^2)	1	4.5	5	7	10	12	15

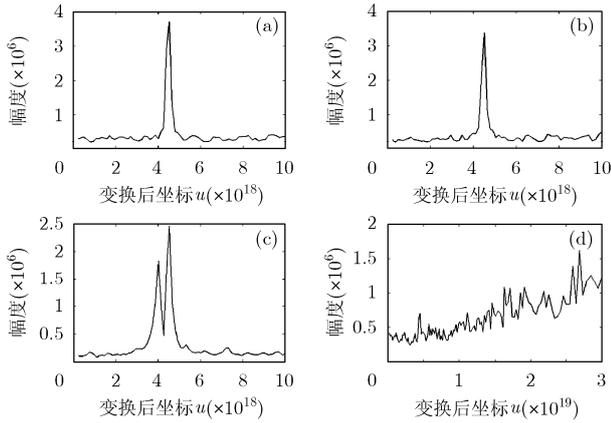


图2 信号在不同的 Δp 、 M 作用下的识别效果图

首先对信号初定位后知 M 应选小于 1 的值,即对信号进行压缩处理。图中第 1 幅为 $\Delta p = 0.01, M = 1$ 时的波形,从它可以看出,当两个信号参数比较接近时,无法分辨两个信号;第 2 幅为 $\Delta p = 0.005, M = 1$ 时的波形,它表明此时单纯减小 Δp 并也不能达到分离两个信号的效果,反而会大大增大计算量;第 3 幅为 $\Delta p = 0.005, M = 1/4$ 时的波形,从它可以看出,此时能正确区分两个信号。第 4 幅为 $\Delta p = 0.005, M = 1/5$ 时的波形,从它可知,此时由于处理的数据过少,不能达到很好的抑制噪声的影响,识别效果变差。因此,后续实验均是在 $\Delta p = 0.005, M = 1/4$ 的条件下进行的。这里值得说明的是,此时不仅分辨效果好,且由于进行了压缩处理,故每次处理的数据量也会减少,从而降低了运算的复杂度。

实验 2 图 3(a),3(b)给出了对两个 PPS 时延后,在 -7dB 高斯白噪声环境下, RFRFT(a)与 PRFRFT(b)的识别性能对比图。从图中可以看出,此时 PRFRFT 抑制噪声的性能明显优于 RFRFT。图 3(c)给出了同时存在 4 个 PPS 时, RFRFT 在无噪环境下的识别效果图。从它可以看出,此时采用 RFRFT 方法已经无法区分各个信号参数。图 3(d)为 0dB 时,对 4 分量 PPS 信号采用 PRFRFT 方法的识别效果图。从图可见,此时采用 PRFRFT 方法仍能很好的识别信号。

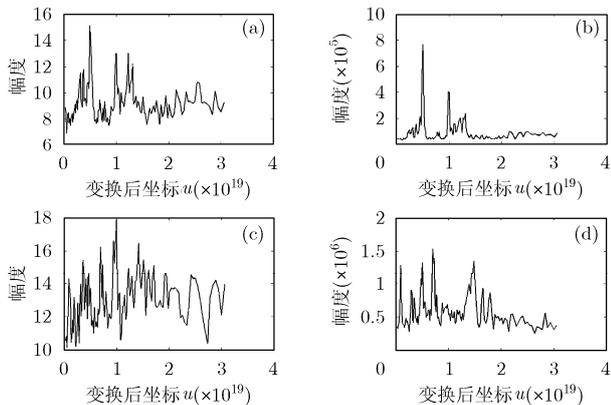


图3 RFRFT 与 PRFRFT 的识别效果对比

实验 3 图 4 给出了 $\Delta p = 0.005, M = 1/4$ 时,含 1, 2, 3, 5 个分量的 PPS 在它们所能达到的最低信噪比条件下,经一次相位差分后的 PRFRFT 识别效果图。含 4 个分量的 PPS 识别效果图在图 3(d)中已经给出。从它们可以看出,信号分量数目越少,参数估计的效果越好。这主要是由于当信号分量较多时,交叉项分量急剧增加,由交叉项所产生的离散点也随之增多,抬高了噪声水平,导致识别能力下降所致。这是与理论分析相吻合的。

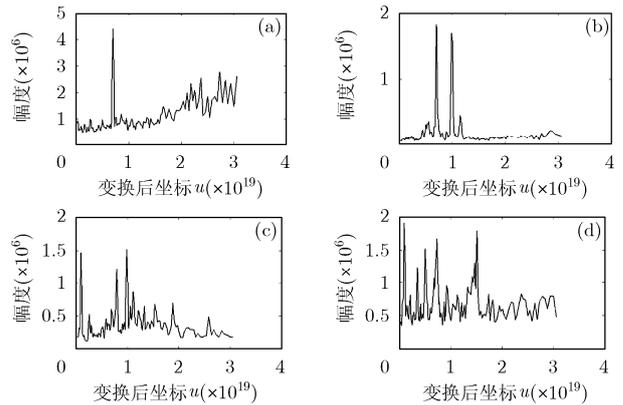


图4 mc-PPS经一次相位差分后的PRFRFT识别图

注:图 4(a)为第 4 个信号变换后的输出波形(-9dB);图 4(b)为第 4 和第 5 个信号变换后的输出波形(-8dB);图 4(c)为第 1, 4, 5 个信号变换后的输出波形(-4dB);图 4(d)为第 1, 3, 4, 6, 7 个信号变换后的输出波形(8dB)。

实验 4 表 2 给出了对含有不同分量个数的信号分别采用 RFRFT 和 PRFRFT 方法识别时,所能达到的最低信噪比对比。表中数据均为将 7 个分量任意组合后通过 500 次独立仿真得到。从表中可以看出,当信号分量数较少时,两种方法性能较为类似。但随着信号分量数的增加, RFRFT 方法的性能下降严重,此时, PRFRFT 法明显优于 RFRFT。当信号分量数增加到 4 个后, RFRFT 失效,而 PRFRFT 仍能正确识别。值得一提的是,由于 RFRFT 无需乘积运算,计算量小,因此,在实际应用中也应予以适当考虑,即当信号数小于 2 个时,作者建议采用 RFRFT 方法进行识别。

5 结论

本文提出了一种简化的分数阶傅里叶算法(RFRFT),详细讨论了它的几种重要性质,利用其第(6)条性质即信号经过 RFRFT 后能量被压缩,从而能更好地检测和估计具有大调斜率的 LFM 信号,并结合一次相位差分法提出了 PRFRFT

表 2 不同 RFRFT 与 PRFRFT 的识别效果对比(dB)

信号数	1	2	3	4	5	6
PRFRFT	-9	-8	-4	0	8	-
RFRFT	-9	-6	3	-	-	-

注:“-”表示在该信噪比下无法检测,方法失效。

算法,实现了兆级以上频率的 mc-PPS 瞬时频率变化率估计。同时借助角度变换提高了它识别参数的分辨率。仿真表明,在低信噪比和多分量的环境下,该方法能有效地滤出噪声和交叉项的影响。且由于 RFRFT 是线性运算,所以其运算量不大,易于实现。但此法仅适用于最高阶相位系数不相等的情况。因此,如何改进算法使其通用性更好,以及如何更有效地抑制交叉项以及低信噪比下噪声对信号的影响,提高算法的识别性能,是本文进一步研究的重点。

参 考 文 献

- [1] 张贤达. 现代信号处理[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 447-487.
Zhang Xian-da. Modern Signal Processing [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 447-487.
 - [2] Peter O'Shea. A new technique for Instantaneous frequency rate estimation [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2002, 9(8): 251-252.
 - [3] Zhang Han-ling and Liu Qing-yun. Estimation of instantaneous frequency rate for multicomponent polynomial phase signals [J]. *Signal Processing*, 2006, 23(1): 16-20.
 - [4] Pham D S and Zoubir A M. Analysis of multicomponent polynomial phase signals [J]. *IEEE Signal Processing*, 2007, 55(1): 56-65.
 - [5] 肖文书, 张兴敢, 王茹琪. 基于 PHAF 的多普勒参数估计[J]. 电子与信息学报, 2007, 29(7): 1678-1682.
Xiao Wen-shu, Zhang Xing-gan, and Wang Ru-qi. Doppler parameter estimation based on product high-order ambiguity function [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2007, 29(7): 1678-1682.
 - [6] 靖晟, 刘渝, 席轶敏. 非线性调频信号参数估计算法[J]. 南京航空航天大学学报, 2001, 33(5): 441-444.
Jing Sheng, Liu Yu, and Xi Yi-min. The parameter estimation arithmetic of NLFM [J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2001, 33(5): 441-444.
 - [7] Soo-Chang Pei and Jian-Jiun Ding. Relations between Gabor transforms and fractional Fourier transforms and their applications for signal processing [J]. *Signal Processing*, 2007, 55(10): 4839-4850.
- 张雯雯: 女, 1983 年生, 博士生, 研究方向为宽带信号检测、识别和处理。
司锡才: 男, 1940 年生, 博士生导师, 研究方向为宽带信号检测、识别和处理等。