物理探査　第59巻第２号（2006）193-210頁　　BUTSURI-TANSA, Vol. 59 No. 2 (2006) pp. 193-210

垂直な中心線に対称なモデル物体による重力の鉛直勾配計算式と等値線図の主な特徴

広　島　俊　男*・牧　野　雅　彦*

Analytical expressions and distributions of vertical gradient of gravity caused by model bodies symmetry with respect to a vertical axis, and characteristics of these maps

Toshio Hiroshima* and Masahiko Makino*

ABSTRACT

We can find many symmetrical gravity anomalies such as center point symmetry in the gravity map series (1 : 200,000) published by Geological survey of Japan, AIST. To analyze these gravity anomalies, the authors reviewed the computing equations of vertical gradient of gravity caused by the model bodies with center point symmetry (vertical solid circular cylinder, circular cone, circular parabola, ellipsoid). Some characteristics are described in the maps drawn by these computing equations.

Key words: gravity, model body, vertical gradient

1.　はじめに

産業技術総合研究所地球科学情報研究部門（旧地質調査所）では災害予防・環境保全に役立てるため Gravity map series として20万分の１縮尺の重力図を発刊してきている。「青森地域重力図」（広島ほか，1989）を手始めとして東北地方の全域をカバーし，北海道地方については「天北地域重力図」（駒澤ほか，2001）をもって全域の刊行を終了した。引き続いて九州地方の重力図の編集に着手し，その第１号として「大分地域重力図」（広島ほか，2001）が発刊され，現時点では第６号の「屋久島地域重力図」（駒澤ほか，2005）が刊行されている。

これらの重力図には同心円状の重力異常が多数見られる（例えば，阿武隈地域重力図（牧野ほか，1995）に見られる同心円状の低重力異常（Fig. 1））。

これらの重力異常を解析するためには垂直な中心軸に対称な物体による重力及び鉛直勾配の計算式が必要であり，地下構造を把握するためにはこれらの物体による等値線図の特徴を知る必要がある。

前回の論文（広島・牧野，2004）では垂直な中心軸に対称なモデル物体による重力について論じた。

本論ではこれらモデル物体による鉛直勾配について論じる。

垂直な中心軸に対称なモデル物体として円筒，円錐，回転放物体，回転楕円体を選び，これら鉛直勾配の計算式を導出する。各々の計算式から正方格子点の鉛直勾配値を算出し，これを図化し，それぞれの特徴について以下に紹介する。

2.　モデル物体による重力の鉛直勾配

計算に先立ち鉛直勾配の計算式を多少簡略化しておく。まず，物体を水平面に平行にスライスし，その一枚の円盤による重力の鉛直一次勾配，及び二次勾配について考える。

Fig. 2 に示すように物体の中心軸上に座標の原点をとり，デカルト座標系の３軸をそれぞれ X 軸，Y 軸，Z 軸とする。

観測点を $P(X, Y, 0)$ とし，P 点から円盤を含む平面に投影した点を $P'(X, Y, \zeta)$，円盤の中心を $O'(0, 0, \zeta)$，円盤内の点を $Q(\xi, \eta, \zeta)$, X 軸と線分 OP とのなす角を θ，線分の長さを R とする。この場合

2005年12月１日原稿受付；2006年３月17日受理
* 産業技術総合研究所
〒305-8567 つくば市東 1-1-1　中央第７

Manuscript received December 1, 2005; Accepted March 17, 2006.
* Geological Survey of Japan, National Institute of Advanced Industrial Science and Technology (AIST)
1-1-1 Higashi, Tsukuba 305-8567, Japan

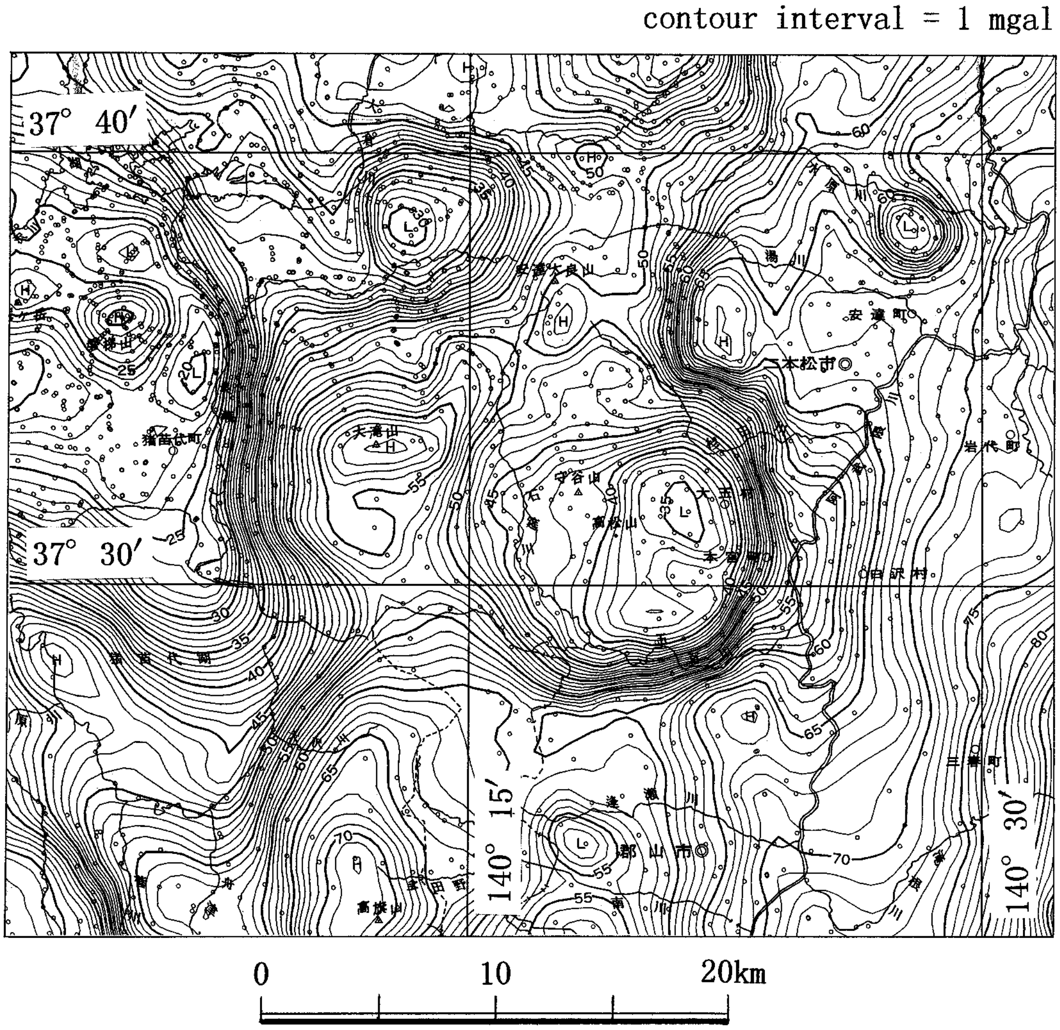

Fig. 1　Low gravity regions in the GRAVITY MAP OF ABUKUMA DISTRICT (MAKINO et al., 1995).

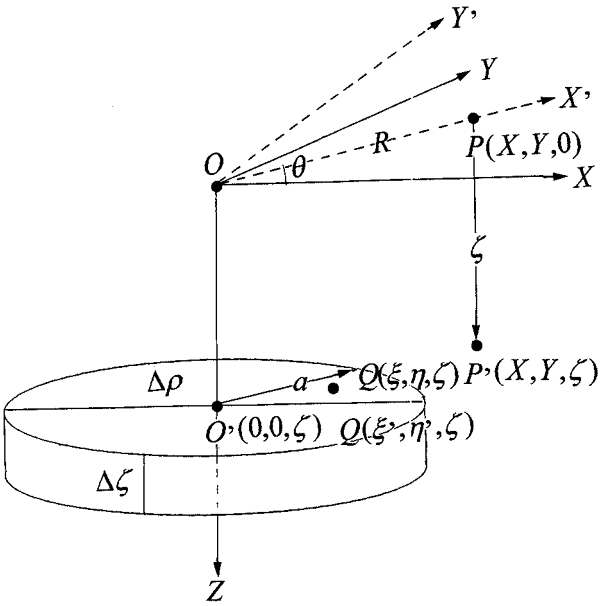

Fig. 2　Geometry of circular horizontal disk.

$$X=R\cos\theta,\quad Y=R\sin\theta,\quad R=\sqrt{X^2+Y^2}$$

である。

次に，デカルト座標系を角 θ だけ回転し，この新しい座標系による Q 点の座標を $Q(\xi',\eta',\zeta)$ とする。

これら2組の変数の間には

$$\xi=\xi'\cos\theta-\eta'\sin\theta,\quad \eta=\xi'\sin\theta+\eta'\cos\theta$$

の関係が成り立つ。従って

$$(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2+\zeta^2=(R-\xi')^2+\eta'^2+\zeta^2,$$
$$d\xi\,d\eta=d\xi'\,d\eta'$$

であり，厚さが $\Delta\zeta$，半径が a，密度が $\Delta\rho$ の円盤が観測点 $P(X,\ Y,\ 0)$ に及ぼす重力の鉛直一次勾配 $\Delta g_Z(X,\ Y)$ 及び，鉛直二次勾配 $\Delta g_{ZZ}(X,\ Y)$ は

$$\Delta g_Z(X,\ Y)$$
$$=k^2\Delta\rho\iint\frac{2\zeta^2-(X-\xi)^2-(Y-\eta)^2}{\{(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2+\zeta^2\}^{5/2}}\Delta\zeta\,d\xi\,d\eta$$

$$=k^2\Delta\rho\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-\xi'^2}}^{\sqrt{a^2-\xi'^2}}\frac{2\zeta^2-(R-\xi')^2-\eta'^2}{\{(R-\xi')^2+\eta'^2+\zeta^2\}^{5/2}}\times\Delta\zeta d\xi' d\eta'$$

$$=2k^2\Delta\rho\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-\xi'^2}}\frac{2\zeta^2-(R-\xi')^2-\eta'^2}{\{(R-\xi')^2+\eta'^2+\zeta^2\}^{5/2}}\times\Delta\zeta d\xi' d\eta' \quad (1)$$

$$\Delta g_{ZZ}(X,\ Y)=3k^2\Delta\rho\iint\frac{\zeta\{2\zeta^2-3(X-\xi)^2-3(Y-\eta)^2\}}{\{(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2+\zeta^2\}^{7/2}}\times\Delta\zeta\, d\xi\, d\eta$$

$$=6k^2\Delta\rho\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-\xi'^2}}\frac{\zeta\{2\zeta^2-3(R-\xi')^2-3\eta'^2\}}{\{(R-\xi')^2+\eta'^2+\zeta^2\}^{7/2}}\times\Delta\zeta\, d\xi'\, d\eta' \quad (2)$$

となる。

2.1 円盤による重力の鉛直一次勾配及び二次勾配

デカルト座標系の軸の１つを中心軸に，他の１つを原点Ｏと観測点を結ぶ方向にとれば，厚さが $\Delta\zeta$，半径が a，密度 $\Delta\rho$ の円盤が観測点 $P(X,\ Y,\ 0)$ に及ぼす重力の鉛直一次勾配 $\Delta g_Z(X,\ Y)$，及び鉛直二次勾配 $\Delta g_{ZZ}(X,\ Y)$ は

$$\Delta g_Z(X,\ Y)=\Delta g_Z(R)=2k^2\Delta\rho\Delta\zeta\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-\xi^2}}\frac{2\zeta^2-(R-\xi)^2-\eta^2}{\{(R-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2\}^{5/2}}d\eta\, d\xi$$

$$=2k^2\Delta\rho\Delta\zeta\int_{-a}^{a}f_1(R,\ a,\ \xi,\ \zeta)\ d\xi \quad (3)$$

$$\Delta g_{ZZ}(X,\ Y)=\Delta g_{ZZ}(R)=6k^2\Delta\rho\Delta\zeta\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-\xi^2}}\frac{\zeta\{2\zeta^2-3(R-\xi)^2-3\eta^2\}}{\{(R-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2\}^{7/2}}\times d\eta\, d\xi$$

$$=6k^2\Delta\rho\Delta\zeta\int_{-a}^{a}f_2(R,\ a,\ \xi,\ \zeta)\ d\xi \quad (4)$$

である。但し

$$f_1(R,\ a,\ \xi,\ \zeta)=\frac{3\zeta^2}{((R-\xi)^2+\zeta^2)^2}\left\{\left(\frac{a^2-\xi^2}{(R-\xi)^2+a^2-\xi^2+\zeta^2}\right)^{1/2}-\frac{1}{3}\left(\frac{a^2-\xi^2}{(R-\xi)^2+a^2-\xi^2+\zeta^2}\right)^{3/2}\right\}-\frac{1}{(R-\xi)^2+\zeta^2}\left(\frac{a^2-\xi^2}{(R-\xi)^2+a^2-\xi^2+\zeta^2}\right)^{1/2} \quad (5)$$

$$f_2(R,\ a,\ \xi,\ \zeta)=\frac{5\zeta^3}{((R-\xi)^2+\zeta^2)^3}\left\{\left(\frac{a^2-\xi^2}{(R-\xi)^2+a^2-\xi^2+\zeta^2}\right)^{1/2}-\frac{2}{3}\left(\frac{a^2-\xi^2}{(R-\xi)^2+a^2-\xi^2+\zeta^2}\right)^{3/2}+\frac{1}{5}\left(\frac{a^2-\xi^2}{(R-\xi)^2+a^2-\xi^2+\zeta^2}\right)^{5/2}\right\}-\frac{3\zeta}{((R-\xi)^2+\zeta^2)^2}\left\{\left(\frac{a^2-\xi^2}{(R-\xi)^2+a^2-\xi^2+\zeta^2}\right)^{1/2}-\frac{1}{3}\left(\frac{a^2-\xi^2}{(R-\xi)^2+a^2-\xi^2+\zeta^2}\right)^{3/2}\right\} \quad (6)$$

2.2 モデル物体による鉛直一次勾配及び二次勾配

垂直な中心線に対称なモデル物体による鉛直一次勾配及び二次勾配は円盤による計算式(3)，(4)式を ζ に関して Z_1 から Z_2 まで積分すれば求められる。

2.2.1 円筒（Fig. 3）による鉛直一次勾配及び二次勾配

$$g_Z(R)=2k^2\Delta\rho\int_{-A_1}^{A_1}\int_{0}^{\sqrt{A_1{}^2-\xi^2}}\int_{Z_1}^{Z_2}\frac{2\zeta^2-(R-\xi)^2-\eta^2}{\{(R-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2\}^{5/2}}\times d\zeta\, d\eta\, d\xi$$

$$=2k^2\Delta\rho\int_{-A_1}^{A_1}\int_{0}^{\sqrt{A_1{}^2-\xi^2}}\left[\frac{\zeta}{\{(R-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2\}^{3/2}}\right]_{Z_1}^{Z_2}\times d\eta\, d\xi$$

$$=-2k^2\Delta\rho\int_{-A_1}^{A_1}\Big[f_0(R,\ A_1,\ \xi,\ \zeta)\Big]_{Z_1}^{Z_2}d\xi \quad (7)$$

$$g_{ZZ}(R)=6k^2\Delta\rho\int_{-A_1}^{A_1}\int_{0}^{\sqrt{A_1{}^2-\xi^2}}\int_{Z_1}^{Z_2}\times\frac{\zeta\{2\zeta^2-3(R-\xi)^2-3\eta^2\}}{\{(R-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2\}^{7/2}}d\zeta\, d\eta\, d\xi$$

$$=-2k^2\Delta\rho\int_{-A_1}^{A_1}\int_{0}^{\sqrt{A_1{}^2-\xi^2}}\left[\frac{2\zeta^2-(R-\xi)^2-\eta^2}{\{(R-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2\}^{5/2}}\right]_{Z_1}^{Z_2}\times d\eta\, d\xi$$

$$=-2k^2\Delta\rho\int_{-A_1}^{A_1}\Big[f_1(R,\ A_1,\ \xi,\ \zeta)\Big]_{Z_1}^{Z_2}d\xi \quad (8)$$

但し

$$f_0(R,\ a,\ \xi,\ \zeta)=\frac{\zeta\sqrt{a^2-\xi^2}}{((R-\xi)^2+\zeta^2)\sqrt{(R-\xi)^2+a^2-\xi^2+\zeta^2}} \quad (9)$$

2.2.2 円錐（Fig. 4）による鉛直一次勾配及び二次勾配

$a=(D-\zeta)\tan\beta$ であるから

$$g_Z(R)=2k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\int_{-(D-\zeta)\tan\beta}^{(D-\zeta)\tan\beta}f_1(R,\ a,\ \xi,\ \zeta)\ d\xi\ d\zeta \quad (10)$$

$$g_{ZZ}(R)=6k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\int_{-(D-\zeta)\tan\beta}^{(D-\zeta)\tan\beta}f_2(R,\ a,\ \xi,\ \zeta)\ d\xi\, d\zeta \quad (11)$$

となる。

但し

$$\tan\beta=\frac{A_1-A_2}{Z_2-Z_1},\quad D=\frac{A_1Z_2-A_2Z_1}{A_1-A_2}$$

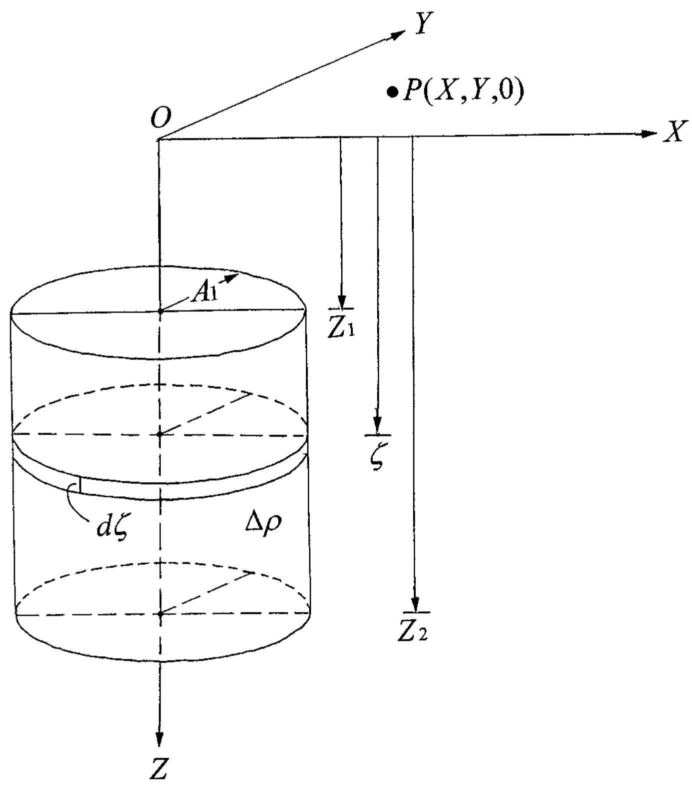

Fig. 3 Circular cylinder model and its parameters.

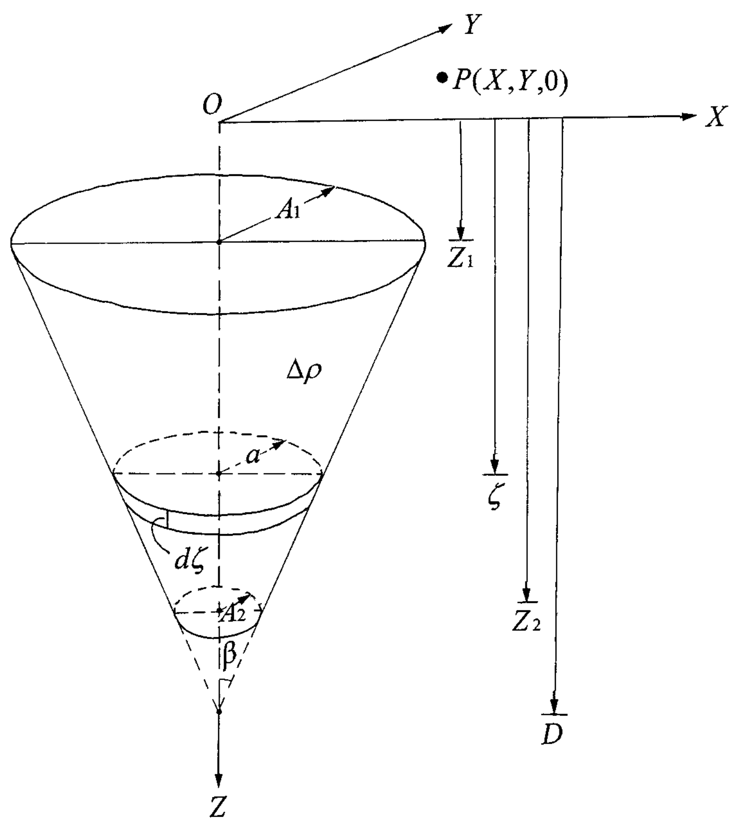

Fig. 4 Circular cone model and its parameters.

2.2.3　回転放物体（Fig. 5）による鉛直一次勾配及び二次勾配

$a=A_1\sqrt{(\zeta-Z_1)/(Z_2-Z_1)}$ であるから

$$g_Z(R)=2k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\int_{-A_1\sqrt{(\zeta-Z_1)/(Z_2-Z_1)}}^{A_1\sqrt{(\zeta-Z_1)/(Z_2-Z_1)}} f_1(R,a,\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta \quad (12)$$

$$g_{ZZ}(R)=6k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\int_{-A_1\sqrt{(\zeta-Z_1)/(Z_2-Z_1)}}^{A_1\sqrt{(\zeta-Z_1)/(Z_2-Z_1)}} f_2(R,a,\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta \quad (13)$$

となる。

2.2.4　回転楕円体（Fig. 6）による鉛直一次勾配及び二次勾配

$a=(A_1/B_1)\sqrt{B_1^2-(\zeta-Z_C)^2}$ であるから

$$g_Z(R)=2k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\int_{-(A_1/B_1)\sqrt{B_1^2-(\zeta-Z_C)^2}}^{(A_1/B_1)\sqrt{B_1^2-(\zeta-Z_C)^2}} f_1(R,a,\xi,\zeta)\times d\xi\,d\zeta \quad (14)$$

$$g_{ZZ}(R)=6k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\int_{-(A_1/B_1)\sqrt{B_1^2-(\zeta-Z_C)^2}}^{(A_1/B_1)\sqrt{B_1^2-(\zeta-Z_C)^2}} f_2(R,a,\xi,\zeta)\times d\xi\,d\zeta \quad (15)$$

となる。

3.　原点における重力の鉛直一次勾配，及び二次勾配

作成した数値積分のプログラムを検算する場合，式が簡単な原点における鉛直勾配の計算式が便利である。以下これらの計算式を列記する。

3.1　円盤による重力の鉛直一次勾配，及び二次勾配

$$\Delta g_Z(0)=k^2\Delta\rho\Delta\zeta\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{2\zeta^2-r^2}{(r^2+\zeta^2)^{5/2}}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=2\pi k^2\Delta\rho\,\frac{a^2}{(a^2+\zeta^2)^{3/2}}\Delta\zeta \quad (16)$$

$$\Delta g_{ZZ}(0)=3k^2\Delta\rho\Delta\zeta\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{\zeta(2\zeta^2-3r^2)}{(r^2+\zeta^2)^{7/2}}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=6\pi k^2\Delta\rho\,\frac{a^2\zeta}{(a^2+\zeta^2)^{5/2}}\Delta\zeta \quad (17)$$

3.2　円筒による重力の鉛直一次勾配，及び二次勾配

$$g_Z(0)=2\pi k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\frac{A_1^2}{(A_1^2+\zeta^2)^{3/2}}\,d\zeta$$

$$=-2\pi k^2\Delta\rho\left\{\frac{Z_1}{\sqrt{A_1^2+Z_1^2}}-\frac{Z_2}{\sqrt{A_1^2+Z_2^2}}\right\} \quad (18)$$

$$g_{ZZ}(0)=6\pi k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\frac{A_1^2\zeta}{(A_1^2+\zeta^2)^{5/2}}\,d\zeta$$

$$=-2\pi k^2\Delta\rho\left\{\frac{A_1^2}{(A_1^2+Z_1^2)^{3/2}}-\frac{A_1^2}{(A_1^2+Z_2^2)^{3/2}}\right\} \quad (19)$$

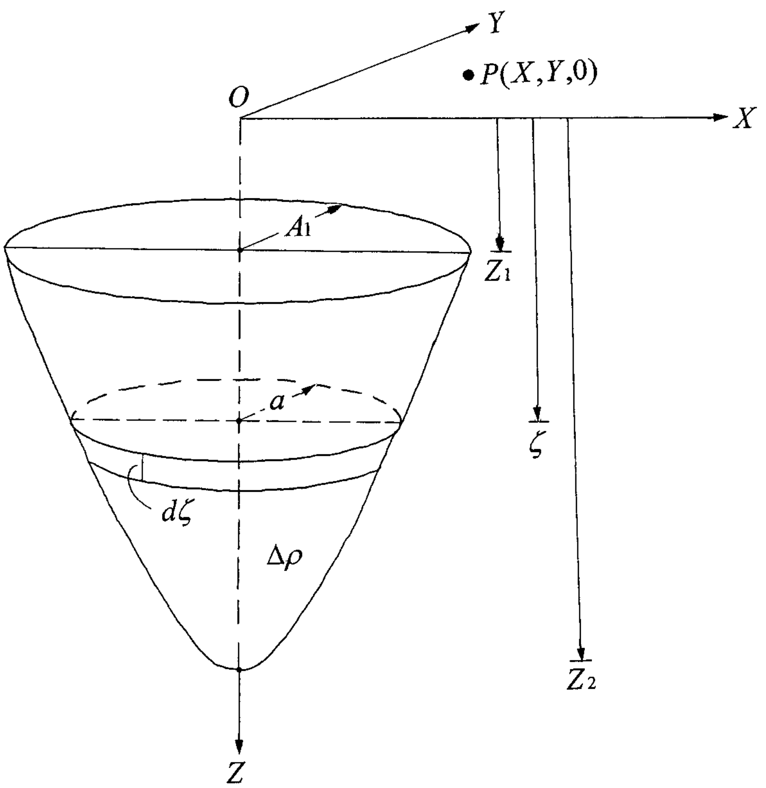

Fig. 5　Circular parabola model and its parameters.

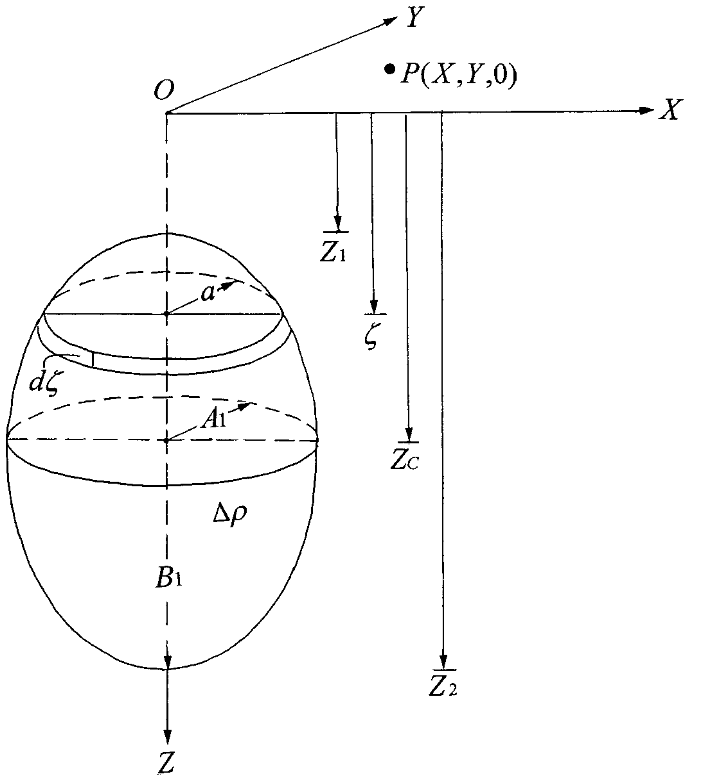

Fig. 6　Ellipsoid model and its parameters.

3.3　円錐による鉛直一次勾配，及び二次勾配

Fig. 4 から $a=(D-\zeta)\tan\beta$ である。従って

$$g_Z(0)=2\pi k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\frac{(D-\zeta)^2\tan^2\beta}{((D-\zeta)^2\tan^2\beta^2+\zeta^2)^{3/2}}d\zeta$$

$$=-2\pi k^2\Delta\rho\cos\beta\sin^2\beta\left\{\frac{Z_2(1-\tan^2\beta)-D}{\sqrt{Z_2^2+D(D-2Z_2)\sin^2\beta}}-\frac{Z_1(1-\tan^2\beta)-D}{\sqrt{Z_1^2+D(D-2Z_1)\sin^2\beta}}+\log\left|\frac{D\sin^2\beta-Z_2+\sqrt{Z_2^2+D(D-2Z_2)\sin^2\beta}}{D\sin^2\beta-Z_1+\sqrt{Z_1^2+D(D-2Z_1)\sin^2\beta}}\right|\right\} \tag{20}$$

次に $x=(D-\zeta)\tan\beta$ とおき，

$\zeta=D-x\cot\beta$ で変換し，微分を $d\zeta=-\cot\beta\,dx$ として変数変換し，積分を実行すれば

$$g_{ZZ}(0)=-6\pi k^2\Delta\rho\cot\beta\int_{-(D-Z_1)\tan\beta}^{(D-Z_2)\tan\beta}\times\frac{Dx^2-x^3\cot\beta}{(x^2\cos ec^2\beta-2xD\cot\beta+D^2)^{5/2}}dx$$

$$=-6\pi k^2\Delta\rho\cot\beta\int_{x_1}^{x_2}\frac{Dx^2-x^3\cot\beta}{(ax^2+bx+c)^{5/2}}dx$$

$$=-6\pi k^2\Delta\rho\cot\beta\,\{Df_C(x_1,x_2,a,b,c)-\cot\beta\,f_D(x_1,x_2,a,b,c)\} \tag{21}$$

但し

$$x_1=(D-Z_1)\tan\beta,\ x_2=(D-Z_2)\tan\beta$$
$$a=\cos ec^2\beta,\ b=-2D\cot\beta,\ c=D^2$$

となる。

3.4　回転放物体による鉛直一次勾配，及び二次勾配

Fig. 5 から $a=A_1\sqrt{(\zeta-Z_1)/(Z_2-Z_1)}$ である。従って

$$g_Z(0)=2\pi k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\frac{A_1^2\dfrac{\zeta-Z_1}{Z_2-Z_1}}{\left\{A_1^2\dfrac{\zeta-Z_1}{Z_2-Z_1}+\zeta^2\right\}^2}d\zeta$$

$$=\frac{4\pi k^2\Delta\rho(Z_2-Z_1)}{A_1^2+4Z_1(Z_2-Z_1)}\left\{\frac{A_1^2+2Z_1Z_2}{\sqrt{A_1^2+Z_2^2}}-2Z_1\right\} \tag{22}$$

$$g_{ZZ}(0)=6\pi k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\frac{\zeta A_1^2\dfrac{\zeta-Z_1}{Z_2-Z_1}}{\left(A_1^2\dfrac{\zeta-Z_1}{Z_2-Z_1}+\zeta^2\right)^{5/2}}d\zeta$$

ここで $x=(\zeta-Z_1)/(Z_2-Z_1)$ とおき，

$\zeta=Z_1+x(Z_2-Z_1)$ で変換し，微分を

$$d\zeta=(Z_2-Z_1)\,dx$$

として，積分を実行すれば

$$g_{ZZ}(0)=6\pi k^2\Delta\rho\,A_1^2(Z_2-Z_1)\int_0^1$$

$$\times\frac{Z_1x+(Z_2-Z_1)x^2}{\{(Z_2-Z_1)^2x^2+(A_1{}^2+2Z_1(Z_2-Z_1))x+Z_1{}^2\}^{5/2}}d\zeta$$
$$=6\pi k^2A_1{}^2\Delta\rho(Z_2-Z_1)\int_{x_1}^{x_2}\frac{Z_1x+(Z_2-Z_1)x^2}{\{ax^2+bx+c\}^{5/2}}dx$$
$$=6\pi k^2\Delta\rho\,A_1{}^2(Z_2-Z_1)\{Z_1f_B(x_1,x_2,a,b,c)+(Z_2-Z_1)f_C(x_1,x_2,a,b,c)\}\quad(23)$$

但し

$x_1=0,\ x_2=1$
$a=(Z_2-Z_1)^2,\ b=A_1{}^2+2Z_1(Z_2-Z_1),\ c=Z_1{}^2$

となる。

3.5　回転楕円体による鉛直一次勾配，及び二次勾配

Fig. 6 から $a=(A_1/B_1)\sqrt{B_1{}^2-(\zeta-Z_C)^2}$ である。従って

$$g_Z(0)=2\pi k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\frac{\frac{A_1{}^2}{B_1{}^2}(B_1{}^2-(\zeta-Z_C)^2)}{\left\{\frac{A_1{}^2}{B_1{}^2}(B_1{}^2-(\zeta-Z_C)^2)+\zeta^2\right\}^{3/2}}\times d\zeta$$
$$=4\pi k^2\Delta\rho\,A_1{}^2B_1\left[\frac{-Z_C}{\{A_1{}^2-B_1{}^2\}\{A_1{}^2+Z_C{}^2-B_1{}^2\}}+\frac{1}{2(A_1{}^2-B_1{}^2)^{3/2}}\left\{\arcsin\frac{A_1{}^2-Z_CB_1-B_1{}^2}{A_1\sqrt{A_1{}^2+Z_C{}^2-B_1{}^2}}+\arcsin\frac{A_1{}^2-Z_CB_1-B_1{}^2}{A_1\sqrt{A_1{}^2+Z_C{}^2-B_1{}^2}}\right\}\right]\quad(24)$$

となる。

$$g_{ZZ}(0)=6\pi k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\frac{\zeta\frac{A_1{}^2}{B_1{}^2}(B_1{}^2-(\zeta-Z_C)^2)}{\left\{\frac{A_1{}^2}{B_1{}^2}(B_1{}^2-(\zeta-Z_C)^2)+\zeta^2\right\}^{5/2}}\times d\zeta$$

ここで $x=(\zeta-Z_C)/B_1$ とおき，
$\zeta=Z_C+B_1x$ で変換し，微分を
$d\zeta=B_1\,dx$ として，積分を実行すれば

$$g_{ZZ}(0)=6\pi k^2\Delta\rho\,A_1{}^2B_1\int_{-1}^{1}\times\frac{Z_C+B_1x-Z_Cx^2-B_1x^3}{\{(B_1{}^2-A_1{}^2)x^2+2Z_CB_1x+A_1{}^2+Z_C{}^2\}^{5/2}}dx$$
$$=6\pi k^2\Delta\rho\,A_1{}^2B_1\int_{-1}^{1}\frac{Z_C+B_1x-Z_Cx^2-B_1x^3}{\{ax^2+bx+c\}^{5/2}}dx$$
$$=6\pi k^2\Delta\rho\,A_1{}^2B_1\{Z_Cf_A(x_1,x_2,a,b,c)+B_1f_B(x_1,x_2,a,b,c)-Z_Cf_C(x_1,x_2,a,b,c)-B_1f_D(x_1,x_2,a,b,c)\}\quad(25)$$

但し

$x_1=-1,\ x_2=1$
$a=B_1{}^2-A_1{}^2,\ b=2B_1Z_C,\ c=A_1{}^2+Z_C{}^2$

となる。特に，$A_1=B_1$ のとき

$$g_Z(0)=2\pi k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\frac{A_1{}^2-Z_C{}^2+2Z_C\zeta-\zeta^2}{\{A_1{}^2-Z_C{}^2+2Z_C\zeta\}^{3/2}}d\zeta=\frac{2k^2}{Z_C{}^3}\left(\frac{4}{3}\pi A_1{}^3\Delta\rho\right)$$
$$g_{ZZ}(0)=6\pi k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\frac{\zeta(A_1{}^2-Z_C{}^2+2Z_C\zeta-\zeta^2)}{\{A_1{}^2-Z_C{}^2+2Z_C\zeta\}^{5/2}}d\zeta=\frac{2k^2}{16Z_C{}^4}\left(\frac{4}{3}\pi A_1{}^3\Delta\rho\right)$$

となり，よく見慣れた球による重力の鉛直勾配計算式を得る。

なお，上記鉛直二次勾配計算式において，$f_A(x_1,x_2,a,b,c)\sim f_C(x_1,x_2,a,b,c)$ は数学公式集Ｉ（森口繁一ほか，1973)を参照した。また，$f_D(x_1,x_2,a,b,c)$ 式は簡単な演算により導出できる。以下に，これらを列記する。

$$f_A(x_1,x_2,a,b,c)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{5/2}}dx=\left[\frac{2(2ax+b)}{3(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{3/2}}+\frac{16a(2ax+b)}{3(4ac-b^2)^2\sqrt{ax^2+bx+c}}\right]_{x_1}^{x_2}$$
$$f_B(x_1,x_2,a,b,c)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{x}{(ax^2+bx+c)^{5/2}}dx=\left[\frac{-2(bx+2c)}{3(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{3/2}}-\frac{8b(2ax+b)}{3(4ac-b^2)^2\sqrt{ax^2+bx+c}}\right]_{x_1}^{x_2}$$
$$f_C(x_1,x_2,a,b,c)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{x^2}{(ax^2+bx+c)^{5/2}}dx=\left[\frac{2(b^2-2ac)x+2bc}{3a(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{3/2}}+\frac{2(4ac+b^2)(2ax+b)}{3a(4ac-b^2)^2\sqrt{ax^2+bx+c}}\right]_{x_1}^{x_2}$$
$$f_D(x_1,x_2,a,b,c)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{x^3}{(ax^2+bx+c)^{5/2}}dx=\left[\frac{2\{b(3ac-b^2)x+c(2ac-b^2)\}}{3a^2(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{3/2}}-\frac{2\{ab(12ac-b^2)x+6ac(4ac-b^2)+b^4\}}{3a^2(4ac-b^2)^2\sqrt{ax^2+bx+c}}\right]_{x_1}^{x_2}$$

4.　等値線図の主な特徴

上記の計算式を用いて，それぞれのモデルについて等値線図を作成し，比較検討する。

等値線図を比較する際，重力図，鉛直一次勾配図，鉛

直二次勾配図の順に見比べると，各モデルの特徴を把握しやすい。従って，前回の論文（広島・牧野，2004）において掲載した重力図を再度掲載する。

モデル地域は第１図に示した阿武隈地域重力図のほぼ中央にある高松山周辺とする。

この地域には高松山を中心に同心円を成す低重力異常があり，その最大値は55 mgal，最小値は35 mgalであり，その重力差は20 mgalである。

100万分の１日本地質図（1992）によれば，高松山から約9 km以東の阿武隈高地には本地域の基盤をなす白亜紀の珪長質貫入岩K_1（花崗岩）がある。高松山から約6.5 km隔てて西側の大滝山山麓にもK_1が見られる。高松山周辺は新第三紀の堆積岩で覆われている。高松山から約8.5 km隔ててほぼ北～南側の方向に流れる阿武隈川と，この阿武隈川にほぼ直交するその支流には第四紀の堆積層が見られる。

数値積分の実行に先立ち，$\Delta\rho$の値は次のように定める。

花崗岩類の平均密度は日本の岩石物性値（村田ほか，1991）に掲載されている強制湿潤密度および自然乾燥密度の頻度分布図を考慮し，$\rho_2=2.60\ \mathrm{g/cm^3}$とみなす。

花崗岩上部にある堆積層は，第四紀堆積物の密度を約$1.9\ \mathrm{g/cm^3}$，新第三紀層の密度を約$2.3\ \mathrm{g/cm^3}$とし，これらの平均値$2.1\ \mathrm{g/cm^3}$を基盤上部層の密度ρ_1とする。従って，２層構造とみなした本地域の密度差$\Delta\rho$は

$$\Delta\rho=\rho_1-\rho_2=-0.50\ \mathrm{g/cm^3}$$

である。

図化範囲はモデルの中心を$(X_C,\ Y_C)$として，$2KS\times 2LS$とする。$S=100$ m, $K=160$, $L=160$として正方格子点の重力値，鉛直一次勾配値，及び二次勾配値

$$g(X_k,\ Y_l)\quad (k=1, 2, 3, \ldots, 2K+1;\ l=1, 2, 3, \ldots, 2L+1)$$
$$g_Z(X_k,\ Y_l)\quad (k=1, 2, 3, \ldots, 2K+1;\ l=1, 2, 3, \ldots, 2L+1)$$
$$g_{ZZ}(X_k,\ Y_l)\quad (k=1, 2, 3, \ldots, 2K+1;\ l=1, 2, 3, \ldots, 2L+1)$$
$$X_k=X_C+(k-K-1)S$$
$$Y_k=Y_C+(l-L-1)S$$

を算出する。これらの数値データから，図化ルーチンによって等値線図を作成する。数値積分の計算に必要な残りのパラメータは以下のように定める。

なお，等値線図相互の比較を容易にするため，円筒，円錐，回転放物体については上面の半径をA_1，回転楕円体については赤道半径をA_1とし，O点から上面までの深さをZ_1として，これらはそれぞれ同じ値$A_1=7.000$ km, $Z_1=100$ mとする。

また，全てのモデルの質量（欠損）は同じ値（$M=\Delta\rho A_1^2(Z_2-Z_1)=-80.8\times10^9$ ton）とする。

すなわち

$$M_{cylinder}=M_{cone}=M_{parabola}=M_{ellipsoid}$$

ところで，各モデルの質量は

$$M_{cylinder}=\Delta\rho\pi A_1^2(Z_2-Z_1)$$
$$M_{cone}=\frac{\Delta\rho\pi\cot\beta}{3}(A_1^3-A_2^3)$$
$$M_{parabola}=\frac{\Delta\rho\pi A_1^2}{2(Z_2-Z_1)}(Z_2^2-2Z_2Z_1+Z_1^2)$$
$$M_{ellipsoid}=\frac{2\Delta\rho\pi A_1^2(Z_2-Z_1)}{3}$$

であるから，円筒下面の深さをZ_2とし，

$$M_{cone}=M_{cylinder},\ M_{parabola}=M_{cylinder},\ M_{ellipsoid}=M_{cylinder}$$

を満足する下面の深さをZ_{21}, Z_{22}, Z_{23}とすれば

$$Z_{21}=Z_1+A_1\cot\beta\left\{1+\left\{\frac{3(Z_2-Z_1)}{A_1\cot\beta}-1\right\}^{1/3}\right\}$$
$$Z_{22}=2Z_2-Z_1$$
$$Z_{23}=\frac{3Z_2-Z_1}{2}$$

である。

さて，$\Delta\rho=-0.50\ \mathrm{g/cm^3}$, $A_1=7.000$ km, $Z_1=100$ mで，座標原点で円筒の重力値が-20 mgalになるのは$Z_2=1{,}150$ mである。

この円筒と同質量なその他のモデル（円錐の場合，Fig. 1の高松山周辺にある低重力異常域の等値線の形状から側面の傾斜角は$\beta=45\times\pi/180$とする）の下面の深さは

$Z_{21}=1{,}365$ m, $Z_{22}=2{,}2000$ m, $Z_{23}=1{,}675$ mである。

各々の計算式はいずれも積分で表示されている。従って，これらの計算は数値積分（たとえば，戸川，1972）で行う。

まず，前述の４つのモデルのうち，数値積分の計算精度が最も得にくい回転楕円体よる鉛直勾配について検討する。

数値計算に先立ちそれぞれのパラメータを

$$a_1=A_1/S,\ b_1=B_1/S,\ r=R/S,\ z_1=Z_1/S,\ z_2=Z_2/S,$$
$$z_c=Z_C/S,\ x=\xi/S,\ z=\zeta/S$$
$$A=\frac{A_1}{B_1}\sqrt{B_1^2-(\zeta-Z_C)^2}=S\frac{a_1}{b_1}\sqrt{b_1^2-(z-z_c)^2}=Sa$$

とし，微分を

$$dx=d(\xi/S),\ dz=d(\zeta/S)$$

として，無次元のパラメータを用いて，(14)，(15)式で示した回転楕円体の計算式

$$g(R)=2k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\int_{-A}^{A}\int_0^{\sqrt{A^2-\zeta^2}}\frac{\zeta d\zeta d\xi d\eta}{\{(R-\xi)^2+\eta^2+\zeta^2\}^{3/2}}$$

$$=2k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\int_{-A}^{A}F_0(R,A,\xi,\zeta)d\xi d\zeta$$

$$g_Z(R)=2k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\int_{-A}^{A}F_1(R,A,\xi,\zeta)d\xi d\zeta$$

$$g_{ZZ}(R)=6k^2\Delta\rho\int_{Z_1}^{Z_2}\int_{-A}^{A}F_2(R,A,\xi,\zeta)d\xi d\zeta$$

$$F_0(R,A,\xi,\zeta)=\frac{\sqrt{A^2-\xi^2}}{(R-\xi)^2+\zeta^2}\frac{\zeta}{\sqrt{(R-\xi)^2+\zeta^2+A^2-\xi^2}}$$

$$F_1(R,A,\xi,\zeta)$$
$$=\frac{3\zeta^2}{((R-\xi)^2+\zeta^2)^2}\left\{\left(\frac{A^2-\xi^2}{(R-\xi)^2+A^2-\xi^2+\zeta^2}\right)^{1/2}-\frac{1}{3}\left(\frac{A^2-\xi^2}{(R-\xi)^2+A^2-\xi^2+\zeta^2}\right)^{3/2}\right\}-\frac{1}{(R-\xi)^2+\zeta^2}\left(\frac{A^2-\xi^2}{(R-\xi)^2+A^2-\xi^2+\zeta^2}\right)^{1/2}$$

$$F_2(R,A,\xi,\zeta)$$
$$=\frac{5\zeta^3}{((R-\xi)^2+\zeta^2)^3}\left\{\left(\frac{A^2-\xi^2}{(R-\xi)^2+A^2-\xi^2+\zeta^2}\right)^{1/2}-\frac{2}{3}\left(\frac{A^2-\xi^2}{(R-\xi)^2+A^2-\xi^2+\zeta^2}\right)^{3/2}+\frac{1}{5}\left(\frac{A^2-\xi^2}{(R-\xi)^2+A^2-\xi^2+\zeta^2}\right)^{5/2}\right\}-\frac{3\zeta}{((R-\xi)^2+\zeta^2)^2}\left\{\left(\frac{A^2-\xi^2}{(R-\xi)^2+A^2-\xi^2+\zeta^2}\right)^{1/2}-\frac{1}{3}\left(\frac{A^2-\xi^2}{(R-\xi)^2+A^2-\xi^2+\zeta^2}\right)^{3/2}\right\}$$

を変形する。計算を実行すれば

$$g(R)=2k^2\Delta\rho S\int_{z_1}^{z_2}\int_{-a}^{a}f_0(r,a,x,z)dxdz$$
$$\approx 2k^2\Delta\rho S\sum_{z_i=z_0}^{z_M}\sum_{x_j=x_0}^{x_N}f_0(r,a_i,x_j,z_i)\Delta x\Delta z$$

$$g_Z(R)=2k^2\Delta\rho\int_{z_1}^{z_2}\int_{-a}^{a}f_1(r,a,x,z)dxdz$$
$$\approx 2k^2\Delta\rho\sum_{z_i=z_0}^{z_M}\sum_{x_j=x_0}^{x_N}f_1(r,a_i,x_j,z_i)\Delta x\Delta z$$

$$g_{ZZ}(R)=\frac{6k^2\Delta\rho}{S}\int_{z_1}^{z_2}\int_{-a}^{a}f_2(r,a,x,z)dxdz$$
$$\approx\frac{6k^2\Delta\rho}{S}\sum_{z_i=z_0}^{z_M}\sum_{x_j=x_0}^{x_N}f_2(r,a_i,x_j,z_i)\Delta x\Delta z$$

$$F_0(R,A,\xi,\zeta)=\frac{1}{S}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(r-x)^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{(r-x)^2+z^2+a^2-x^2}}$$
$$=\frac{1}{S}f_0(r,a,x,z)$$

$$F_1(R,A,\xi,\zeta)$$
$$=\frac{1}{S^2}\left[\frac{3z^2}{((r-x)^2+z^2)^2}\left\{\left(\frac{a^2-x^2}{(r-x)^2+a^2-x^2+z^2}\right)^{1/2}-\frac{1}{3}\left(\frac{a^2-x^2}{(r-x)^2+a^2-x^2+z^2}\right)^{3/2}\right\}-\frac{1}{(r-x)^2+z^2}\left(\frac{a^2-x^2}{(r-x)^2+a^2-x^2+z^2}\right)^{1/2}\right]$$
$$=\frac{1}{S^2}f_1(r,a,x,z)$$

$$F_2(R,A,\xi,\zeta)$$
$$=\frac{1}{S^3}\left[\frac{5z^3}{((r-x)^2+z^2)^3}\left\{\left(\frac{a^2-x^2}{(r-x)^2+a^2-x^2+z^2}\right)^{1/2}-\frac{2}{3}\left(\frac{a^2-x^2}{(r-x)^2+a^2-x^2+z^2}\right)^{3/2}+\frac{1}{5}\left(\frac{a^2-x^2}{(r-x)^2+a^2-x^2+\zeta^2}\right)^{5/2}\right\}-\frac{3z}{((r-x)^2+z^2)^2}\left\{\left(\frac{a^2-x^2}{(r-x)^2+a^2-x^2+z^2}\right)^{1/2}-\frac{1}{3}\left(\frac{a^2-x^2}{(R-x)^2+a^2-x^2+z^2}\right)^{3/2}\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{S^3}f_2(r,a,x,z)$$

但し

$$a_i=\frac{a_1}{b_1}\sqrt{b_1{}^2-(z_i-z_c)^2}$$

$$z_0=Z_1/S,\quad z_M=Z_2/S,\quad \Delta z=\frac{z_M-z_0}{M}=\frac{Z_2-Z_1}{MS}$$

$$x_0=-A_1/S,\quad x_N=A_1/S,\quad \Delta x=\frac{x_N-x_0}{N}=\frac{2A_1}{NS}$$

を得る。

従って，重力の単位を mgal とすれば，鉛直一次勾配の単位は mgal/m であり，鉛直二次勾配の単位は mgal/m^2 である。

Fig. 7 は刻み数を $M=50$, $N=100$ として上記の計算式から算出した鉛直一次勾配図であり，Fig. 8 は刻み数を $M=100$, $N=200$ として算出した鉛直二次勾配図である。

Fig. 7 の図画内に含まれる正方格子点上の鉛直一次勾配の最大値は $g_{Z_{\max}}=23.278\times10^{-4}$ mgal/m であり，最小値は $g_{Z_{\min}}=-68.356\times10^{-4}$ mgal/m，中心の値は $g_{Z0}=-61.026\times10^{-4}$ mgal/m である。

(24) 式から算出した原点における鉛直一次勾配の厳密値は $g_Z(0)=-63.384\times10^{-4}$ mgal/m である。従って，原点においては $\delta g_{Z0}=|g_{Z0}-g_Z(0)|=2.358\times10^{-4}$ mgal/m の誤差が含まれている。

Fig. 7 の下側に示したプロファイル図によれば，中心から半径 3 km の範囲で振幅の変化が著しい。

この範囲内にある格子点上の鉛直一次勾配値の最高値は $g_{Z_{top}}=-56.060\times10^{-4}$ mgal/m であり，最低値は $g_{Z_{down}}=-68.356\times10^{-4}$ mgal/m であり，その差は $g_{Z_{td}}=g_{Z_{top}}-g_{Z_{down}}=12.296\times10^{-4}$ mgal/m である。このように他の正方格子点上の鉛直一次勾配値についても同様に誤差が含まれているので等値線図が乱れている。

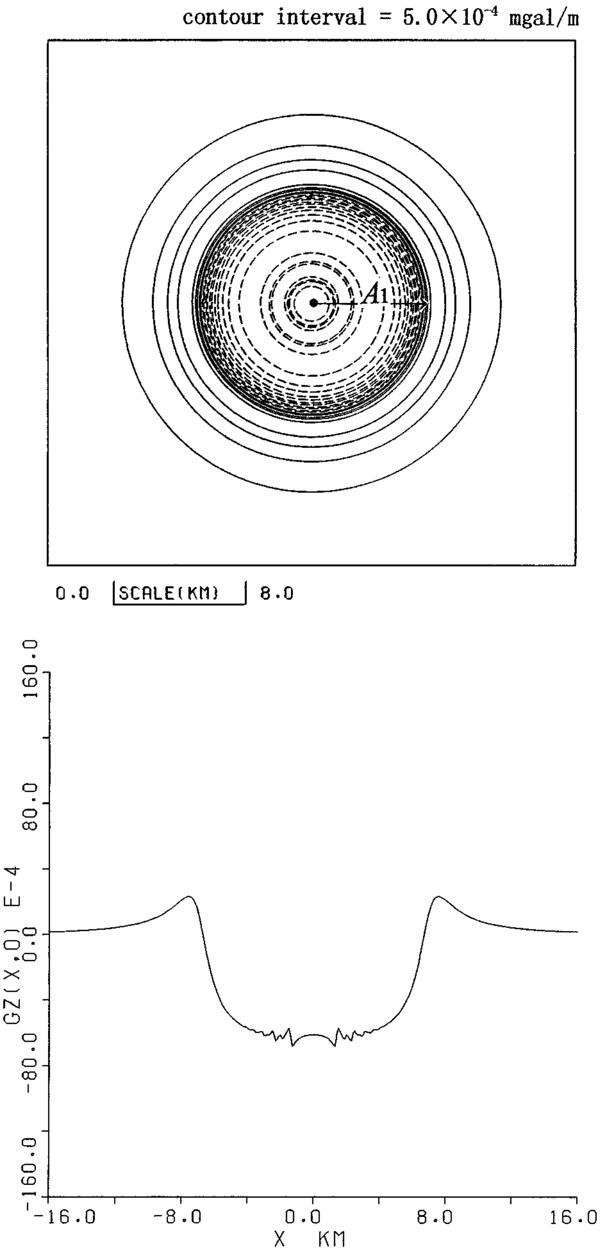

Fig. 7　A map of $g_Z(R)$ caused by an ellipsoid.
$\Delta\rho=-0.50$ g/cm^3　$S=100$ m　$Z_1=100$ m　$A_1=$ 7.000 km
$B_1=0.788$ km　$Z_{23}=1{,}675$ m　$M=50$　$N=100$
$g_{Z_{max}}=23.278\times10^{-4}$ mgal/m
$g_{Z_{min}}=-68.356\times10^{-4}$ mgal/m
$g_{Z0}=-61.026\times10^{-4}$ mgal/m
$g_Z(0)=-63.384\times10^{-4}$ mgal/m
$g_{Z_{top}}=-56.060\times10^{-4}$ mgal/m
$g_{Z_{down}}=-68.356\times10^{-4}$ mgal/m

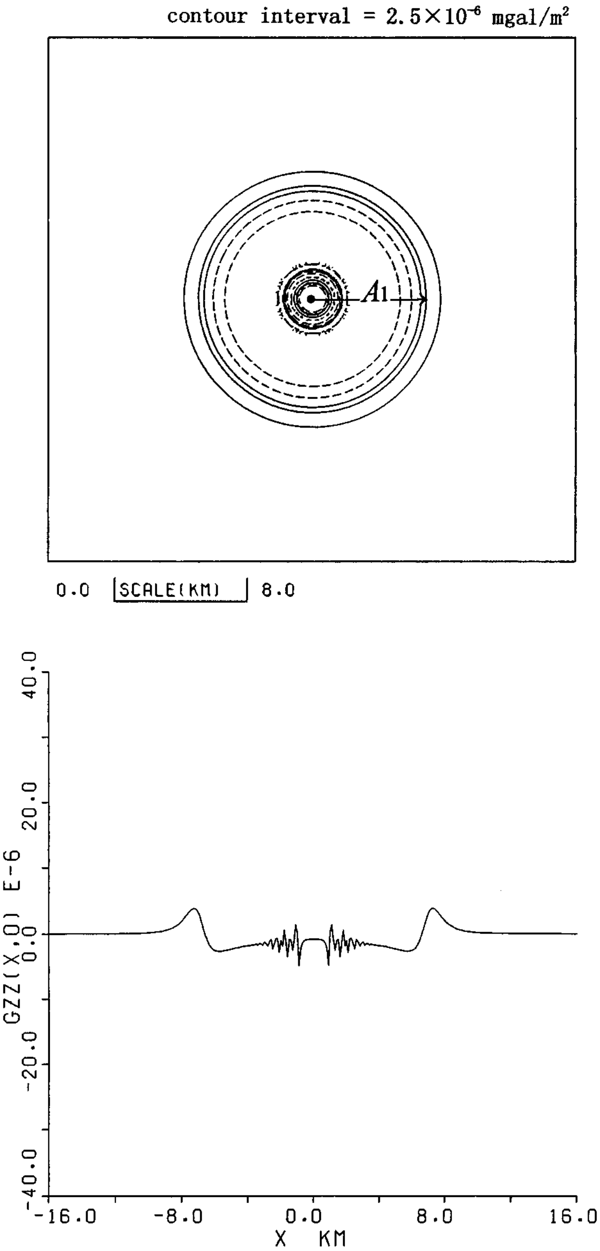

Fig. 8　A map of $g_{ZZ}(R)$ caused by an ellipsoid.
$\Delta\rho=-0.50$ g/cm^3　$S=100$ m　$Z_1=100$ m　$A_1=$ 7.000 km
$B_1=0.788$ km　$Z_{23}=1{,}675$ m　$M=100$　$N=200$
$g_{ZZ_{max}}=3.849\times10^{-6}$ mgal/m^2
$g_{ZZ_{min}}=-5.179\times10^{-6}$ mgal/m^2
$g_{ZZ0}=-0.807\times10^{-6}$ mgal/m^2
$g_{ZZ}(0)=-1.339\times10^{-6}$ mgal/m^2
$g_{ZZ_{top}}=2.514\times10^{-6}$ mgal/m^2
$g_{ZZ_{down}}=-5.179\times10^{-6}$ mgal/m^2

他方，Fig. 8 の図画内に含まれる正方格子点上の鉛直二次勾配の最大値は $g_{ZZ_{max}}=3.389\times10^{-6}$ mgal/m^2 であり，最小値は $g_{ZZ_{min}}=-5.179\times10^{-6}$ mgal/m^2，中心における値は $g_{ZZ0}=-0.807\times10^{-6}$ mgal/m^2 である。

(25)式から算出した原点上の鉛直二次勾配の厳密値は $g_{ZZ}(0)=-1.339\times10^{-6}$ mgal/m^2 であるから，原点において $\delta g_{ZZ0}=|g_{ZZ0}-g_{ZZ}(0)|=0.532\times10^{-6}$ mgal/m^2 の誤差が含まれている。

Fig. 8 の下側に示したプロファイル図によれば，中心から半径 3 km の範囲で振幅の変化が著しい。

この範囲内にある格子点上の鉛直二次勾配の最高値は $g_{ZZ_{top}}=2.514\times10^{-6}$ mgal/m^2 であり，最低値は $g_{ZZ_{down}}=$

-5.179×10^{-6} mgal/m^2 であり，その差は $g_{ZZ_{td}}=g_{ZZ_{top}}-g_{ZZ_{down}}=7.693\times10^{-6}$ である。このように他の正方格子点上の鉛直二次勾配値についても同様に誤差が含まれているので等値線図が乱れている。

ところで，等値線図の間隔が大きすぎても，小さすぎても各モデルの特徴を把握し難い。従って，以下においては鉛直一次勾配の等値線間隔は 5.0×10^{-4} mgal/m とし，鉛直二次勾配の等値線間隔は 2.5×10^{-6} mgal/m^2 とする。

等値線図の乱れをゼロに近づけるためには刻み数を極めて大きな値にとらなければならず，等値線図の作成において膨大な時間がかかる。

前述の等値線間隔で，回転楕円体による等値線図に乱れを生じないものは，鉛直一次勾配図では，$M=200$, $N=200$であり，鉛直二次勾配図では $M=400$, $N=300$ である。

4.1　重力図，鉛直一次勾配図，及び二次勾配図の比較

以下に示す一連の等値線図において，パラメータの値は前述のように $\Delta\rho=-0.50$ g/cm^3, $S=100$ m, $Z_1=100$ m, $A_1=7.000$ km とする。刻みの数は重力図では $M=100$, $N=100$とし，鉛直一次勾配図では $M=200$, $N=200$，鉛直二次勾配図では $M=400$, $N=300$とする（一階の積分による等値線図作成において，重力図では $N=100$とし，鉛直一次勾配図では $N=200$，鉛直二次勾配図では $N=300$とする）。

原点における重力値，鉛直一次勾配値，鉛直二次勾配値の算出においては刻みの数を $M=5000$, $N=5000$として計算精度の向上をはかった。

鉛直勾配図を評価する際に，ピークの鋭さが重要になる。中心点から鉛直勾配の最大点に至る半径を A_{max}，中心点から鉛直勾配の最小点に至る半径を A_{min} として，これらも以下に記載する（A_{max}, A_{min} の算出に際しては位置の精度を確保するため，$S=1$ m として，中心点を通る直線上の格子点の鉛直勾配値を比較し決定した）。

4.1.1　円筒モデルの等値線図

1)　円筒モデルの重力図

広島・牧野（2004）の結果により

半径 A_1 の円の周辺で急速に減少している。刻み数が $N=100$と少ないが，中心では $g_0=-20.260$ mgal であり，原点における厳密値 $g(0)=-20.260$ mgal に対し小数点３桁まで一致している。

半径 A_1 の円周の周辺で密な等値線図である。

2)　円筒モデルの鉛直一次勾配図

円筒の外側から円周 A_1 に近づくと緩やかに増加し，$A_{max}=7.335$ km で最大 $g_{Z_{max}}=48.663\times10^{-4}$ mgal/m になる。A_{max} を過ぎると，急速に減少し，A_1 で $g(A_1)=-11.400\times10^{-4}$ mgal/m になり，$A_{min}=6.642$ km で最小 $g_{Z_{min}}=-85.505\times10^{-4}$ mgal/m になる（A_{max} と A_{min} の差は $\delta A=A_{max}-A_{min}=0.693$ km である）。

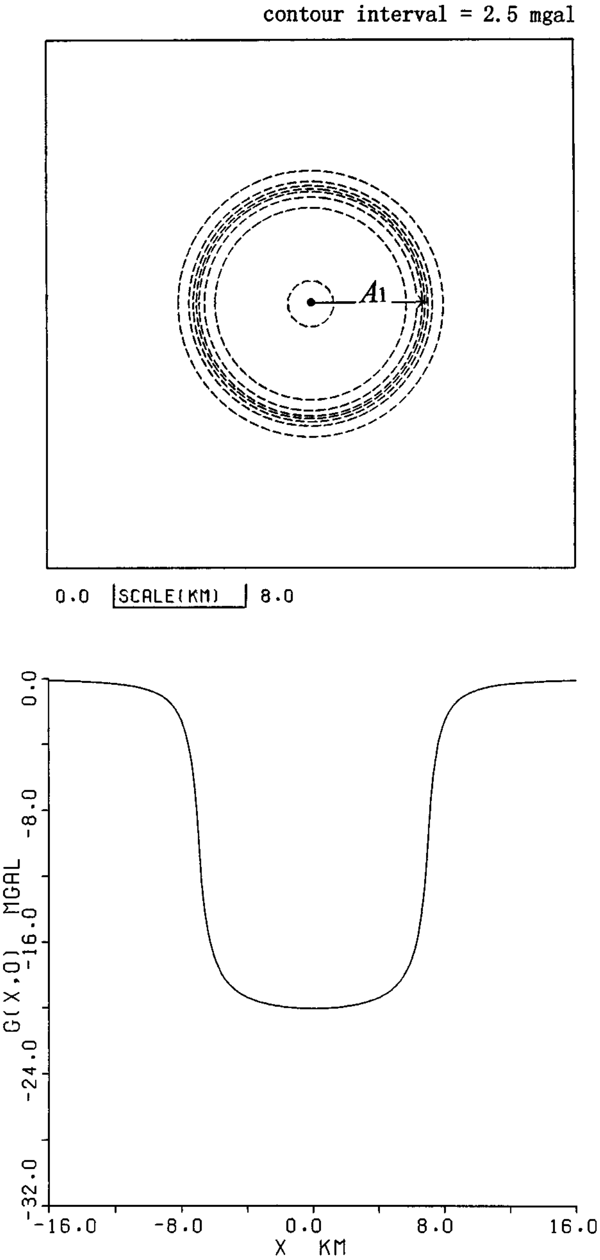

Fig. 9–1　A map of $g(R)$ caused by a cylinder.
$Z_2=1{,}150$ m　$N=100$
$g_{max}=-0.032$ mgal　$g_{min}=-20.062$ mgal
$g_0=-20.060$ mgal　$g(0)=-20.060$ mgal

さらに円の中心に向かって緩やかに増加し，中心で $g_{Z0}=-30.974\times10^{-4}$ mgal/m になる。

これは(18)式から算出した原点における厳密値 $g_Z(0)=-30.990\times10^{-4}$ mgal/m に比較し，$\delta g_{Z0}=|g_{Z0}-g_Z(0)|=0.016\times10^{-4}$ mgal/m の計算精度である。

概して，半径 A_1 の円周の周辺で密な等値線図である。

3)　円筒モデルの鉛直二次勾配図

円筒の外側から A_1 に近づくと急速に増加し $A_{max}=7.090$ km で最大 $g_{ZZ_{max}}=32.151\times10^{-6}$ mgal/m^2 になる。A_{max} を過ぎると急速に減少し，A_1 で $g_{ZZ}(A_1)=4.296\times$

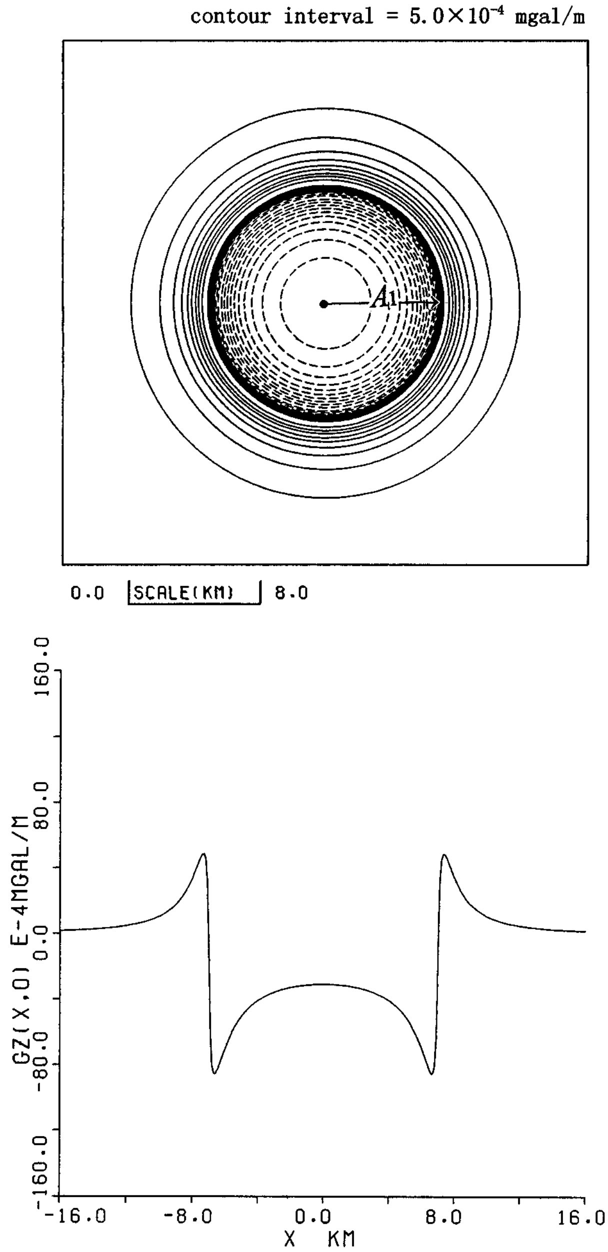

Fig. 9–2 A map of $g_Z(R)$ caused by a cylinder.
Z_2=1,150 m N=200
$g_{Z_{\max}}$=48.663×10^{-4} mgal/m $A_{\max}$=7.335 km
g_Z(7.000 km)=−11.400×10^{-4} mgal/m
$g_{Z_{\min}}$=−85.505×10^{-4} mgal/m $A_{\min}$=6.642 km
g_{Z0}=−30.974×10^{-4} mgal/m
g_Z(0)=−30.990×10^{-4} mgal/m

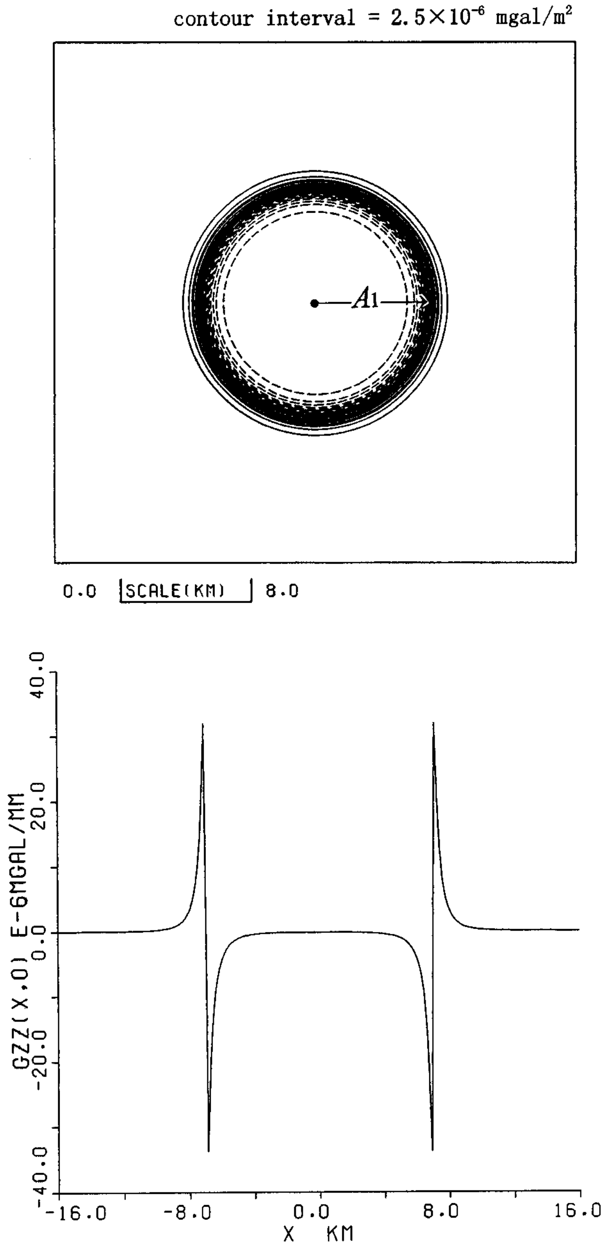

Fig. 9–3 A map of $g_{ZZ}(R)$ caused by a cylinder.
Z_2=1,150 m N=300
$g_{ZZ_{\max}}$=32.151×10^{-6} mgal/m^2 $A_{\max}$=7.090 km
g_{ZZ}(7.000 km)=4.296×10^{-6} mgal/m^2
$g_{ZZ_{\min}}$=−33.814×10^{-6} mgal/m^2 $A_{\min}$=6.894 km
g_{ZZ0}=−0.114×10^{-6} mgal/m^2
g_{ZZ}(0)=−0.116×10^{-6} mgal/m^2

10^{-6} mgal/m^2 になり，$A_{\min}$=6.894 km で最小 $g_{ZZ_{\min}}$=−33.814×10^{-6} mgal/m^2 になる（δA=0.196 km である）。

中心に向かって急速に増加し，中心で g_{ZZ0}=−0.114×10^{-6} mgal/m^2 になる。

これは（19）式から算出した原点における厳密値 g_{ZZ}(0)=−0.116×10^{-6} mgal/m^2 に比較し $\delta g_{ZZ0}=|g_{ZZ0}-g_{ZZ}(0)|$=0.002×10^{-6} mgal/m^2 の計算精度である。

概して，半径 A_1 の円周の周辺で極めて密な等値線図である。

4.1.2 円錐モデルの等値線図

1） 円錐モデルの重力図

広島・牧野（2004）の結果により

A_1 から A_2 の間で急速に減少している。刻み数が，M=100, N=100 と少ないが，g_0=−23.409 mgal であり，原点における厳密値 g(0)=−23.412 mgal に比較して $\delta g_0=|g_0-g(0)|$=0.003 mgal の計算精度である。

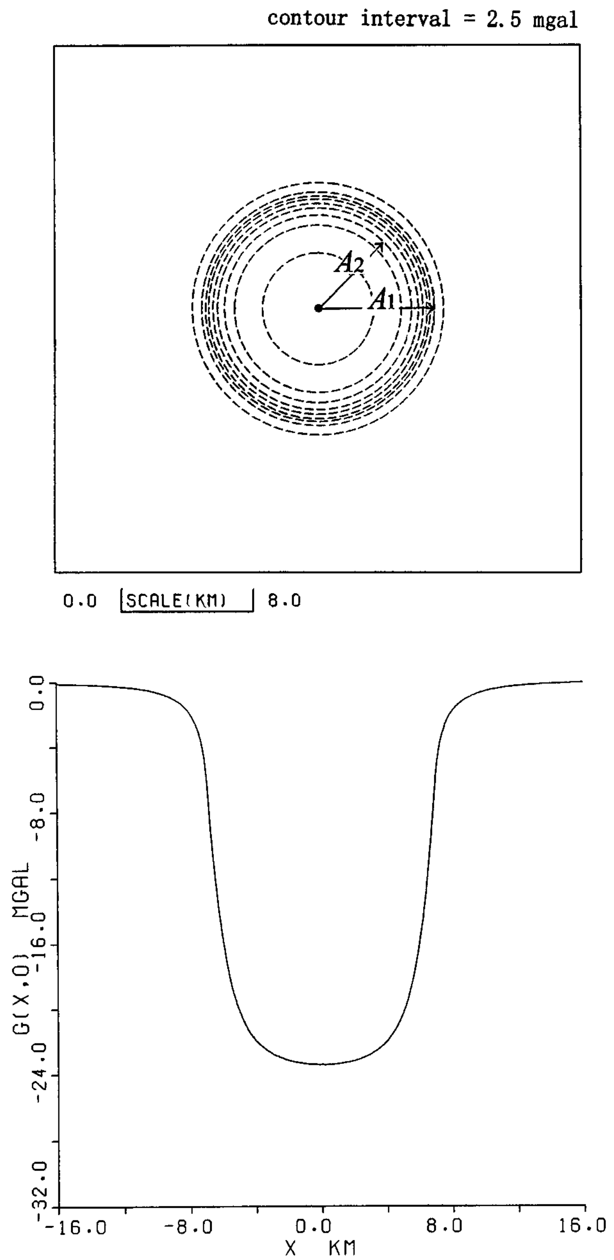

Fig. 10–1　A map of $g(R)$ caused by a cone.
Z_{21}=1,365 m　A_2=5.735 km　$\beta=45\pi/180$
$M=100$　$N=100$
$g_{\max}=-0.035$ mgal　$g_{\min}=-23.409$ mgal
$g_0=-23.409$ mgal　$g(0)=-23.412$ mgal

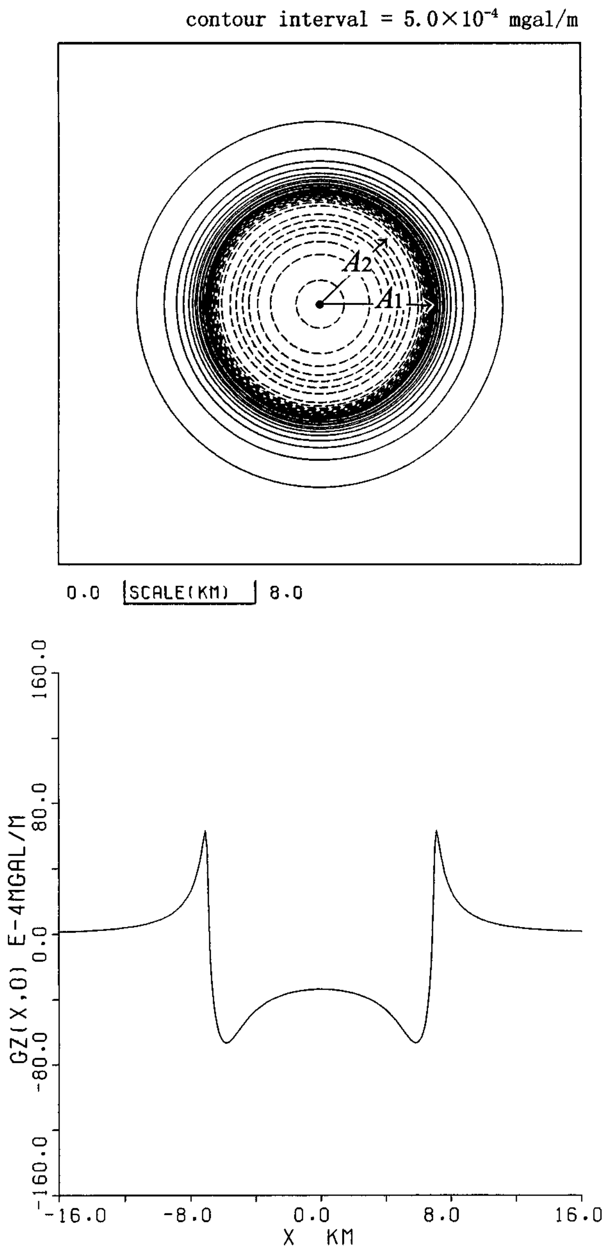

Fig. 10–2　A map of $g_Z(R)$ caused by a cone.
Z_{21}=1,365 m　A_2=5.735 km　$\beta=45\pi/180$
$M=200$　$N=200$
$g_{Z_{\max}}=65.758\times10^{-4}$ mgal/m　$A_{\max}$=7.089 km
g_Z(7.000 km)$=-54.678\times10^{-4}$ mgal/m
$g_{Z_{\min}}=-70.741\times10^{-4}$ mgal/m　$A_{\min}$=5.621 km
$g_{Z0}=-40.610\times10^{-4}$ mgal/m
$g_Z(0)=-40.626\times10^{-4}$ mgal/m

半径 A_1 の円周と半径 A_2 の円周の間で密な等値線図である。

2)　円錐モデルの鉛直一次勾配図

円錐の外側から A_1 に近づくと緩やかに増加し，$A_{\max}$=7.089 km で最大 $g_{Z_{\max}}=65.758\times10^{-4}$ mgal/m になる。$A_{\max}$ を過ぎると急速に減少し，A_1 で $g_{ZZ}(A_1)=54.678\times10^{-4}$ mgal/m になり，$A_{\min}$=5.621 km で最小 $g_{Z_{\min}}=-70.741\times10^{-4}$ mgal/m になる(δA=1.468 km である)。

中心に向かって緩やかに増加し，中心で $g_{Z0}=-40.610\times10^{-4}$ mgal/m になる。これは(20)式から算出した原点における厳密値 $g_Z(0)=-40.626\times10^{-4}$ mgal/m に比較し，$\delta g_{Z0}=|g_{Z0}-g_Z(0)|=0.016\times10^{-4}$ mgal/m の計算精度である。

概して，半径 A_1 の円周と半径 A_2 の円周の間で密な等値線図である。

3)　円錐モデルの鉛直二次勾配図

円錐の外側から A_1 に近づくと急速に増加し $A_{\max}$=

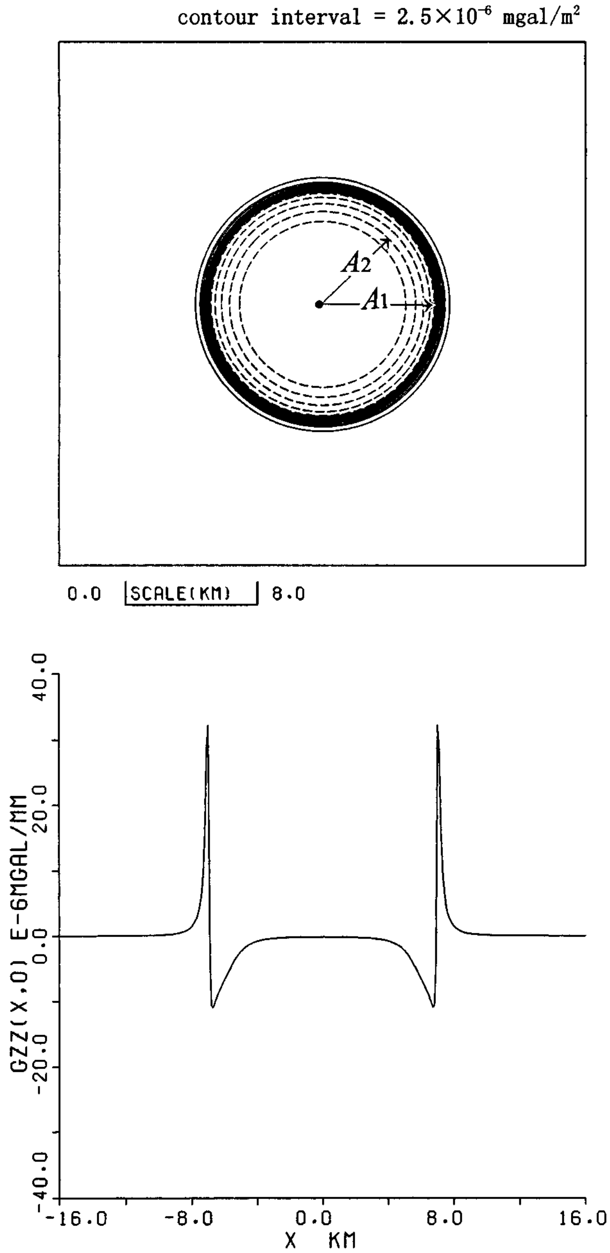

Fig. 10–3　A map of $g_{ZZ}(R)$ caused by a cone.
Z_{21}=1,365 m　A_2=5.735 km　β=45π/180
M=400　N=300
$g_{ZZ_{\max}}$ = 37.177 × 10^{-6} mgal/m^2　$A_{\max}$ = 7.033 km
g_{ZZ}(7.000 km) =32.577×10^{-6} mgal/m^2
$g_{ZZ_{\min}}$= − 10.652×10^{-6} mgal/m^2　$A_{\min}$=6.746 km
g_{ZZ0}= − 0.231×10^{-6} mgal/m^2
g_{ZZ}(0) = − 0.233×10^{-6} mgal/m^2

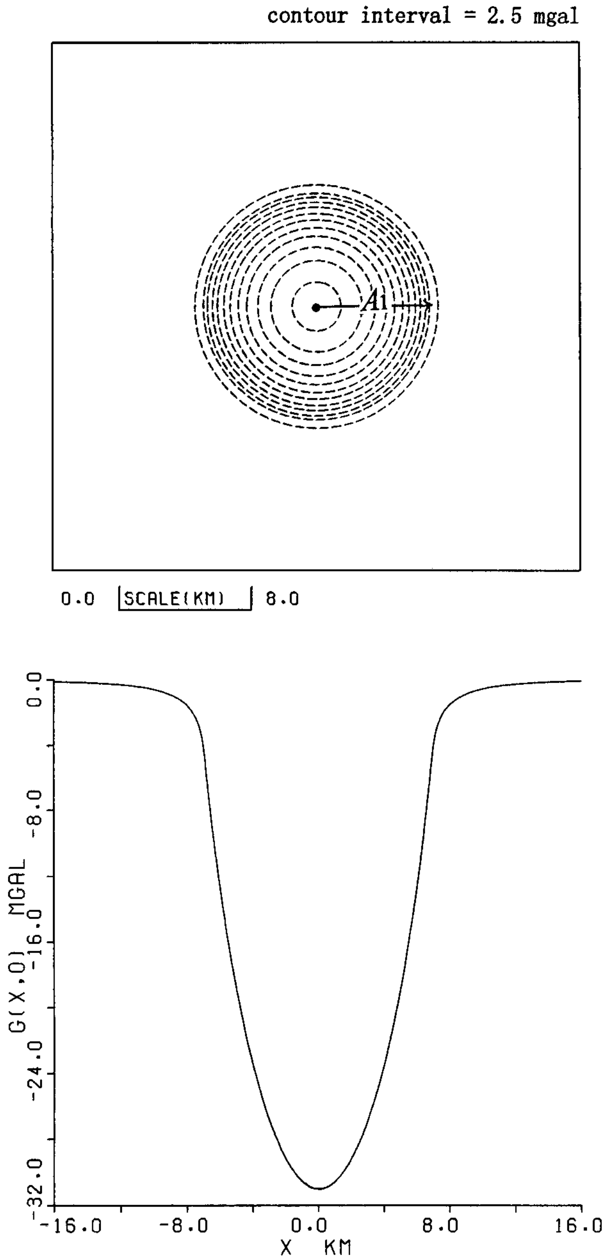

Fig. 11–1　A map of $g(R)$ caused by a parabola.
Z_{22}=2,200 m　M=100　N=100
$g_{\max}$= − 0.039 mgal　$g_{\min}$= − 31.013 mgal
g_0= − 31.017 mgal　g(0) = − 31.017 mgal

7.033 km で最大 $g_{ZZ_{\max}}$=37.177×10^{-6} mgal/m^2 になる。$A_{\max}$ を過ぎると急速に減少し，A_1 で $g_{ZZ}(A_1)$ =32.577×10^{-6} mgal/m^2 になり，$A_{\min}$=6.746 km で最小 $g_{ZZ_{\min}}$= − 10.652 × 10^{-6} mgal/m^2 になる（δA = 0.287 km である)。

中心に向かって緩やかに増加し，中心で g_{ZZ0} = − 0.231×10^{-6} mgal/m^2 になる。これは(21)式から算出した原点における厳密値 g_{ZZ}(0) = − 0.233×10^{-6} mgal/m^2 に比較し，δg_{ZZ0} = 0.002 × 10^{-6} mgal/m^2 の計算精度である。

概して，半径 A_1 の円周の周辺で極めて密で，半径 A_2 の周辺で粗な等値線図である。

4.1.3　回転放物体モデルの等値線図

1)　回転放物体モデルの重力図

広島・牧野（2004）の結果により

外側から A_1 を過ぎると急速に減少している。

中心における重力値は g_0= − 31.017 mgal であり，原

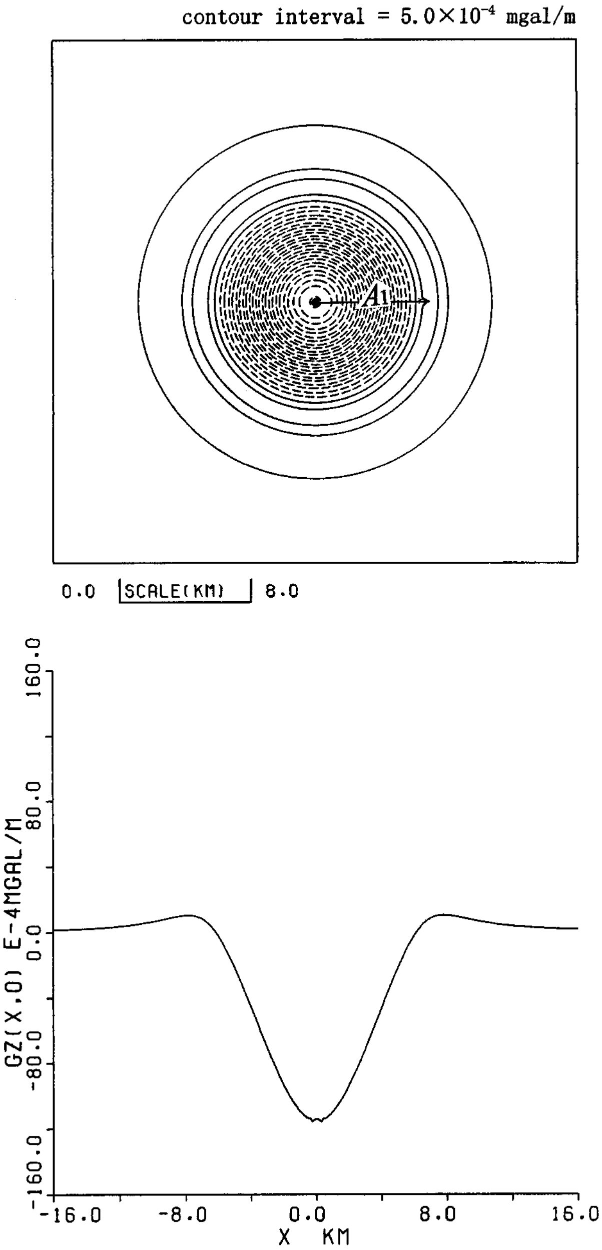

Fig. 11–2　A map of $g_Z(R)$ caused by a parabola.
Z_{22}=2,200 m　M=200　N=200
$g_{Z_{\max}}=10.191\times10^{-4}$ mgal/m　$A_{\max}$=7.700 km
$g_Z(7.000\ \mathrm{km})=8.228\times10^{-4}$ mgal/m
$g_{Z_{\min}}=-116.050\times10^{-4}$ mgal/m　$A_{\min}$=0.276 km
$g_{Z0}=-114.104\times10^{-4}$ mgal/m
$g_Z(0)=-115.500\times10^{-4}$ mgal/m

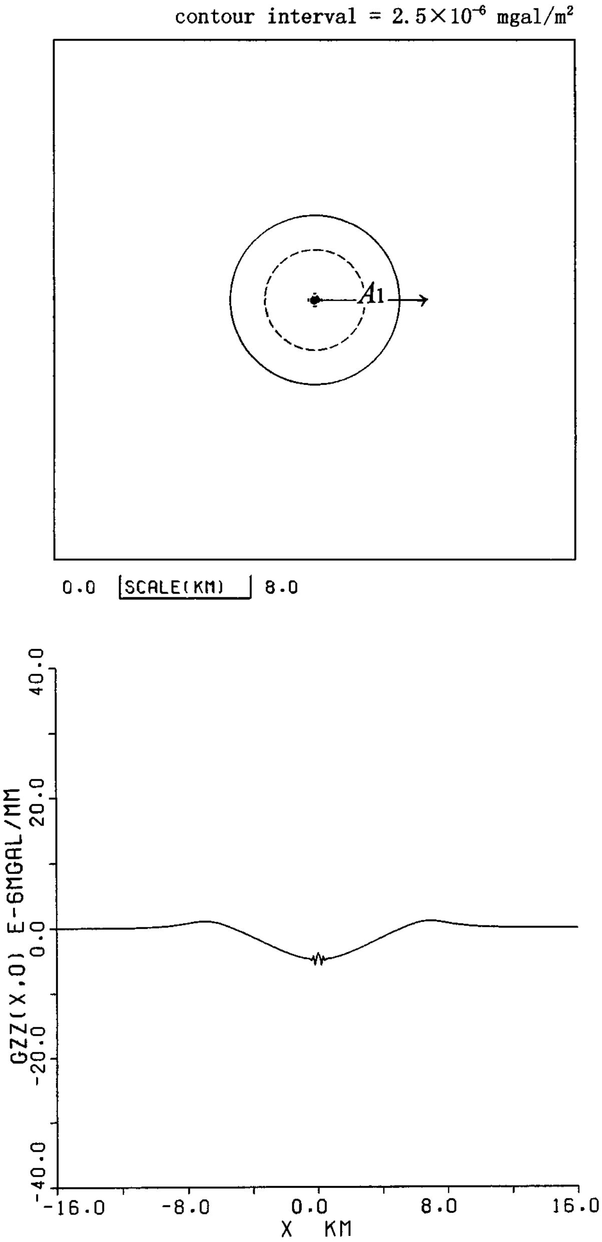

Fig. 11–3　A map of $g_{ZZ}(R)$ caused by a parabola.
Z_{22}=2,200 m　M=400　N=300
$g_{ZZ_{\max}}=1.062\times10^{-6}$ mgal/m²　$A_{\max}$ = 6.927 km
$g_{ZZ}(7.000\ \mathrm{km})=1.059\times10^{-6}$ mgal/m²
$g_{ZZ_{\min}}=-5.708\times10^{-6}$ mgal/m²　$A_{\min}$ = 0.199 km
$g_{ZZ0}=-3.818\times10^{-6}$ mgal/m²
$g_{ZZ}(0)=-4.859\times10^{-6}$ mgal/m²

点における厳密値 $g(0)=-31.017$ mgal に比較して小数第三位まで一致している。

半径 A_1 の円周の周辺で密で，中心点に近づくほど粗い等値線図である。

2)　回転放物体モデルの鉛直一次勾配図

回転放物体の外側から A_1 に近づくと極めて緩やかに増加し，$A_{\max}$ = 7.700 km で最大 $g_{Z_{\max}}=10.191\times10^{-4}$ mgal/m になる。$A_{\max}$ を過ぎると急速に減少する。A_1 で $g_{ZZ}(A_1)=8.228\times10^{-4}$ mgal/m になり，中心付近の $A_{\min}$=0.276 km で最小 $g_{Z_{\min}}=-116.050\times10^{-4}$ mgal/m になる（δA=7.424 km である）。

(12)式から算出した中心における計算値は $g_{Z0}=-114.104\times10^{-4}$ mgal/m である。これは(22)式から算出した原点における厳密値 $g_Z(0)=-116.040\times10^{-4}$ mgal

/m に比較し，δg_{Z0}＝1.936×10^{-4} mgal/m の計算精度である。

概して，半径 A_1 の円周と中心の間で極めて密な等値線図である。

3)　回転放物体モデルの鉛直二次勾配図

回転放物体の外側から A_1 に近づくと極めて緩やかに増加し $A_{\max}$＝6.927 km で最大 $g_{ZZ_{\max}}$＝1.062×10^{-6} mgal/m^2 になる。$A_{\max}$ を過ぎるとに緩やかに減少し，A_1 で $g_{ZZ}(A_1)$＝1.059×10^{-6} mgal/m^2 になり，中心付近の $A_{\min}$＝0.199 km で最小 $g_{ZZ_{\min}}$＝−5.708×10^{-6} mgal/m^2 になる（δA＝6.728 km である）。

(13)式から算出した中心における計算値は g_{ZZ0}＝−3.818×10^{-6} mgal/m^2 である。これは(23)式から算出した原点における厳密値 $g_{ZZ}(0)$＝−4.859×10^{-6} mgal/m^2 に比較し δg_{ZZ0}＝1.041×10^{-6} mgal/m^2 の計算精度である。

概して，半径 A_1 の円周から中心にかけて極めて粗な等値線図である。

4.1.4　回転楕円体モデルの等値線図

1)　回転楕円体モデルの重力図

広島・牧野（2004）の結果により

半径 A_1 の円周から中心の間で緩やかに減少している。最大値は $g_{\max}$＝−0.045 mgal であり，最小値は $g_{\min}$＝−27.243 mgal である。中心における重力値は g_0＝−27.280 mgal である。原点における厳密値 $g(0)$＝−27.280 mgal に比較して，小数第三位まで一致している。

半径 A_1 の円周の周辺で密で，中心点に近づくほど粗い等値線図である。

2)　回転楕円体モデルの鉛直一次勾配図

回転楕円体の外側から A_1 に近づくと緩やかに増加し，$A_{\max}$＝7.584 km で最大 $g_{Z_{\max}}$＝23.196×10^{-4} mgal/m になる。$A_{\max}$ を過ぎると急速に減少し，A_1 で $g_Z(A_1)$＝12.876×10^{-4} mgal/m になり，中心付近の $A_{\min}$＝0.612 km で最小 $g_{Z_{\min}}$＝−64.552×10^{-4} mgal/m になる（δA＝6.972 km である）。

(14)式から算出した中心における計算値は g_{Z0}＝−62.474×10^{-4} mgal/m である。これは(24)式から算出した原点における厳密値 $g_Z(0)$＝−63.384×10^{-4} mgal/m に比較し，δg_{Z0}＝0.910×10^{-4} mgal/m の計算精度である。

概して，半径 A_1 の円周の周辺で極めて密で，中心のまわりでは粗な等値線図である。

3)　回転楕円体モデルの鉛直二次勾配図

回転楕円体の外側から A_1 に近づくと緩やかに増加し $A_{\max}$＝7.264 km で最大 $g_{ZZ_{\max}}$＝3.836×10^{-6} mgal/m^2 になる。$A_{\max}$ を過ぎると緩やかに減少し，A_1 で $g_{ZZ}(A_1)$＝3.077×10^{-6} mgal/m^2 になり，$A_{\min}$＝5.752 km で最小 $g_{ZZ_{\min}}$＝−2.672×10^{-6} mgal/m^2 になる（δA＝1.512 km である）。

(15)式から算出した中心における計算値は g_{ZZ0}＝−0.942×10^{-6} mgal/m^2 である。これは(25)式から算出した原点における厳密値 $g_{ZZ}(0)$＝−1.399×10^{-6} mgal/m^2 に比較し，δg_{ZZ0}＝0.457×10^{-6} mgal/m^2 の計算精度である。

概して，半径 A_1 の円周の周辺で密な等値線図である。

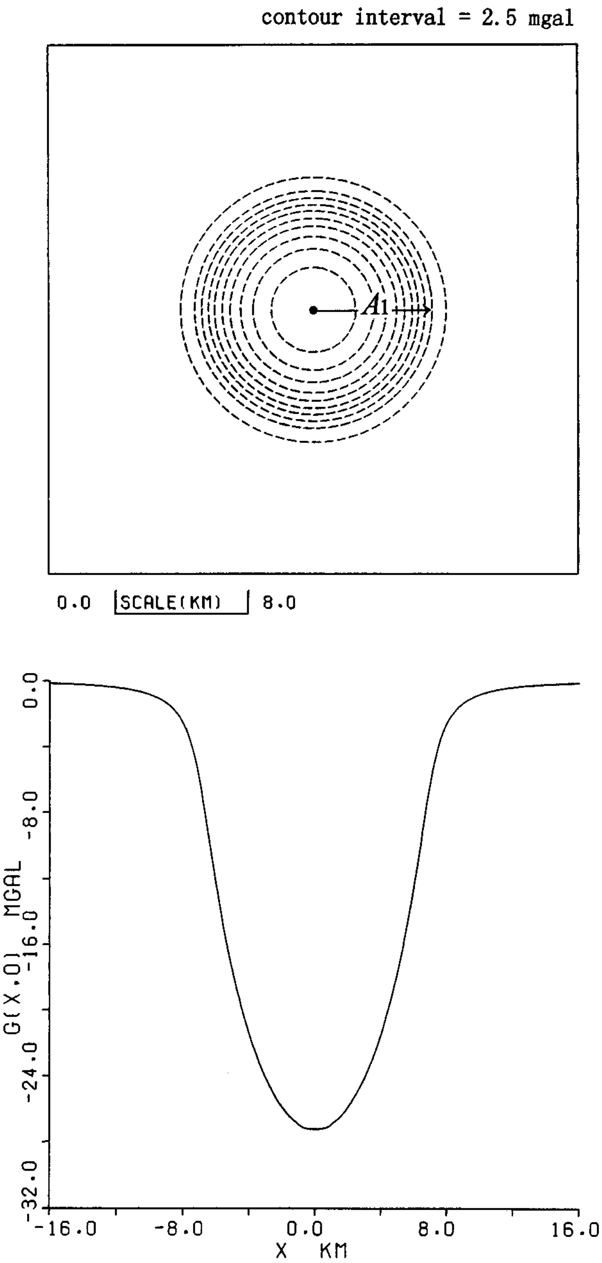

Fig. 12–1　A map of $g(R)$ caused by an ellipsoid.
B_1＝0.788 km　Z_{23}＝1,675 m　M＝100　N＝100
$g_{\max}$＝−0.045 mgal　$g_{\min}$＝−27.243 mgal
g_0＝−27.280 mgal　$g(0)$＝−27.280 mgal

5.　ま と め

産業技術総合研究所が発刊している20万分の１重力基本図には中心対称な重力異常が多数見られる。垂直な中心軸に対称な地下構造を把握し，解析することを目的として，モデル構造による鉛直勾配計算式を導出した。

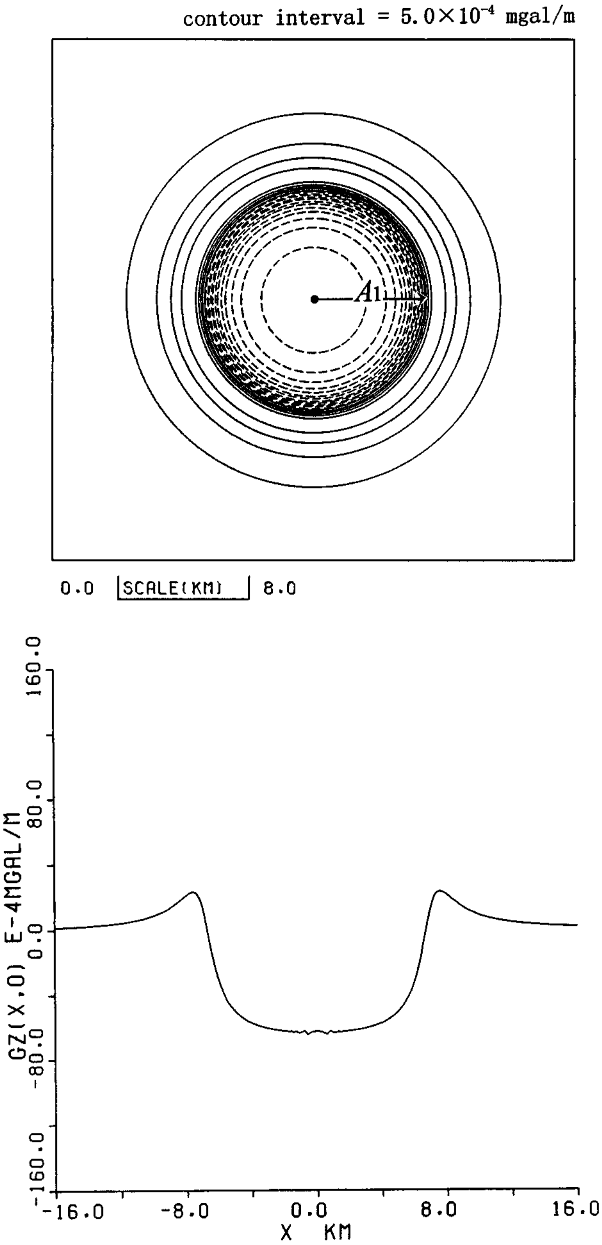

Fig. 12–2　A map of $g_Z(R)$ caused by an ellipsoid.
B_1=0.788 km　Z_{23}=1,675 m　M=200　N=200
$g_{Z_{\max}}$=23.196×10^{-4} mgal/m　$A_{\max}$=7.584 km
g_Z(7.000 km)=12.876×10^{-4} mgal/m
$g_{Z_{\min}}$=−64.552×10^{-4} mgal/m　$A_{\min}$=0.612 km
g_{Z0}=−62.474×10^{-4} mgal/m
g_Z(0)=−63.384×10^{-4} mgal/m

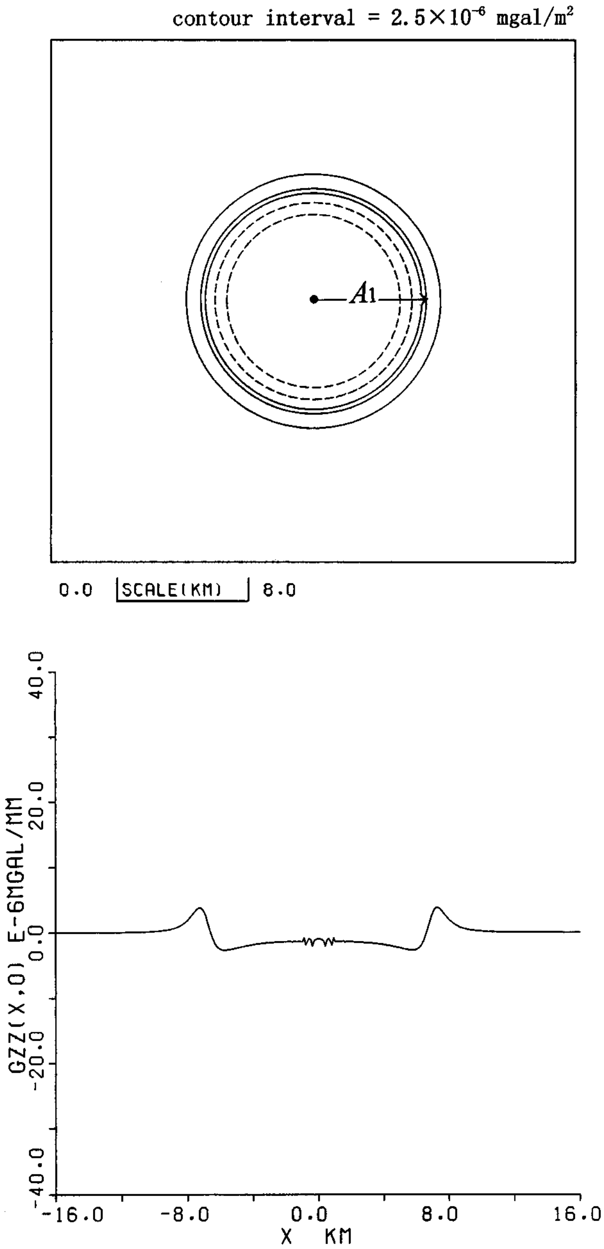

Fig. 12–3　A map of $g_{ZZ}(R)$ caused by an ellipsoid.
B_1=0.788 km　Z_{23}=1,675 m　M=400　N=300
$g_{ZZ_{\max}}$=3.836×10^{-6} mgal/m^2　$A_{\max}$=7.264 km
g_{ZZ}(7.000 km)=3.077×10^{-6} mgal/m^2
$g_{ZZ_{\min}}$=−2.672×10^{-6} mgal/m^2　$A_{\min}$=5.752 km
g_{ZZ0}=−0.942×10^{-6} mgal/m^2
g_{ZZ}(0)=−1.339×10^{-6} mgal/m^2

パラメータの値が，$\Delta\rho=-0.50$ g/cm^3, $Z_1=100$ m, $A_1=7.000$ km で，全てのモデルの質量（欠損）が同じ（$M=-80.8\times10^9$ ton）場合についての特徴を以下に列記する。

1)　重力の原点における厳密値は，

$$g^{cylinder}(0)=-20.060\ \text{mgal},\ g^{cone}(0)=-23.412\ \text{mgal},$$
$$g^{parabola}(0)=-31.017\ \text{mgal},\ g^{ellipsoid}(0)=-27.080\ \text{mgal}$$

であり，厳密値の絶対値は

$$|g^{cylinder}(0)|<|g^{cone}(0)|<|g^{ellipsoid}(0)|<|g^{parabola}(0)|$$

の順である。従って，中心点における重力の絶対値は円筒，円錐，回転楕円体，回転放物体モデルの順に大きくなっている。

モデル物体の下面の深さは円筒が Z_2＝1,150 m，円錐が Z_{21}＝1,365 m，回転放物体が Z_{22}＝2,200 m，回転楕円体が Z_{23}＝1,675 m であるから，中心点における重力の絶対値の順序はモデル物体の下面の深さに対応している。

2)　重力の最大値と最小値の差 $\delta g = g_{\max} - g_{\min}$ は

$$\delta g^{cylinder} = 20.030 \text{ mgal},\ \delta g^{cone} = 23.374 \text{ mgal},$$
$$\delta g^{parabola} = 30.974 \text{ mgal},\ \delta g^{ellipsoid} = 27.198 \text{ mgal}$$

であり，$\delta g^{cylinder} < \delta g^{cone} < \delta g^{ellipsoid} < \delta g^{parabola}$ の順である。従って，円筒，円錐，回転楕円体，回転放物体モデルの順に重力の最大値と最小値の差は大きくなっている。

3)　鉛直一次勾配の最大値と最小値の差
$\delta g_Z = g_{Z_{\max}} - g_{Z_{\min}}$ は

$$\delta g_Z^{cylinder} = 134.168 \times 10^{-4} \text{ mgal/m},$$
$$\delta g_Z^{cone} = 136.499 \times 10^{-4} \text{ mgal/m},$$
$$\delta g_Z^{parabola} = 126.241 \times 10^{-4} \text{ mgal/m},$$
$$\delta g_Z^{ellipsoid} = 87.748 \times 10^{-4} \text{ mgal/m}$$

であり，$\delta g_Z^{ellipsoid} < \delta g_Z^{parabola} < \delta g_Z^{cylinder} < \delta g_Z^{cone}$ となっている。従って，回転楕円体，回転放物体，円筒，円錐モデルの順に最大値と最小値の差は大きくなっている。

4)　鉛直二次勾配の最大値と最小値の差
$\delta g_{ZZ} = g_{ZZ_{\max}} - g_{ZZ_{\min}}$ は

$$\delta g_{ZZ}^{cylinder} = 65.965 \times 10^{-6} \text{ mgal/m}^2,$$
$$\delta g_{ZZ}^{cone} = 47.829 \times 10^{-6} \text{ mgal/m}^2,$$
$$\delta g_{ZZ}^{parabola} = 6.770 \times 10^{-6} \text{ mgal/m}^2,$$
$$\delta g_{ZZ}^{ellipsoid} = 6.508 \times 10^{-6} \text{ mgal/m}^2$$

であり，$\delta g_{ZZ}^{ellipsoid} < \delta g_{ZZ}^{parabola} < \delta g_{ZZ}^{cone} < \delta g_{ZZ}^{cylinder}$ となっている。従って，回転楕円体，回転放物体，円錐，円筒モデルの順に最大値と最小値の差は大きくなっている。

5)　最大値と最小値の差の順序は，重力，鉛直一次勾配，鉛直二次勾配でそれぞれ異なる。

6)　鉛直一次勾配値，及び二次勾配値の急変する位置はモデル形状の急変するごく周辺である。鉛直二次勾配のほうが鉛直一次勾配よりピークは鋭い。従って，構造境界の位置を見出すには鉛直二次勾配が優れている。

ところで，本報で示した一連のモデル重力図が示すように，重力図の等値線パターンは地下構造の形状把握に極めて有益な情報である。しかし，構造境界の位置の推定には適さない。この欠点をカバーしてくれるのが鉛直勾配図である。円筒の鉛直二次勾配図から想定されるように，陥没構造が地下に伏在する場合，その境界の位置は鉛直二次勾配図のピークとピークの間として推定される。

参　考　文　献

広島俊男・駒澤正夫・中塚　正（1989）：青森地域重力図（ブーゲー異常），通商産業省工業技術院地質調査所，重力図 1.

広島俊男・森尻理恵・駒澤正夫・牧野雅彦・村田泰章・名波一成（2001）：大分地域重力図（ブーゲー異常），経済産業省産業技術総合研究所地質調査所，重力図 17.

広島俊男・牧野雅彦（2004）：モデル物体による重力の計算式と重力図の主な特徴―垂直な中心線に対称なモデル物体―，物理探査，Vol. 57, No. 2, 135–149.

駒澤正夫・村田泰章・牧野雅彦・広島俊男・森尻理恵・山崎俊嗣（2001）：天北地域重力図（ブーゲー異常），経済産業省産業技術総合研究所地質調査所，重力図 16.

駒澤正夫・名和一成・村田泰章・牧野雅彦・森尻理恵・広島俊男・山崎俊嗣・西村清和・杉原光彦・大熊茂雄（2005）：屋久島地域重力図（ブーゲー異常），独立行政法人産業技術総合研究所地質調査総合センター，重力図 22.

牧野雅彦・村田泰章・広島俊男・駒澤正夫・小笠原正継・中塚正・鍋谷祐夫・井上　純・田中和夫・丸山孝彦・三品正明（1995）：阿武隈地域重力図（ブーゲー異常），通商産業省工業技術院地質調査所，重力図 6.

森口繁一・宇田川銈久・一松　信：数学公式集 I（1973），岩波全書 221, 126–127.

村田泰章・須田芳朗・菊地恒夫（1991）：日本の岩石物性値―密度，磁性，P 波速度，有効空隙率，熱伝導率―，地質調査所報告，276, 89–109.

戸川隼人（1972）：数値計算技法オーム社，109–152.

通商産業省工業技術院地質調査所編集（1992）：日本地質アトラス第２版日本地質図100万分の１朝倉書店.